Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 2

Quicky:

14. Wie lautet die Schrödingergleichung für freie Teilchen und Teilchen im Potential?
15. Was versteht man in der Quantenmechanik unter Orts- und Impulsdarstellung? Wie hängen die beiden Darstellungen miteinander zusammen?
16. Was ist die quantenmechanische Interpretation von $\psi(\vec{r},t)$ und $\tilde{\psi}(\vec{p},t)$?
17. Was versteht man unter Wahrscheinlichkeitsstrom?
18. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte? Interpretieren Sie die einzelnen Terme.
19. Wie berechnet man in Ortsdarstellung den Erwartungswert des Ortes / Impulses eines Teilchens?
20. Wie berechnet man in Impulsdarstellung den Erwartungswert des Ortes / Impulses eines Teilchens?
21. Wie berechnet man den Erwartungswert einer beliebigen physikalischen Observablen?
22. Wie hängen physikalische Observablen mit Operatoren zusammen?
23. Welche Eigenschaften muss ein Operator erfüllen, der eine physikalische Observable beschreibt?
24. Wie lautet das Korrespondenzprinzip?
25. Wie lauten in Ortsdarstellung die Operatoren für den Ort, den Impuls, den Drehimpuls, die Energie?
26. Was ist der Hamiltonoperator und welche Funktion hat er?
27. Was ist ein Kommutator?
28. Welchen Wert hat der Kommutator $[\hat{x},\hat{p}]$?

Aufgaben (abzugeben bis 2. November vor 8:00 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 4) Erwartungswerte (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie ein Wellenpaket $\psi(x,t)$ in einer Dimension. Zeigen Sie ausgehend von dem Ausdruck für den Erwartungswert von p^k in Impulsdarstellung,

$$\langle p^k \rangle = \int dp\, \tilde{\psi}^*(p,t)\, p^k\, \tilde{\psi}(p,t) \ ,$$

dass in Ortsdarstellung die folgende Gleichung gilt:

$$\langle p^k \rangle = \int dx\, \psi^*(x,t) (\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx})^k \psi(x,t) \ .$$

(b) $\psi(x,t)$ sei reellwertig. Zeigen Sie, dass daraus $\langle p \rangle = 0$ folgt.

(c) Im 1s-Zustand des Wasserstoffatoms hat das Elektron die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}\, e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t}; \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $T = \frac{p^2}{2m}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten.

(d) Das Potential des Wasserstoffatoms hat die Form $V = \frac{-e^2}{r}$. Berechnen Sie auch hierfür den Erwartungswert im 1s-Zustand und damit den Erwartungswert der Gesamtenergie.

Aufgabe 5) Freier Propagator (10 Punkte)

Aus der allgemeinen Gleichung für freie Wellenpakete zur Zeit t (in einer Dimension):

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\; e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \tilde{\psi}_0(p)$$

und

$$\tilde{\psi}_0(p) = \tilde{\psi}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x,0)$$

folgt der allgemeine Zusammenhang zwischen $\psi(x,t)$ und $\psi(x,0)$:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' G_0(x-x',t)\psi(x',0)\ .$$

G_0 heißt freier Propagator oder freie Greensfunktion. (Sie kennen ein ähnliches Konstrukt aus der Elektrodynamik.)

(a) Zeigen Sie, daß G_0 der Schrödingergleichung für freie Teilchen genügt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G_0(x-x',t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_0(x-x',t)$$

(b) Wie lautet die Anfangsbedingung $G_0(x-x',0)$?

(c) Berechnen Sie $G(x-x',t)$ explizit.

Aufgabe 6) Kommutatoren (10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $[\hat{A},\hat{B}] = i\hbar$ gilt: $[\hat{A},\hat{B}^n] = i\hbar\, n\, \hat{B}^{n-1}$.
(Hinweis: Machen Sie einen Induktionsbeweis).

(b) Für Drehimpulskomponenten gilt $[\hat{L}_j,\hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{L}_l$.
(Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention. Wenn Sie nicht gerne mit dem ϵ-Tensor hantieren, dann beweisen Sie zunächst $[\hat{L}_x,\hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$), und verallgemeinern Sie dann dieses Ergebnis.)