Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"
Blatt 8

Abgabe bis spätestens Freitag, 13. Dezember 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A28) Inhomogene lineare Differentialgleichung (4 Punkte)

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:
$y'(x) = -y(x)/x + \exp(-x^2)$ für $x \geq 1$ mit $y(1) = 0$.

Aufgabe A29) Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor (6 Punkte)

Zur Erinnerung: Wir haben in der Vorlesung folgendes besprochen (Skript Abschnitt 4.1.2):

(i) Eine Differentialgleichung der Form $a(x,y) + b(x,y)\,y'(x) = 0$ heisst exakt, falls es eine Funktion $F(x,y)$ gibt, so dass $a(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $b(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$.
In diesem Fall gilt dann $F(x, y(x)) = \text{const.}$ für jede Lösung der Differentialgleichung.

(ii) Für exakte Differentialgleichungen mit stetig differenzierbaren Koeffizienten $a(x,y)$, $b(x,y)$, muss die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ gelten

(iii) Manche Differentialgleichungen, die nicht exakt sind, kann man durch Anmultiplizieren eines sogenannten **integrierenden Faktors** $\mu(x,y)$ exakt machen. (d.h. $a + by' = 0$ ist nicht exakt, aber $\mu a + \mu b y'$ ist exakt).

Lösen Sie darauf basierend die folgenden Aufgaben:

(a) Benutzen Sie die Aussage (i) zur Lösung der Differentialgleichung $y' = -\frac{y^2+3x^2}{2xy}$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

(b) Zeigen Sie:
- Eine Funktion $\mu(x)$ ist ein integrierender Faktor, wenn sie die Differentialgleichung $\mu'(x)b(x,y) + \mu(x)(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}) = 0$ erfüllt.
- Jede Funktion $\mu(y)$ ist ein integrierender Faktor, wenn sie die Differentialgleichung $\mu'(y)a(x,y) + \mu(x)(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}) = 0$ erfüllt.

(c) Finden Sie mit Hilfe von (b) einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung $y' + ky - x = 0$ (mit $k \neq 0$) und lösen Sie diese für die Anfangsbedingung $y(1) = 0$.

Aufgabe A30) Lineare DGL zweiter Ordnung (4 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = f(x)$

(a) Geben Sie die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung an (der Gleichung mit $f(x) = 0$. und lösen Sie sie für $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(c) Lösen Sie die inhomogene Gleichung für den Fall $f(x) = \exp(-x)$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Hinweis: Wenn Sie sich nicht alles noch einmal selbst herleiten wollen, dann schauen Sie in den Leseauftrag von Blatt 7. Die dort angegebenen Formeln dürfen Sie benutzen.

Aufgabe A31) Bakterienwachstum (6 Punkte)

In einer Petrischale befinden sich zur Zeit $t = 0$ zehn Bakterien. In einer optimalen Nährlösung teilen sie sich jede Stunde. Die Zahl der Bakterien zur Zeit t sei mit $N(t)$ bezeichnet.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für $N(t)$ auf, die das unbegrenzte Wachstum beschreibt, und lösen Sie diese für die vorgegebene Anfangsbedingung.

(b) Bei Nahrungsmangel verlangsamt sich das Wachstum und $N(t)$ sättigt bei einem Wert N_0. Dieser Effekt kann in der Differentialgleichung durch einen Zusatzterm $-\gamma N^2(t)$ berücksichtigt werden.
Stellen Sie die neue Differentialgleichung auf. Welche physikalische Einheit hat γ ? Bestimmen Sie γ für $N_0 = 1000$. Das können Sie tun, ohne die Differentialgleichung explizit zu lösen.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus (b) für die vorgegebenen Anfangsbedingungen. Falls Sie (b) nicht beantworten konnten, dann lösen Sie stattdessen die Differentialgleichung $n'(t) = n(t) - \frac{1}{10}n(t)^2$ mit der Anfangsbedingung $n(0) = 1$. Skizzieren Sie das Ergebnis.

Zusatzaufgabe: Differentialgleichung (4 Bonuspunkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$y'(x) = y/x + \exp(y/x)$