Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 6

Abgabe bis spätestens Freitag, 29. November 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an. Einige von Ihnen vergessen die Namen immer noch. In dem Fall können wir die Blätter leider nicht werten.

Leseauftrag bis zum 28. November: Skript Kapitel 3.3.4 und Kapitel 2.4.4 (Determinanten)

Aufgaben zum Leseauftrag (werden am 27.11. besprochen.
Sind trotzdem abzugeben zusammen mit den anderen Aufgaben)

Aufgabe L16: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie

- $\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$
- $P\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x$
- $\int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x}}$

Aufgabe L17: Gamma-Funktion

Zeigen Sie über Induktion nach n: $\int_0^\infty \mathrm{d}x \, x^n \, \exp(-x) = n!$

Aufgabe L18: Determinanten

- Berechnen Sie die Determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
- Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 3 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}$ für beliebige a_{ij}.
- Zeigen Sie: Für das Inverse A^{-1} einer Matrix A gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Reguläre Aufgaben

Aufgabe A18) Taylor-Reihe (4 Punkte)

Bestimmen Sie für $f(x) = x \exp(x)$ die ersten drei Terme der Taylorreihe um $x = 0$ von

(a) $f(x)$

(b) $1/(1 + f(x))$

(c) $f(f(x))$

(d) der Umkehrfunktion, d.h. der Funktion $g(x)$, für die gilt: $g(f(x)) = x$.
(Tipp: Potenzreihenansatz für $g(x)$, einsetzen, und Koeffizientenvergleich).

Aufgabe A19) Taylor-Entwicklung und Grenzwerte (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2 + \cos(x) - 1}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (1-x)^{1/3}}{1 - (1-x)^{1/2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{x^x - 1}{x \ln(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^{\sin(x)}$

Aufgabe A20) Taylor-Reihe mit Differentialoperator (2 Punkte)

Zeigen Sie: $\left. e^{a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f(x) \right|_{x=x_0} = f(x_0 + a)$

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass die Exponentialfunktion über ihre Potenzreihe definiert wird: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

Aufgabe A21) Integrale (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale (bitte mit Rechenweg).

(a) $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, x \sinh(2x/b)$

(b) $\int_0^1 \mathrm{d}x/(1 + x + x^2 + x^3)$
(Tipp: Partialbruchzerlegung. Es gilt $(1 + x + x^2 + x^3)(1 - x) = (1 - x^4)$)

(c) $\int \mathrm{d}x \arcsin(x)$ (Tipp: Substitution $x = \sin(\phi)$)

Aufgabe A22) Gewicht der Atmosphäre (4 Punkte)

Nach der barometrische Höhenformel folgt die Dichte der Luft $\rho(h)$ bei der Höhe h über dem Meeresboden der Gleichung

$$\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_s)$$

mit $\rho_0 = 1.2041$ kg/m^3 und der Skalenhöhe $h_s \approx 8.4$ km.

(a) Verwenden Sie die barometrische Höhenformel, um das Gewicht der Atmosphäre abzuschätzen. Benutzen Sie dazu Kugelkoordinaten. Der Radius der Erde ist $R = 6.378$ km.

(b) Die Erde habe eine mittlere Dichte von $\rho_e = 5.515$ g/cm^3. Berechnen Sie den Anteil der Atmosphäre an der Gesamtmasse der Erde.