Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 12

Quicky:

113. Wie verhält sich der Erwartungswert $\langle \vec{S} \rangle$ eines Spins unter Drehung?
114. Wie verhält sich ein Spinzustandsvektor unter Drehung, z.B. unter einer Drehung um 180 Grad? 360 Grad?
115. Was versteht man unter "Addition von Drehimpulsen"? Wozu braucht man sie?
116. Was sind Clebsch-Gordan-Koeffizienten?
117. Welche Werte kann die Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses in einem System aus zwei gekoppelten Drehimpulsen mit Quantenzahlen j_1 und j_2 annehmen? Wie kann man die Antwort anschaulich interpretieren?
118. Wie sehen die Eigenzustände zum Gesamtspin in einem System zweier gekoppelter Spin 1/2 aus?
119. Erklären Sie die Begriffe Singulett und Triplett und diskutieren Sie die Symmetrieeigenschaften.

Aufgaben (abzugeben bis 25. Januar vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 37) Clebsch-Gordan Koeffizienten (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde die folgende Beziehung gezeigt:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \Big(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2m_1(m-m_1) - j(j+1) \Big) \langle j_1, j_2; m_1, m-m_1 | j_1, j_2; j, m \rangle \\ + \; & \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)(j_2-m+m_1)(j_2+m-m_1+1)} \, \langle j_1, j_2; m_1-1, m-m_1+1 | j_1, j_2; j, m \rangle \\ + \; & \sqrt{(j_1+m_1+1)(j_1-m_1)(j_2-m+m_1+1)(j_2+m-m_1)} \, \langle j_1, j_2; m_1+1, m-m_1-1 | j_1, j_2; j, m \rangle \end{aligned}$$

Weiterhin gilt die Normierungsbedingung $\sum_{m_1,m_2} |\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m \rangle|^2 = 1$.

Berechnen Sie damit die Clebsch-Gordan Koeffizienten $\langle \frac{1}{2}, l; \pm\frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, l; j, m \rangle$ der Addition eines Bahndrehimpulses L mit einem Spin $\frac{1}{2}$ für alle möglichen Werte von j und m.

(Die Lösung wurde in der Vorlesung angegeben bzw. kann in jedem Quantenmechanikbuch nachgeschlagen werden.)

Aufgabe 38) Zwei-Teilchen-System (5 Punkte)

Können zwei Protonen mit relativem Bahndrehimpuls $l = 1$ sich in einem Spin-Singulett-Zustand befinden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 39) Helium-Atom (15 Punkte)

Der Hamiltonoperator für die beiden Elektronen des Heliumatoms lautet in guter Näherung

$$H = H_1 + H_2 + V_{12} \quad \text{mit} \quad H_i = \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - 2e^2/r_i, \quad V_{12} = \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Dabei sind $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ die Relativkoordinaten der Elektronen bezüglich der Lage des Kerns und es wird angenommen, dass der Kern im Schwerpunkt ist.

(a) Betrachten Sie zuerst die Einteilchensysteme mit dem Hamiltonoperator H_i. Geben Sie die Energieeigenwerte und Zustandsvektoren in Ortsdarstellung an (Wellenfunktionen). Verwenden Sie dabei die bekannte Lösung für das Wasserstoffatom.

(b) Betrachten Sie nun das Zweiteilchensystem, aber setzen Sie zunächst $V_{12} \equiv 0$ und tun Sie so, als hätten Elektronen keinen Spin. Konstruieren Sie aus den Einteilchen-Eigenvektoren $|nlm\rangle$ die Zweiteilchen-Eigenvektoren mit den beiden niedrigsten Energien, die (i) vollständig symmetrisch sind, und (ii) vollständig antisymmetrisch sind. Geben Sie die Vektoren sowohl allgemein in Bra-Ket Schreibweise als auch in Ortsdarstellung an (d.h. die Zweiteilchen-Wellenfunktionen).

(c) Elektronen sind konkret natürlich Fermionen und haben Spin 1/2. Konstruieren Sie den Zustand niedrigster Energie für Elektronen im Fall $V_{12} = 0$.

(d) Nach Einschalten des Wechselwirkungsterms V_{12} verschiebt sich der Energie des Grundzustandes näherungsweise um $\Delta E \approx \langle 0|V_{12}|0\rangle$, wobei $|0\rangle$ den Zustandsvektor des Grundzustandes im System $V_{12} = 0$ darstellt. Berechnen Sie damit ΔE.

Hinweis: Der Grundzustand des Einteilchensystems (a) hat im Ortsraum die Einteilchenwellenfunktion $\psi_0(r) = \mathcal{N} \exp(-2r/a_0)$ (mit $a_0 = \hbar^2/me^2$).
Es gilt: $\int_{-1}^{1} du/\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,u} = (|a+b| - |a-b|)/(ab)$.