Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 1

Erläuterungen zu den Zulassungskriterien:

Um die Klausurzulassung zu erhalten, müssen Sie mindestens 50 % der Punkte erreichen. Auf jedes Blatt gibt es 30 Punkte.

Quicky:

1) Erläutern Sie ein Experiment, daß auf den Teilchencharakter von Licht hindeutet.
2) Erläutern Sie ein Experiment, daß auf den Wellencharakter von Materie hindeutet.
3) Was ist ein Photon? Welche Energie und welchen Impuls hat ein Photon?
4) Welche Bedeutung hat die Plancksche Konstante und wie groß ist sie?
5) Wie lauten die Einstein-de Broglie Beziehungen für Materie?
6) Was besagt das Superpositionsprinzip?
7) Wie lautet die Gleichung für eine ebene de Broglie-Welle?
8) Wie lautet die allgemeine Gleichung für ein Wellenpaket?
9) Wie werden Wellenpakete normiert? Warum?
10) Wie werden ebene Wellen normiert?
11) Was ist der Unterschied zwischen der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes?
12) Wie entwickelt sich ein Wellenpaket zeitlich?
13) Erklären Sie die Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung von Materiewellen.

Aufgaben (abzugeben bis 25. Oktober abends) Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 1) Diracsche Delta-Funktion (je Teilaufgabe 2 Punkte, insgesamt 6 Punkte)

Beweisen Sie

(a) $x\delta(x) = 0$

(b) $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(c) $\int \mathrm{d}x\, \delta'(x-a)f(x) = -f'(a)$ für alle "vernünftigen" Funktionen $f(x)$.

Aufgabe 2) **Fourier-Transformation** (14 Punkte)

(a) Zeigen Sie: (2 Punkte)
Die Fouriertransformierte von $h(x) = f(a\,x)$ ist $\tilde{h}(k) = \frac{1}{|a|}\tilde{f}(\frac{k}{a})$

(b) Zeigen Sie: (2 Punkte)

– Die Fouriertransformierte von $h(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ ist $\tilde{h}(k) = (ik)^n \tilde{f}(k)$
– Die Fouriertransformierte von $h(x) = x^n f(x)$ ist $\tilde{h}(k) = i^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}k^n} \tilde{f}(k)$.

(c) Beweisen Sie den Faltungssatz: (2 Punkte)

Die Fouriertransformierte von $h(x) = \int dy\, f(y)\, g(x-y)$ ist $\tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$.

(d) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten folgender eindimensionaler Funktionen:

(i) $f(x) = \delta'(bx + a)$ (2 Punkte)
(ii) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/\Delta x^2}$ (2 Punkte)
(iii) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$ (2 Punkte)
(iv) $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$ (ohne Rechnung mit Hilfe von (iii)) (2 Punkte)

Aufgabe 3) **Gaußsches Wellenpaket** (10 Punkte)

Betrachten Sie ein eindimensionales Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}\, \tilde{\psi}_0(p)$$

(wobei $E = p^2/2m$) mit der Impulsverteilung

$$\tilde{\psi}_0(p) = \mathcal{N}\mathrm{e}^{-p^2/2\hbar^2 a^2}.$$

(a) Wie muß $\mathcal{N}$ gewählt werden, damit $\int dp\, |\tilde{\psi}_0(p)|^2 = 1$ gilt? (2 Punkte)

(b) Welchen Wert hat dann $\int dx\, |\psi(x,t)|^2$? (2 Punkte)
Finden Sie das Ergebnis *ohne zu rechnen* mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung.

(c) Berechnen Sie $\psi(x,t)$. (4 Punkte)
Sie erhalten

$$\psi(x,t) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{\hbar b(t)}} e^{-x^2/2\hbar^2 b(t)^2} \qquad \text{mit} \quad b(t)^2 = \frac{1}{\hbar^2 a^2} + \frac{it}{\hbar m}.$$

(d) Diskutieren Sie anhand des zeitlichen Verhalten von $|\psi(x,t)|^2$, wie das Wellenpaket "zerfließt". Wenn Sie die Teilaufgabe (c) nicht lösen konnten, dann benutzen Sie trotzdem das angegebene Ergebnis. (2 Punkte)