Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 13

Abgabe bis spätestens Freitag, 31. Januar 2020, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A48) Nachtrag Nabla-Operator (6 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r}$ und $\vec{w}(\vec{r})$ sowie ein Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$. Beweisen Sie die folgenden Relationen

(a) $\nabla \cdot (\phi \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi(\nabla \cdot \vec{v})$

(b) $\nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -\vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) + \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v})$

(c) $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$
mit $(\vec{v} \cdot \nabla) = (\sum_i v_i \partial_i)$

Aufgabe A49) Poissonverteilung (6 Punkte)

Die Poissonverteilung ist gegeben durch $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^n / n!$

(a) Zeigen Sie, dass diese Verteilung korrekt normiert ist und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle n \rangle$ als Funktion von λ

(b) Berechnen Sie die Varianz σ_n^2 als Funktion von λ

(c) Bestimmen Sie den Median für $\lambda = 1$ und $\lambda = 5$. Vergleichen Sie für diese beiden Fälle die Werte des Modus, des Median, und des Erwartungswertes.

Aufgabe A50) Regressionsgerade (8 Punkte)

Gegeben sei eine Messreihe $(x_i, y_i \pm \Delta\sigma_i)$ mit N Werten $i = 1, ..., N$. Dieser Datensatz soll an eine Gerade $f(x) = ax + b$ angefittet werden. In dieser Aufgabe sollen Sie die Gleichungen für die Fitparameter a und b bestimmen.

Wir verwenden die Methode der "kleinsten Fehlerquadrate", die wir auch in der Vorlesung noch einmal ausführlicher diskutieren werden.
Ausgangspunkt ist die Größe $\chi^2 = \sum_i (y_i - f(x_i))^2 / \sigma_i^2$.

(a) Die Fitparameter a und b sollen so gewählt werden, dass sie χ^2 minimieren. Stellen Sie die zugehörigen Gleichungen auf. Sie erhalten das Gleichungssystem

$$aS_{xx} + bS_x = S_{xy}$$
$$aS_x + bS_e = S_y$$

mit $S_{xx} = \sum_i \frac{x_i x_i}{\sigma_i^2}$, $S_{xy} = \sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$, $S_x = \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $S_y = \sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $S_e = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}$.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem auf und bestimmen Sie a und b.

(c) Sie können sich sicher denken, dass der Datensatz mindestens zwei Punkte enthalten muss, damit man ihn an eine Gerade fitten kann. Was passiert mit dem Gleichungssystem aus (a), wenn nur ein Datenpunkt vorliegt? Warum kann man dann a und b nicht mehr bestimmen?

(d) Betrachten Sie den Datensatz $\{(1, 2 \pm 1), (2, 2 \pm 1), (3, 3.5 \pm 1), (4, 4 \pm 1)\}$
Verwenden Sie eine Software Ihrer Wahl, um eine Gerade anzufitten. Fitten Sie sie dann noch einmal von Hand mit Hilfe der Gleichungen von (a) und (b) und vergleichen Sie das Ergebnis.
Wenn Sie keine Fitsoftware kennen, können Sie auch Mathematica verwenden. Die Befehle lauten

```
data = {{1, 2}, {2, 2}, {3, 3.5}, {4, 4}}
line = Fit[data, {1, x}, x]
```

Sie können sich das Ergebnis danach anschauen mittels

```
Show[ListPlot[data, PlotStyle -> Red], Plot[{line}, {x, 0, 4}]]
```

Bonusaufgabe) **<u>Statistik</u>** (9 Bonuspunkte)

a) Bei einem Verbrechen in Frankfurt werden DNA Spuren am Opfer festgestellt. Die Polizei gleicht diese mit einer umfassenden Datenbasis von genetischen Fingerabdrücken ab und findet bei einem Mann einen identischen genetischen Fingerabdruck. Der DNA Test ist sehr zuverlässig: Er identifiziert positive Übereinstimmungen mit 99 % Sicherheit und kann im negativen Falle Übereinstimmungen mit 99.99 % Sicherheit ausschließen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann der Täter ist.
   - 99 % ?
   - 99.99 % ?
   - circa 20 % ?
   - weniger als 1 % ?

b) In der Zeitung lesen Sie die Schlagzeile: "*Startups beschäftigen intelligentere Mitarbeiter: Eine Studie hat den durchschnittlichen IQ aller deutschen Unternehmen ermittelt. Das Ergebnis: Startups belegen Spitzenplätze.* "
Erklären Sie die Ursache dieser Studie.

c) In einer Schule wird an zwei gleich große Parallelklassen, der 5a) und der 5b), ein Leistungstest durchgeführt. Von 100 möglichen Punkten erzielen die Schüler der 5a) im Schnitt 45, die Schüler der 5b) im Schnitt 55 Punkte. Um die Leistungen der Schüler zu verbessern, beschließt die Schulleitung, die Klassen neu einzuteilen in eine kleine Förderklasse und eine große Restklasse. Im nächsten Leistungstest haben sich beide Klassen verbessert: Die Schüler der 5a) haben im Schnitt 47.5 Punkte, die Schüler der 5b) sogar 57.5 Punkte.
Beantworten Sie folgende Fragen:
- Kann man daraus schließen, dass die Schüler besser geworden sind?
- Welche der beiden Klassen ist die Förderklasse?
- Kann man die Größe der Förderklasse abschätzen?

Literatur zu dieser Aufgabe:
- David Kahnemann: "Thinking fast and slow"
- Hans-Peter Beck-Bornholdt: "Der Hund, der Eier legt"