Institut für Physik WS 2019

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 9

Abgabe bis spätestens Freitag, 20. Dezember 2019, *vor* 14:15 Uhr per Einwurf in den roten Kasten Nr. 24 im Erdgeschoss des Physik-Gebäudes (Staudingerweg 7).

Bitte geben Sie auf jedem Abgabeblatt Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Aufgaben

Aufgabe A32) Kurvenintegral (4 Punkte)

Ein Teilchen folge der spiralförmigen Bahn $\vec{r}(t) = \binom{t\cos(t)}{t\sin(t)}$.

(a) Berechnen Sie die Länge der Bahnkurve für das Intervall $t \in [0:10]$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ für $t \in [0:10]$ und $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$.

Aufgabe A33) Oberflächenintegral (4 Punkte)

Berechnen Sie das Oberflächenintegral eines Paraboloiden, der durch $z = x^2+y^2$ beschrieben wird und bei $x^2+y^2 = 1$ abgeschnitten wird.

(Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten)

Aufgabe A34) Rotation und Gradient (4 Punkte)

Zeigen Sie für zweimal differenzierbare Skalarfelder $\Phi(\vec{r})$ und Vektorfelder $\vec{V}(\vec{r})$:

(a) rot grad $\Phi = 0$ und div rot $\vec{V} = 0$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta\vec{V}$
(Hinweis: Am schnellsten geht es mit dem Epsilon-Tensor!)

Aufgabe A35) Nabla- und Laplace-Operator (4 Punkte)

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{V} = (y^2z^2, x^2z^2, x^2y^2)$. Berechnen Sie $\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \vec{V}))$.
Hinweis: Sie dürfen die Formel von A34 (b) verwenden, um Rechenschritte zu sparen.

(b) Berechnen Sei $\Delta \ln(|\vec{r}|)$ in zwei und drei Raumdimensionen für $\vec{r} \neq 0$.

Aufgabe A36) Zentralfeld (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Gegeben sei ein Vektorfeld der Form $\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r}\,\Phi(\vec{r})$, wobei $\Phi(\vec{r})$ ein Skalarfeld ist und $r = |\vec{r}|$ der Betrag von $\vec{r}$.

(a) Zeigen Sie $\nabla \times \vec{V} = -\frac{\vec{r}}{r} \times \nabla\Phi(\vec{r})$

(b) Zeigen Sie: Falls $\Phi(\vec{r})$ nur vom Betrag r des Orts abhängt, ist $\nabla \times \vec{V} = 0$.

(c) (4 Bonuspunkte)
Zeigen Sie umgekehrt: Falls $\nabla \times \vec{V} = 0$, hängt $\Phi(\vec{r})$ nur vom Betrag r ab.