

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 14

Quicky:

126. Diskutieren Sie die Konvergenzeigenschaften typischer Störungsreihen in der Physik. Konvergieren sie? Begründen Sie Ihre Antwort.
127. Erklären Sie den Begriff der asymptotischen Konvergenz.
128. Erklären Sie den Stark-Effekt.
129. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der Spin-Bahn-Kopplung und der Feinstruktur des Spektrums von Wasserstoff.
130. Was ist das Wechselwirkungsbild? Wie hängt es mit dem Schrödingerbild zusammen?
131. Welcher Bewegungsgleichung genügen Zustandsvektoren im Wechselwirkungsbild?
132. Welcher dynamischen Gleichung genügt der Zeitentwicklungsoperator in diesem Bild?
133. Wie hängen die Zeitentwicklungsoperatoren des Wechselwirkungsbildes und des Schrödingerbildes miteinander zusammen?
134. Warum eignet sich das Wechselwirkungsbild zur Beschreibung eines Systems mit einer zeitabhängigen Störung ?
135. Welche Größe muß man berechnen, um die Übergangsamplitude und die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand in einen anderen zu bestimmen?
136. Welche Gleichung liegt der Dyson-Reihe zugrunde? Leiten Sie daraus den Ausdruck für den Zeitentwicklungsoperator in nullter, erster, und zweiter Ordnung Störungstheorie her.
137. Wie lautet Fermis goldene Regel und für welche Art von Störungen gilt sie?
138. Erläutern Sie die Phänomene der stimulierten Emission oder Absorption von Energiequanten. Durch welche Art von Störungen kann so etwas induziert werden? Gilt in diesem Fall Energieerhaltung?
139. Was versteht man unter der Dipolnäherung?
140. Was ist ein Dipolübergang? Welche Auswahlregeln gelten für Dipolübergänge?

Aufgaben (abzugeben bis 8. Februar vor 8:15 Uhr)

Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 44) Zeitabhängige Störungstheorie (10 Punkte)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit Eigenfrequenz ω_0 , an den ein zeitabhängiges Störpotential der Form

$$v(x) = x \exp(-t^2/2\tau^2)$$

angelegt wird. Zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ sei der Oszillator im Grundzustand $|0\rangle\langle 0|$. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit in den angeregten Zustand $|n\rangle\langle n|$ nach unendlich langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) in Störungstheorie erster Ordnung.

- a) für $n = 1$
- b) für beliebige $n > 1$

Aufgabe 45) β - Zerfall (5 Punkte)

Ein Elektron befinde sich im Anziehungsbereich eines Z -fach positiv geladenen Kerns, der als Punktladung der Stärke Ze beschrieben werde. Zur Zeit $t = 0$ findet ein β -Zerfall statt, also wird die Kernladung um $+e$ geändert. Wie groß ist zum Zeitpunkt $t > 0$ die Übergangswahrscheinlichkeit vom alten $1s$ -Zustand in den neuen $2s$ -Zustand in Störungstheorie erster Ordnung?

Hinweis: Der $2s$ Zustand eines Z -fach geladenen Ions ist gegeben durch

$$\varphi_{200}^Z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z^3}{2\pi a_B^3}} \left(1 - \frac{Zr}{2a_B}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a_B}\right).$$

Aufgabe 46) Eichinvarianz im elektromagnetischen Feld (15 Punkte)

In der Vorlesung haben wir besprochen, wie der Hamiltonoperator bei Anwesenheit von elektromagnetischen Feldern zu erweitern ist. Wie Sie wissen, haben elektromagnetische Felder eine besondere Symmetrie, die Eichinvarianz. In Kapitel 6.2 werden wir anhand des Pfadintegralformalismus diskutieren, wie sich eine Eichtransformation auf Zustandsvektoren und die Schrödingergleichung auswirken. In dieser Aufgabe sollen Sie zur Vorbereitung das gleiche Problem auf herkömmliche Weise lösen.

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen der Ladung e im elektromagnetischen Feld. Der Hamiltonoperator lautet

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + e\Phi,$$

wobei $\vec{A}(\vec{r}, t)$ das Vektorpotential ist, $\Phi(\vec{r}, t)$ das skalare Potential, und der kanonische Impuls \vec{p} in Ortsdarstellung die Form $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$ hat. Das elektrische Feld \vec{E} und das Magnetfeld \vec{B} sind dann bekanntlich gegeben durch $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

- Zeigen Sie, dass der Operator $\vec{\Pi} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$ im Heisenbergbild durch $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ gegeben ist. (Hinweis: Heisenberg-Gleichung)
- Berechnen Sie den Kommutator $[\Pi_i, \Pi_j]$ (mit $i, j = x, y, z$) und vergleichen Sie ihn mit $[p_i, p_j]$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.
- $\psi(\vec{r}, t)$ sei eine Wellenfunktion, die der Schrödingergleichung $H\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$ genügt. Betrachten Sie eine Transformation, bei der an ψ eine orts- und zeitabhängige Phase multipliziert wird: $\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \exp(\frac{ie}{\hbar c} \varphi(\vec{r}, t))$.

Zeigen Sie, daß ψ' ebenfalls einer Schrödingergleichung im elektromagnetischen Feld $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ und $\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi$ genügt. Interpretieren Sie diesen Befund.

(Worin unterscheiden sich die elektrischen und magnetischen Felder \vec{E}' , \vec{B}' von \vec{E} und \vec{B} ?)

- Zeigen Sie, daß die Erwartungswerte $\langle \vec{r} \rangle$ und $\langle \vec{\Pi} \rangle$ unter der in (c) beschriebenen Transformation unverändert bleiben.