Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 5

Abgabe bis spätestens Freitag, 22. November 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an. Einige von Ihnen vergessen die Namen immer noch. In dem Fall können wir die Blätter leider nicht werten.

Leseauftrag bis zum 21. November: Skript Kapitel 3.3.1–3.3.3

Aufgaben zum Leseauftrag (werden am 21.11. besprochen.
Sind trotzdem abzugeben zusammen mit den anderen Aufgaben)

Aufgabe L12: Stammfunktion

Bestimmen Sie die Stammfunktion von

- $f(x) = x^n$
- $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
- $f(x) = x\,(3x^2 - 1)^6$

Aufgabe L13: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie

- $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
- $\int_0^r \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-2x/a}$
- $\int_{-a}^{a} \cosh(x/A)\mathrm{d}x$

Aufgabe L14: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie

- $\int \mathrm{d}x\, x^n$
- $\int \mathrm{d}t\, \dot{x}$
- $\int \mathrm{d}x\, \sqrt{x - \frac{1}{a^2}}$

Aufgabe L15: Integrale

Zeigen Sie: $\int \mathrm{d}x\, f'(x)\, x^n = f(x)\, x^n - n \int \mathrm{d}x\, f(x)\, x^{n-1}$

Reguläre Aufgaben

Aufgabe A14) Differenzieren komplexwertiger Funktionen (6 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich in der (x, y)-Ebene als Funktion der Zeit t so, dass man die Bewegung durch die folgende Gleichung beschreiben kann:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \exp(2it)$$

(a) Zeichnen Sie die Traktorie in der Ebene. Welche Bewegung wird beschrieben?

(b) Berechnen Sie dz/dt und d^2z/dt^2. Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ und die Beschleunigung $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ sowie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit t.

(c) Die Bewegung eines anderen Teilchens werde durch die folgende Funktion beschrieben.

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (i + 2t)/(t + i)$$

Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Aufgabe A15) Partielle Ableitungen und totales Differential (6 Punkte)

(a) Die ideale Gasgleichung $pV = RT$ beschreibt, wie in idealen Gasen die Größen Druck (p), Temperatur (T) und Volumen (V) miteinander verknüpft sind. R ist die Gaskonstante. Damit kann jede Variable V, p, T als Funktion der beiden anderen dargestellt werden, also z.B. $V = V(p, T) = RT/p$, $T = T(V, T) = RT/V$ etc.
Zeigen Sie $\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$.

(b) Zwei Teilchen a und b sind durch eine Feder verbunden. Ihre potentielle Energie sei gegeben durch $U = \frac{k}{2}(\vec{r}_a - \vec{r}_b)^2$. Die Trajektorien $\vec{r}_a(t)$ und $\vec{r}_b(t)$ der beiden Teilchen seien bekannt. Berechnen Sie die Ableitung $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ von $U(\vec{r}_a(t), \vec{r}_b(t))$ nach der Zeit. Eine solche Ableitung nennt man auch "totale Ableitung".
Hinweis: Berechnen Sie zuerst das totale Differential $\mathrm{d}U$. Berücksichtigen Sie, dass es sechs freie Variablen gibt (je 3 für $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$).

Aufgabe A16) Konvergenzradius (4 Punkte)

(a) $f(x) = \sum \frac{1}{2^n n} x^n$

(b) $f(x) = \sum n^3 x^n$

(c) $f(x) = \sum \sqrt{1 + 9^n} x^n$

(d) $f(x) = \sum n^n x^n$

Aufgabe A17) Taylor-Reihe (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \exp(-x^2)$ um $x = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \exp(x)$ um $x = 10$.

(c) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \tan(x)$ um $x = 0$ bis zur vierten Ordnung.

(d) Bestimmen Sie die Taylorreihe um $(1, 1)$ von $f(x, y) = \exp(x+xy)$ bis zur quadratischen Ordnung (das heißt, die Terme höchster Ordnung sind proportional zu $(x-1)^2, (y-1)^2$ und $(x - 1)(y - 1)$).