Institut für Physik

Friederike Schmid

WS 2019

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 4

Abgabe bis spätestens Freitag, 15. November 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an. Wenn Sie das vergessen, kann es passieren, dass Ihr Blatt nicht gewertet wird.

Leseauftrag bis zum 14. November: Skript Kapitel 3.1.2 – 3.1.5

Aufgaben zum Leseauftrag (werden am 14.11. besprochen.
Sind trotzdem abzugeben zusammen mit den anderen Aufgaben)

Aufgabe L9: Differenzieren

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen nach t

(a) $f(t) = \tan(t)$

(b) $f(t) = \arctan(t)$

(c) $f(t) = b^t$

(d) $f(t) = \ln\sqrt{g(\omega t) - x(t)}$

Aufgabe L10: Partielle Ableitungen

(a) Berechnen Sie partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von $f(x,y) = \exp(xy) + x^2 - y^2$

(b) Berechnen Sie partiellen Ableitungen von $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) Berechnen Sie zu $f(x,y) = \exp(xy)$ die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$.

Aufgabe L11: Totales Differential

Berechnen Sie das totale Differential von $f(x,y) = \exp(xy) + x^2 - y^2$

Reguläre Aufgaben

Aufgabe A10) Reziproke Vektoren (6 Punkte)

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kann man sogenannte reziproke Vektoren definieren:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \qquad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V},$$

mit $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Reziproke Vektoren spielen in der Festkörperphysik und der Kristallographie eine wichtige Rolle.

(a) Zeigen Sie folgende zwei Aussagen:
- Die drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ sind auch linear unabhängig.
- Es Gilt $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$.

(c) Betrachten Sie nun die reziproken Vektoren von $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Zeigen Sie, dass sie wieder proportional sind zu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.
(Sie können dazu die Vektoren entweder ausrechnen oder die Behauptung mit Argumenten beweisen, aber bitte benutzen Sie **nachvollziehbare** Argumente).

(d) Berechnen Sie die reziproken Vektoren für

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A11) ϵ-Tensor und Kreuzprodukt (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Epsilon-Tensors die Gleichung
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Epsilon-Tensors die Gleichung
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$
Hier steht $((\vec{a}\vec{b}\vec{c}) := \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$ für das Spatprodukt.

(c) Berechnen Sie $\sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2$.

Aufgabe A12) Partielle Ableitungen (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Cobb-Douglas Produktionsfunktion
$y(p_1, p_2) = a\, p_1^{0.4}\, p_2^{0.6}$ bezüglich der Parameter p_1 und p_2.
Berechnen Sie daraus das totale Differential dy.

(b) Zeigen Sie: Für $q(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ gilt $q(x_1, x_2) = \frac{\partial q}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} x_2$

(c) (2 Bonuspunkte): Ein Fahrzeug bewegt sich in einer hügeligen Landschaft mit Höhenfunktion $h(x, y) = \sin(xy)$. In der (x, y) Ebene wird seine Trajektorie $x(t) = t, y(t) = -t$ beschrieben. Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dh}{dt}$ der Höhe des Fahrzeugs nach der Zeit.

Aufgabe A13) Extremwerte (6 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = x^2/2 + xy + y^4$ auf Extremwerte.

(a') (2 Bonuspunkte): Welche der Extremwerte aus (a) sind Minima, Maxima, Sattelpunkte? Warum?

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Parameter das Volumen des größten Quaders, den man in das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ einschreiben kann.