Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2019

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 11

Abgabe bis spätestens Freitag, 17. Januar 2020, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A40) Delta-Funktion I (8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale. In manchen Fällen sind Fallunterscheidungen nötig. Die Funktion $\Theta(x)$ ist die Heavisidesche Stufenfunktion (Skript Kapitel 1.3.1.7).

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x+\alpha)\, \sinh(x)$

(b) $\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x)$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x-\beta) \mathrm{e}^{-2x}$

(d) $\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x)$

(e) $\int_{a}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Theta(x-\alpha)$

(f) $\int_{a}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x)\, \Theta(x-\alpha)\, \cos^2(x)$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x^3-a^3)\, \mathrm{e}^{i\beta x}$

(h) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x^2-a^2)\, \cos\left(x/\sqrt{x+2a}\right)$

Aufgabe A41) Delta-Funktion II (2 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale im dreidimensionalen Raum:

(a) $\iiint_{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \delta\big(\vec{r}-\vec{R}\big)$

(b) $\iiint_{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \delta\big(|\vec{r}|-R\big)$

Aufgabe A42) Greens-Funktion (6 Punkte)

In der theoretischen Physik muss man oft Gleichungen der Form $L G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ lösen, wobei L ein linearer Operator ist.

Betrachten Sie hier konkret die Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$.

(a) Lösen Sie diese Gleichung in einer Dimension mit der Randbedingung $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ (NB: Aus der Randbedingung folgt auch $\lim\limits_{x\to-\infty} G'(x) = 0$. Warum?)
Hinweis: Beginnen Sie damit, die Gleichung zunächst einmal zu integrieren.

(b) Lösen Sie die Gleichung nun in $d > 2$ Dimensionen. Machen Sie dazu den Ansatz $G(\vec{r}) = C r^{\alpha}$. Bestimmen Sie zunächst α so, dass $\Delta G \equiv 0$ für $\vec{r} \neq 0$. Verwenden Sie dann den Gaußschen Integralsatz, um C zu bestimmen.

(c) In zwei Dimensionen ($d = 2$) können Sie den Ansatz aus (b) nicht verwenden. Haben Sie eventuell eine andere Idee?

Aufgabe A43) <u>Nachlese Satz von Stokes I</u> (4 Punkte)

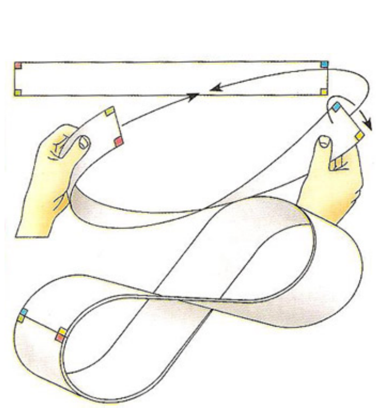
Verifizieren Sie den Satz von Stokes $\int_G \mathrm{d}\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{W}) = \int_{\partial G} \mathrm{d}^2 r \cdot \vec{W}$

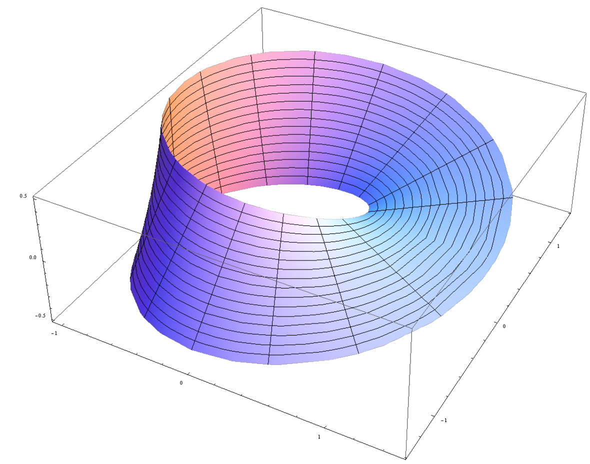
für das Vektorveld $\vec{W}(x, y, z) = (-y, yz^2, y^2 z)$

und die Fläche $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \& z \geq 0\}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, welche Form die Fläche G hat. Welche Koordinaten sollte man hier günstigerweise verwenden?

Bonus-Aufgabe: <u>Nachlese Satz von Stokes II</u> (4 Bonuspunkte)





Betrachten Sie ein Möbiusband F der Breite L mit Radius $R > L$. Die Breite L gibt dabei die Breite des verwendeten Streifens an. Der Radius R beschreibt den maximalen Radius, wenn man das Band auf die x-y-Ebene projiziert (siehe rechte Abbildung, rechts außen).

Die Oberfläche des Möbiusbands kann parametrisiert werden durch:

$$\vec{r}(u, \alpha) = \begin{pmatrix} x(u, \alpha) \\ y(u, \alpha) \\ z(u, \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R - u \sin(\alpha/2)) \cos(\alpha) \\ (R - u \sin(\alpha/2)) \sin(\alpha) \\ u \cos(\alpha/2) \end{pmatrix} \text{ mit } u \in [-\frac{L}{2} : \frac{L}{2}],\ \alpha \in [0 : 2\pi]$$

und die Randkurve $C = \partial F$ über $\vec{r}_C(t) = \vec{r}(L/2, t)$ mit $t \in [0 : 4\pi]$.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

(a) Berechnen Sie $\left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right)$.

Schließen Sie hieraus auf den Wert des Oberflächenintegrals: $\int_F \mathrm{d}\vec{A} \cdot \left(\nabla \times \vec{V} \right)$

(b) Zeigen Sie: $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{r}(u, \alpha) \right) \cdot \vec{V} \left(x(u, \alpha), y(u, \alpha), z(u, \alpha) \right) = 1\ \forall u \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung von (b) das Kurvenintegral $\int_C \mathrm{d}\,\vec{r} \cdot \vec{V}$.

(d) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (a) mit dem aus (c). Offenbar gilt der Satz von Stokes hier nicht. Woran könnte das liegen?