Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 11

Quicky:

106. Wodurch ist ein Drehimpulsoperator $\vec{J}$ definiert?
107. Welche Bedeutung haben die Drehimpulsquantenzahlen j und m? Welche Werte können sie annehmen?
108. Was versteht man unter einem Spin?
109. Erklären Sie den Stern-Gerlach Versuch.
110. Was ist die Spinorschreibweise? Welche Form hat der Spinoperator zum Spin 1/2 in der Spinorschreibweise?
111. Welche Form haben die Pauli-Matrizen?
112. Wie lautet die Pauli-Gleichung?

Aufgaben (abzugeben bis 18. Januar vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 31) Ununterscheidbare Teilchen II (10 Punkte)

Betrachten Sie drei identische Spin-1 Teilchen. Die Eigenzustandsvektoren des Spins eines einzelnen Teilchens werden mit $|+\rangle$, $|0\rangle$, $|-\rangle$ bezeichnet.

(a) Betrachten Sie Zustandsvektoren im Hilbertraum, bei denen der Bahnahnteil für alle drei Teilchen identisch ist. Begründen Sie: Der Spinanteil muss dann vollständig symmetrisch sein.

(b) Konstruieren Sie einen vollständig symmetrischen Zustandsvektor für den Gesamtspin aus der Kombination von Einzelspin-Zustandsvektoren, die gegeben sind durch:

(i) drei Einzelspins $|+\rangle$,

(i) zwei Einzelspins $|+\rangle$ und einem Einzelspin $|0\rangle$,

(i) einem Einzelspin $|+\rangle$, einem Einzelspin $|0\rangle$, und einem Einzelspin $|-\rangle$.

(c) Für welche der drei Fälle aus (b) ist es möglich, einen völlig antisymmetrischen Zustandsvektor zu konstruieren? Geben Sie ihn gegebenenfalls an.

Welche Bedingung muss man dann an den Bahnanteil stellen?

Aufgabe 32) Pauli-Matrizen (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Pauli-Matrizen σ_i $((\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z))$:

(a) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\, \mathbf{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

(b) $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\, \mathbf{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ für komplexe Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (a). Das Skalarprodukt von $\vec{\sigma}$ mit einem Vektor $\vec{v}$ ist wie üblich definiert als die Summe $\sum_k \sigma_k v_k$.

(c) Für $R(\vec{\phi}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi} \cdot \vec{S})$ und $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ gilt: $R(\vec{\phi}) = \cos(\frac{\phi}{2})\mathbf{1} - i(\vec{\sigma}\frac{\vec{\phi}}{\phi})\, \sin(\frac{\phi}{2})$.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (b).

Aufgabe 33) Statistischer Operator eines Spinsystems (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie erst allgemein: Für hermitesche 2×2 Matrizen A gilt:
$A = \frac{1}{2}\, \mathrm{Sp}(A)\, \mathbf{1} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\, \mathrm{Sp}(\vec{\sigma} A)$.

(b) Betrachten Sie nun ein System eines Spin-1/2-Teilchens. Die Spin-Erwartungswerte $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, und $\langle S_z \rangle$ seien bekannt. Konstruieren Sie daraus den statistischen Operator im Spin-Zustandsraum. (In Spinorschreibweise erhalten Sie eine 2×2 Matrix.)

Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (a).

(c) Welche Bedingung müssen $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, und $\langle S_z \rangle$ erfüllen, wenn das System ein reines System $\rho = |\chi\rangle\langle\chi|$ ist?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Für reine Systeme gilt $\det(\rho)$=0.