Schwingungsgleichung

Im Folgenden werden wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung des eindimensionalen gedämpften und getriebenen Oszillators herleiten. Die Differentialgleichung hat die Form

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{1}$$

wobei $\eta \geq 0$ und $\omega_0^2 \geq 0$. Hier ist η die Reibung, ω_0 die intrinsische Frequenz des Oszillators, und $f(t)$ proportional zur zeitabhängigen Antriebskraft. Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen die Lösung $x(t)$ für beliebige Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ und beliebige Antriebsfunktion $f(t)$.

Im Zuge der Herleitung werden wir mehrfach die Lösungen von linearen Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten benutzen. Die entsprechenden Herleitungen finden sich im Anhang.

1 Homogene Schwingungsgleichung

Im ersten Schritt lösen wir die Gleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator ohne Antrieb,

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2}$$

Da es eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetig variierenden (sogar konstanten) Koeffizienten ist, gibt es zwei linear unabhängige Lösungen.

1.1 Lösungsweg

Formal können wir die Differentialgleichung umschreiben als

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) x(t) = 0$$

und dann folgendermaßen faktorisieren:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_2\right) x(t) = 0. \tag{3}$$

Hier sind $\lambda_{1,2}$ die (evtl. komplexen) Nullstellen des Polynoms $P(\lambda) = \lambda^2 + \eta\lambda + \omega_0^2$, d.h.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\Delta} \quad \text{mit} \quad \Delta = \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega_0^2. \tag{4}$$

Falls $\Delta \neq 0$, kann man sofort die beiden unabhängigen Lösungen $x_{1,2}(t)$ von (2) bestimmen, indem man die Differentialgleichungen $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_i\right) x_i(t) = 0$ löst. Laut Gl. (A.3) im Anhang erhält man

$$x_i(t) = x_i^{(0)} \exp(\lambda_i t). \tag{5}$$

Der Fall $\Delta = 0$ muss gesondert betrachtet werden. Dann fallen die beiden Nullstellen von $P(\lambda)$ aufeinander, $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, und die Gleichung $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_i)\, x_i(t) = 0$ liefert nur eine unabhängige Lösung

$$x_1(t) = \text{const.}\ \exp(\lambda t). \tag{6}$$

Die zweite Lösung kann man ermitteln, in dem man die Differentialgleichung

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda)\, x_2(t) = x_1(t) = \exp(\lambda t)\,\text{const.} \tag{7}$$

löst – denn falls $x_2(t)$ diese Gleichung erfüllt, folgt automatisch

$$(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda)^2 x_2(t) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda)\, x_1(t) = 0.$$

Gleichung (7) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung findet sich im Anhang in Gl. (A.5). Mit $a_0 = \lambda$ und $b(t) = \text{const.}\ \exp(\lambda t)$ erhält man

$$x_2(t) = \text{const.}\, t\ \exp(\lambda t). \tag{8}$$

Die zwei unabhängigen Lösungen in diesem Fall sind also

$$x_1(t) = x_1^{(0)}\ \exp(\lambda t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = x_2^{(0)}\ t\ \exp(\lambda t) \tag{9}$$

1.2 Diskussion der Lösung

Konkret treten je nach Wert von $\Delta = (\eta/2)^2 - \omega_0^2$ drei qualitativ verschiedene Fälle auf.

Fall $\Delta < 0$: In diesem Fall sind die λ_i komplex, mit $\lambda_2 = \lambda_1^*$, und die Lösung hat die Form

$$x_{1,2} = \exp\left(-\frac{\eta}{2}t\right)\ \exp\left(\pm i\sqrt{|\Delta|}\, t\right), \tag{10}$$

d.h. $x_2(t) = x_1^*(t)$. Physikalische (reelle) Lösungen erhält man durch geeignete Kombination

$$x(t) = C\, x_1(t) + C^* x_2(t) = |C| \exp\left(-\frac{\eta}{2}\, t\right)\ \cos\left(\sqrt{|\Delta|}\, t + \phi\right). \tag{11}$$

Die Integrationskonstanten $|C|$ und ϕ werden so gewählt, dass die vorgebenen Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Im Fall $\Delta < 0$ ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung also eine gedämpfte Schwingung. Es gibt zwei charakteristische Zeitskalen, die Schwingungsdauer $T = 2\pi/|\Delta|$ und die Abklingzeit $\tau = 2/\eta$. Diesen Fall nennt man den **Schwingfall**.

Fall $\Delta = 0$: Hier fallen die beiden Werte von λ_i aufeinander, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Die Lösung hat die Form

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\eta}{2}\,t\right)\,(C_1 + C_2\,t)\,, \tag{12}$$

wobei C_1, C_2 wieder frei wählbare Integrationskonstanten sind. Die Funktion $x(t)$ fällt also exponentiell ab, und es gibt nur eine charakteristische Abklingzeit, $\tau = 2/\eta$. Diesen Fall nennt man **aperiodischen Grenzfall**.

Ein wichtiges Beispiel für eine "Schwingungsgleichung" (1) im aperiodischen Grenzfall ist die **kräftefreie Bewegung**, d.h., der Fall $\eta = \omega_0^2 = 0$. Dann erhält man einfach

$$x(t) = C_1 + C_2 t. \tag{13}$$

Fall $\Delta > 0$: In diesem Fall sind die beiden Werte von λ_i verschieden und reell. Die Lösung hat die Form

$$x(t) = C_1 \exp\left(-(\frac{\eta}{2} - \sqrt{\Delta})t\right) + C_2 \exp\left(-(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\Delta})t\right), \tag{14}$$

mit den Integrationskonstanten C_1, C_2. Die Funktion $x(t)$ fällt exponentiell ab, und es gibt zwei charakteristische Abklingzeiten, eine schnelle $\tau_1 = 1\Big/(\eta/2 - \sqrt{\Delta})$, und eine langsame $\tau_2 = 1\Big/(\eta/2 + \sqrt{\Delta})$. Diesen Fall nennt man den **Kriechfall**.

Ein wichtiges Beispiel für eine "Schwingungsgleichung" (1) im Kriechfall ist die **Bewegung eines freien Teilchens mit Reibung**, d.h., der Fall $\omega_0^2 = 0$. Dann ist $\sqrt{\Delta} = \eta/2$ und man erhält

$$x(t) = C_1 + C_2 \exp(-\eta t). \tag{15}$$

2 Lösung der inhomogenen Gleichung

Wir lösen die vollständige Gleichung (1). Dazu müssen wir zuerst eine einzige ("partikuläre") Lösung $x_I(t)$ dieser Gleichung finden. Diese können wir dann mit der homogenen Lösung aus Abschnitt 1 kombinieren, um die allgemeine Lösung zu konstruieren. Diese hängt dann von zwei Integrationskonstanten ab, die wir wieder so wählen können, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

2.1 Ermittlung einer partikulären Lösung

Wir wenden die Methode der Variation der Konstanten an und machen den Ansatz

$$x_I(t) = C(t)\,\exp(\lambda_1\,t) \quad \text{mit} \quad \lambda_1 = -\frac{\eta}{2} + \sqrt{\Delta} \tag{16}$$

(siehe Abschnitt 1). Nach Einsetzen diese Ansatzes in Gleichung (1) erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{C} + 2\sqrt{\Delta}\dot{C} = f(t)\,\exp(-\lambda_1\,t)\,.$$

Dieses ist eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $\dot{C}$. Zur Lösung verwenden wir die Formel (A.5) aus dem Anhang mit $b(t) = f(t)\,\exp(-\lambda_1 t)$ und $a_0 = -2\sqrt{\Delta}$ Wir erhalten

$$\dot{C} = \exp\left(-2\sqrt{\Delta}\,t\right)\int_0^t \mathrm{d}t'\, f(t')\,\exp\left((\frac{\eta}{2}+\sqrt{\Delta})t'\right).$$

Die Funktion $C(t)$ ergibt sich durch Integration von $\dot{C}$. Nach Einsetzen in (15) erhalten wir das Endergebnis für die partikuläre Lösung:

$$x_I(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}t+\sqrt{\Delta}t}\int_0^t \mathrm{d}t'\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\Delta}t'}\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\,f(t'')\,\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}t''+\sqrt{\Delta}t''}. \tag{17}$$

Diese Gleichung gilt unabhängig vom Wert von Δ sowohl für den Schwingfall als auch für den aperiodischen Grenzfall und den Kriechfall. Sie erfüllt per Konstruktion $x_I(0) = 0$ und $\dot{x}_I(0) = 0$.

2.2 Allgemeine Lösung

Lösungen mit beliebigen Randbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ erhalten wir dadurch, dass wir die partikuläre Lösung (16) mit der homogenen Lösung aus Abschnitt 1 kombinieren und die Integrationskonstanten so wählen, dass die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erüllt sind.

Im Schwingfall ergibt sich

$$x(t) = x_I(t) + |C|\exp\left(-\frac{\eta}{2}\,t\right)\,\cos\left(\sqrt{|\Delta|}\,t+\phi\right) \tag{18}$$

mit $C = \sqrt{x_0^2 + (2v_0+x_0\eta)^2)/(4\omega_0^2-\eta^2)}$ und $\phi = -\arctan\left((2v_0+x_0\eta)/x_0\sqrt{4\omega_0^2-\eta^2}\right)$.
Im Kriechfall erhält man

$$x(t) = x_I(t) + C_1\exp\left(-(\frac{\eta}{2}-\sqrt{\Delta})t\right) + C_2\exp\left(-(\frac{\eta}{2}+\sqrt{\Delta})t\right), \tag{19}$$

mit $C_{1,2} = \frac{x_0}{2} \pm (v_0 + \frac{x_0\eta}{2})/\sqrt{\eta^2-4\omega_0^2}$ und im aperiodischen Grenzfall

$$x(t) = x_I(t) + \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}t}\,(C_1 + C_2\,t) \tag{20}$$

mit $C_1 = x_0$ und $C_2 = v_0 + \frac{\eta}{2}x_0$.

2.3 Diskussion: periodisch getriebene Schwingung

Von besonderem Interesse ist der Fall $f(t) = A\cos(\Omega t)$. In diesem Fall ist es bequemer, $f(t)$ zunächst zu zerlegen in $f(t) = f_+(t) + f_-(t)$ mit $f_\pm(t) = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{\pm i\Omega t}$, und zunächst die partikulären Gleichungen $x_{I,\pm}(t)$ für $f_\pm(t)$ zu ermitteln. Die gesamte partikuläre Gleichung ist dann die Summe $x_I(t) = x_{I,+}(t) + x_{I,-}(t)$.
Einsetzen in Gl. (16) liefert

$$x_{I,\pm}(t) = \frac{A}{4\Delta-(\eta\pm 2i\Omega)^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}t}\left(2\cosh(\sqrt{\Delta}\,t) + (\eta+2i\Omega)\frac{\sinh(\sqrt{\Delta}\,t)}{\sqrt{\Delta}}\right) - 2\mathrm{e}^{\pm it\Omega}\right]. \tag{21}$$

Für große Zeiten, nach einem initialen Einschwingen, verschwindet der erste Term und man erhält

$$x_{I,\pm}(t) \to -\frac{2A}{4\Delta - (\eta \pm 2i\Omega)^2} \mathrm{e}^{\pm it\Omega} \tag{22}$$

Wir kombinieren $x_I(t) = x_{I,+}(t) + x_{I,-}(t)$ und verwenden $\Delta = (\eta/2)^2 - \omega_0^2$. Damit erhalten wir

$$x_I(t) = \tilde{A}\cos(\Omega t - \phi) \quad \text{mit} \quad \tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega\eta)^2}} \tag{23}$$

mit $\phi = \arctan\big((\Omega\eta)/(\omega_0^2 - \Omega^2)\big)$.

Dieses Ergebnis ist auch allgemein, und unabhängig davon, ob ein Schwingfall oder ein Kriechfall vorliegt. Die Effekte sind allerdings im Kriechfall am prominentesten: Bei $\Omega = \omega_0$ tritt **Resonanz** auf und die Amplitude $\tilde{A}$ der erzwungenen Schwingung wird maximal. Gleichzeitig springt die Phase ϕ um π.

2.4 Diskussion: Freie Teilchen im Schwerefeld

Im Schwerefeld ist die Antriebskraft konstant, $f(t) = -g$. Für freie Teilchen ist $\omega_0 = 0$, d.h. $\sqrt{\Delta} = \eta/2$. Einsetzen in Gl. (16) liefert dann

$$x_I(t) = \frac{g}{\eta^2}(1 - \mathrm{e}^{-\eta t}) - \frac{g}{\eta}\, t \tag{24}$$

für Trajektorien mit Anfangsbedingungen $x_I(0) = \dot{x}_I(0) = 0$. Für allgemeine Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ erhält man

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{\eta} t + \frac{1}{\eta}(v_0 + \frac{g}{\eta})(1 - \mathrm{e}^{-\eta t}). \tag{25}$$

A Anhang: Inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Wir rekapitulieren die allgemeine Lösung von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Im allgemeinen Fall hat eine solche Gleichung die Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(t)\, y + b(t). \tag{A.1}$$

Wir nehmen an, dass wir Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ haben.

Für $b(t) \equiv 0$ (homogener Fall) löst man einfach

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(t) y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t\, a(t).$$

Integrieren auf beiden Seiten liefert

$$\ln(|y/y_0|) = \int_0^t \mathrm{d}t' a(t') \quad \text{und damit} \quad y(t) = y_0 \exp\Big(\int_0^t \mathrm{d}t'\, a(t')\Big). \tag{A.2}$$

Ist konkret $a(t) \equiv a_0$ eine Konstante, dann folgt

$$y(t) = y_0 \, \exp(a_0 \, t) \tag{A.3}$$

Im inhomogenen Fall $b(t) \neq 0$ finden wir eine partikuläre Lösung $y_I(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz

$$y_I(t) = \alpha(t) \, \exp\left(\int_0^t \mathrm{d}t' \, a(t') \right).$$

und setzen ihn in die Differentialgleichung (A.1) ein. Damit erhalten wir eine Differentialgleichung für $\alpha(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = b(t) \, \exp\left(- \int_0^t \mathrm{d}t' \, a(t') \right),$$

die wir durch Integrieren einfach lösen können. Das Ergebnis ist

$$y_I(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \, b(t') \, \mathrm{e}^{\int_{t'}^t \mathrm{d}t'' \, a(t'')}. \tag{A.4}$$

Für $a(t) \equiv a_0$ folgt

$$y_I(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \, b(t') \, \mathrm{e}^{a_0 \, (t-t')}. \tag{A.5}$$

Für diese partikuläre Lösung gilt $y_I(0) = 0$, die Randbedingung stimmt also noch nicht. Um eine Lösung mit der korrekten Randbedingung zu generieren, kombinieren wir die partikuläre Lösung mit der homogenen Lösung und erhalten

$$y = \int_0^t \mathrm{d}t' \, b(t') \, \mathrm{e}^{\int_{t'}^t \mathrm{d}t'' \, a(t'')} + y_0 \exp\left(\int_0^t \mathrm{d}t' \, a(t') \right). \tag{A.6}$$

bzw., im Falle $a(t) = a_0$,

$$y_I(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \, b(t') \, \mathrm{e}^{a_0 \, (t-t')} + y_0 \, \exp(a_0 \, t). \tag{A.7}$$