Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 10

Abgabe bis spätestens Freitag, 10. Januar 2020, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A37) Gaußscher Integralsatz I (7 Punkte (3+3+1))

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2z, x^2yz, -z)$. Betrachten Sie das zylinderförmige Gebiet $V = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} < 5 \text{ und } 0 < z < 4\}$.

(a) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_V \mathrm{d}V\, (\nabla \cdot \vec{F})$.

(b) Berechnen Sie
- Den Fluss durch die Mantelfläche des Zylinders
- Den Fluss durch den Deckel des Zylinders (die Fläche bei $z = 4$)
- Den Fluss durch den Boden des Zylinders (die Fläche bei $z = 0$)

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis von (a) und (b) und überprüfen Sie damit den Satz von Gauß .

Aufgabe A38) Gaußscher Integralsatz II (6 Punkte (3+3))

Betrachten Sie ein kompaktes Gebiet mit Volumen V und glattem Rand ∂V. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes:

(a) Den Volumensatz: $V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{r}$.

(b) Für differenzierbare Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$ gilt die Identität: $\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \times \vec{F} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \times \vec{F}$
(Hinweis: Wenden Sie zuerst den Gaußschen Satz für ein Vektorfeld $\vec{V} = \vec{F} \times \vec{a}$ an mit frei wählbarem Vektor $\vec{a}$.)

Aufgabe A39) Satz von Stokes (7 Punkte (3+4))

Verwenden Sie für beide folgende Aufgaben den Satz von Stokes.

(a) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (yz, xz, xy)$. Berechnen Sie das Linienintegral $\oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ entlang der geschlossenen Kurve $\vec{r}(\phi) = 2(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ mit $\phi \in [0 : 2\pi]$.

(b) Die Fläche A sei folgendermassen definiert: Sie ist der Teil der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, für den gilt $z \geq 3$.
Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_F \mathrm{d}\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F})$ ($\mathrm{d}\vec{A}$ zeige vom Ursprung weg) für das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (-yz, xz, g(x,y,z))$.
Hier ist $g(\vec{r})$ beliebig. Zeigen Sie, dass das Ergebnis nicht von g abhängt.