Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 12

Abgabe bis spätestens Freitag, 24. Januar 2020, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A44) Fourierreihe und Obertöne einer Saite (6 Punkte)

Betrachten Sie eine Gitarrensaite, die zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist. Die Auslenkung der Saite zur Zeit t wird durch die Funktion $A(x,t)$ beschrieben mit $A(0,t) = A(L,t) = 0 \,\forall\, t$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Saite am Ort x_0 angezupft, so dass die Auslenkung eine Dreiecksform hat: $A(x, t = 0) =: A_0(x)$ mit

$$A_0(x) = \epsilon \begin{cases} x/x_0 & : x < x_0 \\ (L-x)/(L-x_0) & : x_0 < x < L \end{cases}$$

Wir wollen diese Schwingung in Schwingungsmoden zerlegen. Da auch die Schwingungsmoden alle bei $x = 0$ und $x = L$ Null werden müssen, muss die Zerlegung die Form haben

$$A_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, \sin(\pi n x/L). \tag{1}$$

Die Schwingungsmoden schwingen dann zur Zeit $t > 0$ unabhängig weiter und erzeugen einen Klangeindruck mit einem Obertonspektrum.

(a) Um $A_0(x)$ gemäß Gl. (1) zu entwickeln, wenden wir folgenden Trick an: Wir erweitern $A_0(x)$ zu einer $2L$-periodischen Funktion über $A_0(x) := -A_0(-x)$ für $-L < x < 0$ und $A_0(x + 2L) = A_0(x)$. Dann enwickeln wir $A_0(x)$ in eine trigonometrische Reihe gemäß Vorlesung (Skript 7.3.2).

$$A_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big\{ a_n \, \cos(2\pi n x/2L) + b_n \sin(2\pi n x/2L) \big\}$$

Verifizieren Sie, dass a_0 und alle a_n verschwinden und die Reihe demnach tatsächlich die Form (1) hat

(b) Berechnen Sie die b_n für beliebige x_0.

(c) Wählen Sie konkret $x_0 = L/2$ und $x_0 = L/16$ und berechnen Sie die Amplituden b_n der ersten 5 Schwingungsmoden. Wie verhalten sich in beiden Fällen die Amplitude der ersten beiden Obertöne ($n = 2, 3$) zum Grundton ($n = 1$)?
Summieren Sie die Schwingungsmoden graphisch auf und überprüfen Sie, wie sich die gesuchte Dreiecksform aufbaut.

Aufgabe A45) **Parsevalgleichung und Faltungssatz** (4 Punkte)

Beweisen Sie für d-dimensionale Fourierintegrale:

(a) $\int \mathrm{d}^d r\, f^*(\vec{r})\, g(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^d k \hat{f}^*(\vec{k})\, \hat{g}(\vec{k})$
Daraus ergibt sich als Spezialfall die Parsevalsche Gleichung: $\int \mathrm{d}^d r |f|^2 = \int \mathrm{d}^d k |\hat{f}|^2$.

(b) Beweisen Sie den Faltungssatz: Für $h(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^d \vec{r}' f(\vec{r}')g(\vec{r}-\vec{r}')$ gilt $\hat{h}(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^d \hat{f}(\vec{k})\hat{g}(\vec{k})$.

Aufgabe A46) **Fourierintegral** (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \Theta(L/2 - |x|)$.
(Theta ist die Heaviside-Funktion).

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $g(x) = (L - |x|)\,\Theta(L - |x|)$

(c) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von $h(x) = \int \mathrm{d}x' \Theta(L/2 - |x - x'|)\Theta(L/2 - |x'|)$ mittels des Ergebnisses von (a) und des Faltungssatzes.

(d) Vergleichen Sie (c) mit (b). Tragen Sie beide Fouriertransformierte als Funktion von k auf. Was fällt Ihnen auf? Diskutieren Sie Ihren Befund.

Aufgabe A47) **Greens-Funktion II** (6 Punkte)

In Aufgabe A42 haben Sie die Lösung der Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ mit dem Ansatz $G(\vec{r}) = Cr^\alpha$ gelöst. Hier wollen wir die Gleichung ohne Ansatz direkt lösen.

(a) Führen Sie die Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ in den Fourier-Raum über. Bestimmen Sie die Lösung im Fourier-Raum für allgemein d-dimensionale Räume.
Das Ergebnis ist $\hat{G}(\vec{k}) = -1/(\sqrt{2\pi}^d k^2)$.

(b) Betrachten Sie nun Dimensionen $d \geq 3$. Transformieren Sie $\hat{G}(\vec{k})$ zurück in $G(\vec{r})$.
Tipps:
- Wählen Sie in dem Integral $\int \mathrm{d}^d k\ \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{G}(k)$ die Achsen im $\vec{k}$-Raum so, dass k_1 in Richtung $\vec{r}$ zeigt. Zerlegen Sie dann $\int \mathrm{d}^d k\ \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{G}(k) = \int \mathrm{d}k_2 ... \mathrm{d}k_d \int \mathrm{d}k_1 \mathrm{e}^{ik_1 r}\hat{G}(k)$.
- Für richtungsunabhängige Funktionen $\hat{f}(k)$ gilt $\int \mathrm{d}^d k\ \hat{f}(k) = \Omega_d \int \mathrm{d}k\ k^{d-1}\ \hat{f}(k)$, wobei Ω_d die Oberfläche der d-dimensionalen Einheitskugel ist. Sie können Ω_d erstmal so stehen lassen.
- Nützliche Integrale sind:
$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \frac{1}{k^2+a^2}\mathrm{e}^{ikr} = \pi \frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{-|ar|}$ (siehe Vorlesung)
$\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\ \tau^d\ \mathrm{e}^{-\tau} = d!$

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis von (b) mit dem Ergebnis von Aufgabe A42 b). Verifizieren Sie, dass dasselbe herauskommt.
Hinweise:
- Die Lösung von A42 b) war: $G(\vec{r}) = Cr^{2-d}$ mit $C = -\frac{1}{(d-2)\Omega_d}$.
- Der explizite Ausdruck für Ω_d lautet: $\Omega_d = d\ \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$, wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion ist (siehe Kapitel 3.3.4).
- Es gilt: $\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$ und $\Gamma(1 + n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bonus-Aufgabe für Smartphone-Besitzer (3 Bonuspunkte)

Installieren Sie auf Ihrem Smartphone die App Phyphox.

(a) Gehen Sie auf Audio-Oszilloskop. Sprechen Sie zunächst etwas, dann singen Sie einen Ton. Was sehen Sie?

(b) Gehen Sie nun auf Audio-Spektrum und wiederholen Sie die Übung. Drucken Sie das Spektrum Ihrer gesprochenen Sprache und Ihres gesungenen Tons aus (oder malen Sie es ab). Diskutieren Sie es.

(c) Probieren Sie noch andere Dinge aus und berichten Sie.