Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2019

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 2

Abgabe bis spätestens Montag, 04. November 2019, *vor* 10:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7)

Leseauftrag bis zum 31. Oktober: Skript Kapitel 2.1 und 2.2.

Aufgaben zum Leseauftrag:

Aufgabe L3

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Betrachten Sie alle möglichen Paare von Vektoren (z.B. $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c})$ etc.). Welche Paare sind linear unabhängig, welche linear abhängig?

(b) Sind die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linear unabhängig? Wie ist es mit den Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$?

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$

(d) Normieren Sie $\vec{a}$ und $\vec{d}$ auf die Länge 1.

Aufgabe L4

(a) Gegeben sei der Vektor $a = (1, 2, 3)$. Berechnen Sie $\sum_j \delta_{ij} a_j$ für $i = 2$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{ji}$

Aufgabe L5

Gegeben sind zwei Koordinatensysteme 1 und 2 in der Ebene. Die Basisvektoren in den jeweiligen Koordinatensystemen sind gegeben durch die Einheitsvektoren $\vec{e}_x^{(i)}$, $\vec{e}_y^{(i)}$ mit $i = 1, 2$ (und $|\vec{e}_\alpha^{(i)}| = 1$). Im Koordinatensystem 1 haben die Basisvektoren des Systems 2 die Koordinaten $e_x^{(2)} = (1, 2)/\sqrt{5}$ und $e_y^{(2)} = (2, -1)/\sqrt{5}$.
Ein Vektor $\vec{a}$ hat im Koordinatensystem 1 die Koordinaten $(1, 3)$. Welche Koordinaten hat er im Koordinatensystem 2?

Die Aufgaben zum Leseauftrag werden je nach Bedarf in der Vorlesung vom 31. Oktober besprochen. Sie müssen zusammen mit den anderen Aufgaben abgegeben werden.

Reguläre Aufgaben

Aufgabe A4) Rechnen mit komplexen Zahlen (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie die komplexe Zahl $c = (1+2i)/(1-i)$. Berechnen Sie
- die Komplexkonjugierte c^* und den Betrag $|c|$
- den Realteil $\Re(c)$ und den Imaginärteil $\Im(c)$
- das Argument von c.

(b) Berechnen Sie
- $(2i)^{16}$, $(3+\sqrt{i})^2$
- $\sqrt[5]{-i}^{12}$
- $(-i-2\sqrt{3})^{1/4}$

Hinweis:
– In manchen Fällen empfiehlt sich die Benutzung der Polardarstellung $z = r\ \exp(i\phi)$:

Aufgabe A5) Komplexe Zahlen in der Zahlenebene (8 Punkte)

Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge der Zahlen $z = x + iy$, die die folgende Bedingung erfüllen:

(a) $(z^2)^* = z^2$

(b) $|z - i| = 1$

(c) $z^4 = \sqrt{1+i}$

(d) $|z/z^*| = 1$

Aufgabe A6) Komplexe Funktionen (6 Punkte)

a) Zeigen Sie $\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

b) Berechnen Sie $\cos(\pi \pm i\pi)$ und $\cos(\pi/2 \pm i\pi)$.

c) Auch in $\mathbb{C}$ ist der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. $w = \ln z \;\Rightarrow\; z = \mathrm{e}^w$. Ähnlich wie bei der komplexen Wurzelfunktion ist der komplexe Logarithmus nicht eindeutig, d.h. es gibt im mehrere Lösungen. Beispielsweise steht $\ln(i)$ für eine Schar von Lösungen, $i\pi/2, i(\pi/2 + 2\pi), i(\pi/2 + 4\pi)$ etc.

Aufgabe: Berechnen Sie $\ln(-1)$ und $\ln(-i)$.