

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 10

Quicky:

94. Was versteht man unter dem Generator einer kontinuierlichen Symmetriegruppe?
95. Welche physikalische Bedeutung haben die Generatoren der Translationsgruppe und der Rotationsgruppe?
96. Wie kommutieren die Generatoren der Translationsgruppe untereinander? Wie die Generatoren der Rotationsgruppe? Warum ist die Antwort verschieden?
97. In welchem konkreten Fall sind die Generatoren der Rotationsgruppe gerade die Komponenten des Bahndrehimpulses?
98. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen in der Quantenmechanik.
99. Nennen und erklären Sie speziell die Erhaltungsgrößen, die aus der Homogenität der Zeit, der Homogenität des Raums, und der Isotropie des Raums folgen.
100. Wann gelten Teilchen als ununterscheidbar?
101. Welche Forderung müssen die Observablen in einem System ununterscheidbarer Teilchen erfüllen?
102. Welche Eigenschaft hat nach dem Symmetrisierungspostulat der Zustandsraum eines Systems identischer Teilchen?
103. Worin besteht der Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen?
104. Was versteht man unter einer Slater-Determinante und wozu kann man sie brauchen?
105. Was besagt das Spin-Statistik Theorem?

Aufgaben (abzugeben bis 11. Januar vor 8:15 Uhr)

Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 27) Harmonischer Oszillator III: Kanonisches Ensemble (10 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Bei fester vorgegebener Temperatur ist der statistische Operator gegeben durch $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$ (die Boltzmannverteilung) mit $\beta = 1/k_B T$ (wobei k_B die Boltzmannkonstante ist). Hier ist Z eine Normierungskonstante, die durch $\text{Sp}(\rho) = 1$ festgelegt wird.

- (a) Berechnen Sie die Normierungskonstante Z . Sie erhalten $Z = e^{-\beta \hbar \omega / 2} / (1 - e^{-\beta \hbar \omega})$.
- (b) Zeigen Sie, dass ρ stationär ist. (Hinweis: von-Neumann Gleichung!)
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie. Was passiert im Grenzwert $T \rightarrow 0$, was im Grenzwert $T \rightarrow \infty$? Interpretieren Sie das Ergebnis.
- (d) Berechnen Sie die Erwartungswerte von x und p .

Aufgabe 29) Harmonischer Oszillator IV: Kohärente Zustände (10 Punkte)

Kohärente Zustände sind reine Zustände des harmonischen Oszillators die am ehesten dem klassischen Bild entsprechen: Ein Wellenpaket oszilliert ohne zu zerlaufen zwischen den zwei klassischen Wendepunkten hin und her. Die zugehörigen Zustandsvektoren haben die Form

$$|\alpha\rangle \equiv C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = C \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$$

definiert. Dabei ist α eine komplexe Zahl und $|n\rangle$ sind die Eigenzustände des harmonischen Oszillators.

- (a) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ normiert ist für $C = \exp(-|\alpha|^2/2)$ und
- (b) Zeigen Sie $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N \rangle = \langle \alpha | N | \alpha \rangle$ des Quantenzahloperators $N = a^\dagger a$ und die Unschärfe (Varianz) $(\Delta N)^2$.
- (d) Berechnen Sie die Orts- und Impulserwartungswerte des kohärenten Zustands.
- (e) Zeigen Sie, dass die Ortsunschärfe Δx zeitlich konstant ist.

Hinweis: Argumentieren Sie zunächst ohne weitere Rechnung, dass die für freie Wellenpakete in Aufgabe 8a) bewiesenen Relationen $\frac{d}{dt}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle p \rangle$ und $\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = \frac{1}{m}\langle xp + px \rangle$ auch in Gegenwart von Potentialen $V(x)$ gelten müssen.

Aufgabe 30) Ununterscheidbare Teilchen I (10 Punkte)

Betrachten Sie ein reines System von zwei ununterscheidbaren Teilchen, die die beiden ersten Zustände ψ_0, ψ_1 des harmonischen Oszillators einnehmen.

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad \psi_1(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right).$$

(Falls die Teilchen Spin haben, soll der Spinzustand identisch sein.)

- (a) Wie lautet die Zweiteilchenwellenfunktion $\Psi(x_1, x_2)$ für (i) Bosonen, (ii) Fermionen?
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, eines der beiden Teilchen links vom Ursprung $x = 0$ und das andere rechts davon zu finden, jeweils für Bosonen und Fermionen. In welchem der beiden Fälle ist die Wahrscheinlichkeit größer?
- (c) Berechnen Sie für Bosonen bzw. Fermionen die Wahrscheinlichkeit, beide Teilchen auf der gleichen Seite des Ursprungs zu finden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teilaufgabe (b).

Bonusaufgabe) Harmonischer Oszillator mit reflektierender Wand (10 Bonuspunkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen der Masse m in dem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & : x > 0 \\ \infty & : x < 0 \end{cases}$$

Wie hoch ist die Grundzustandsenergie für Bosonen und Fermionen?

(Für diese Aufgabe muss nicht gerechnet werden! Aber Sie sollten sich z.B. auf Wikipedia die Form der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators anschauen.)