Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 3

Abgabe bis spätestens Freitag, 9. November 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).
Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an. Wenn Sie das vergessen, kann es passieren, dass Ihr Blatt nicht gewertet wird.

Leseauftrag bis zum 7. November: Skript Kapitel 2.3
Zusätzlich freiwillig 2.4 ohne 2.4.6 und 2.4.7.

Aufgaben zum Leseauftrag (werden am 7.11. besprochen.
Sind trotzdem abzugeben zusammen mit den anderen Aufgaben)

Aufgabe L6: Vektoren

Gegeben seien folgende Vektoren (dieselben wie L3)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})$.

(b) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

(c) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, welches von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

Aufgabe L7: ϵ-Tensor

(a) Zeigen Sie die Lagrange-Identität $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ mit Hilfe der Gleichung

$$\sum_m \epsilon_{klm} \epsilon_{pqm} = \delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}. \tag{1}$$

(b) Notieren Sie $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in Epsilon-Tensor Notation.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b) und der Gleichung (1) die Relation
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

(d) Berechnen Sie $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}$.

Aufgabe L8 – freiwillig : Matrizen

(a) Gegeben sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $AB, BA, A\vec{a}, \mathrm{Spur}(A), \mathrm{Det}(A)$.

(b) Gegeben ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $A\vec{b}$. Fällt Ihnen etwas auf?
- Berechnen Sie $\mathrm{Spur}(A)$ und $\mathrm{Det}(A)$.

Reguläre Aufgaben

Aufgabe A7) Komplexe Zahlen: Nachlese I (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$

(b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
(Hinweis: Am besten geht das anhand der Polardarstellung von z_1, z_2)

(c) Berechnen Sie $\ln(2i)$

(d) Berechnen Sie $\cos(\pi + i\pi)$

(e) Zeichnen Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge der Zahlen z, die die Gleichunge $z^4 = i$ erfüllen.

(f) Zeichnen Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge der Zahlen z, die die Gleichunge $z^4 = \sqrt{1+i}$ erfüllen.

Hinweis: Wie wir in der Vorlesung besprochen haben, steht $\sqrt{1+i}$ für mehrere Lösungen. Wie viele Punkte müssen Sie insgesamt einzeichnen?

Aufgabe A8) Komplexe Zahlen: Nachlese II (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen für $\cos(z) = 2$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen für $z^i = 1$.

Aufgabe A9) Drehmatrizen (8 Punkte)

Drehungen lassen sich durch Drehmatrizen ausführen. Bei Drehung des Koordinatensystems entlang der z-Achse um den Winkel φ werden die Koordinaten $x = (x_i)$ eines Vektor $\vec{x}$ in die Koordinaten $x' = D(\varphi)x$ überführt, wobei die Drehmatrix $D(\varphi)$ gegeben ist durch

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Betrachten Sie eine solche Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\varphi = \pi/2$. Wie ändern sich die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit den ursprünglichen Koordinaten $a = (1, 0, 0)$, $b = (1, 2, 3)$, und $c = (0, 0, 1)$?

(b) Zeigen Sie, dass zwei hintereinander ausgeführte Drehungen um φ das gleiche Ergebnis geben wie eine Drehung um 2φ, d.h. $D(\varphi)D(\varphi) = D(2\varphi)$.

(c) Geben Sie die inverse Matrix zu $D(\varphi)$ an, d.h. die Matrix $D'(\varphi)$, für die gilt $D'(\varphi)D(\varphi) = \mathbb{1}$. Berechnen Sie $D(\varphi)D'(\varphi)$.

Hinweis: Für diese Aufgabe sollte keine explizite Rechnung nötig sein.

(d) Betrachten Sie nun eine Situation, in der nicht das Koordinatensystem gedreht wird, aber ein Vektor $\vec{a}$ selber. Überlegen Sie sich, wie sich in diesem Fall die Koordinaten des Vektors transformieren. Begründen Sie Ihre Antwort.