Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 3

Quicky:

29. Wie lauten in Ortsdarstellung die Operatoren für Ort $\hat{\vec{r}}$, Impuls $\hat{\vec{p}}$, Drehimpuls $\hat{\vec{L}}$, Energie $\hat{E}$? Welche Form hat der Hamiltonoperator $\hat{H}$?
30. Formulieren Sie die Unschärferelation für Ort und Impuls.
31. Formulieren Sie die Unschärferelation für Energie und Zeit.
32. Nennen Sie weitere Unschärferelationen.
33. Nach welcher einfachen Gleichung können Sie die rechte Seite in der Unschärferelation "$\Delta A\,\Delta B \geq\,?$" für zwei Observablen A und B berechnen? Wann kann man zwei Größen gleichzeitig scharf messen?
34. Wie lautet das Ehrenfestsche Theorem? Interpretieren Sie die einzelnen Terme.
35. Welchen Wert haben die Kommutatoren $[\hat{p}_j, \hat{r}_k]$, $[\hat{r}_j, \hat{r}_k]$, $[\hat{p}_j, \hat{p}_k]$?
36. Welchen Wert hat $[\hat{L}_j, \hat{L}_k]$ für Drehimpulskomponenten $\hat{L}_j$? Was ist $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_j]$?
37. Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung?
38. Wie hängt die stationäre Schrödingergleichung mit der allgemeinen (zeitabhängigen) Schrödingergleichung zusammen? Wann kann man sie benutzen?
39. Wie setzt man aus den Lösungen der stationären Schrödingergleichung die allgemeinste Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung zusammen?

Aufgaben (abzugeben bis 9. November vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 7) Unschärferelation (10 Punkte)

(a) Wie genau muß man die Geschwindigkeit einer Kugel (Radius $r = 1\text{cm}$, Dichte $\rho = 1\text{g/cm}^3$) messen, um die Unschärferelation nachzuweisen, wenn man die Position der Kugel mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 10^{-7}\text{m}$ beobachtet?

(b) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der klassischen Energiefunktion $E_{kl} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Benutzen Sie die Orts-Impuls-Unschärfe, um über das Minimum der klassischen Energiefunktion die minimale mögliche Energie des Systems abzuschätzen.

(c) Welche kinetische Energie (in eV) muß ein Elektron mindestens haben, wenn es in einem Atom (Radius $\sim 1\mathring{A}$) bzw. in einem Atomkern (Radius ~ 1 Fermi) lokalisiert sein soll?

(d) Verifizieren Sie die Orts-Impuls-Unschärferelation für den Fall des Gaußschen Wellenpaketes $\psi(x,t)$ aus Aufgabe 3).

Aufgabe 8) Ehrenfest-Theorem und Zerfließen von Wellenpaketen (10 Punkte)

Mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems können Sie nun endlich quantitativ untersuchen, wie freie Wellenpakete zeitlich zerfließen. Betrachten Sie ein eindimensionales Wellenpaket, das zur Zeit $t = 0$ durch eine reelle Wellenfunktion beschrieben wird. Zeigen Sie dafür den allgemeinen Zusammenhang:

$$\Delta x(t)^2 = \Delta x(0)^2 + \frac{t^2}{m^2}\,\Delta p^2. \tag{1}$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Leiten Sie mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems die Bewegungsgleichungen für $\langle p\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle p^2\rangle$, $\langle x^2\rangle$, und $\langle xp + px\rangle$ her. Sie erhalten: $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = 0$, $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m}$, $\frac{d\langle p^2\rangle}{dt} = 0$, $\frac{d\langle xp+px\rangle}{dt} = \frac{2}{m}\langle p^2\rangle$, $\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle xp + px\rangle$.

(b) Argumentieren Sie, dass für reelle Wellenfunktionen die Erwartungswerte $\langle p\rangle$ und die Erwartungswerte $\langle xp+px\rangle$ Null sein müssen. Dieses gilt demnach auch für unser Wellenpaket zur Zeit $t = 0$.

(c) Sie können Ursprung so wählen, daß zur Zeit $t = 0$ auch $\langle x\rangle$ Null wird. Integrieren Sie nun die Bewegungsgleichungen aus (b) und beweisen Sie die Gleichung (1).

(d) Wie muss man Gl. (1) modifizieren, wenn $\psi(x, t)$ zur Zeit $t = 0$ nicht reell ist?

Anmerkung: Wie sich ein Wellenpaket mit Anfangsbedingung $\psi(x, 0) \propto \mathrm{e}^{-x^2}$ zeitlich entwickelt, können Sie sich z.B. anhand des folgenden Mathematica Scripts verdeutlichen (hier ist $\hbar = m = 1$ gesetzt).

```
pde = D[ψ[x,t],t] == I/2 D[ψ[x,t],{x,2}]
ic  = ψ[x,0] == ψ0[x] (wählen Sie z.B. ψ0[x] = Exp[-x x] oder ψ0[x] = Exp[-x x + i k x] )
bc1 = ψ[-20,t] == 0
bc2 = ψ[20,t] == 0
solution = NDSolve[{pde,ic,bc1,bc2},ψ,{t,0,5},{x,-20,20}]
ρ[x_,t_] = Evaluate[Abs[ψ[x,t]]^2 /. solution]
Manipulate[Plot[ρ[x,t],{x,-10,10}, PlotRange -> {0,1}], {{t,0}, 0,5, Appearance -> Labeled}]
```

Aufgabe 9) Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem Potential $V(x) = \begin{cases} 0 & : |x| < a/2 \\ \infty & : |x| > a/2 \end{cases}$.

(a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf. Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ nur innerhalb des Topfes bei $|x| < a/2$ ungleich Null sein darf.

(b) Stellen Sie für diesen Bereich ($|x| < a/2$) die allgemeinste Form der Lösung auf für einen gegebenen Energie-Eigenwert E auf, zunächst ohne die Randbedingung bei $x = \pm a/2$ zu berücksichtigen.

(c) Die Randbedingung lautet $\phi(\pm a/2) = 0$ (das werden wir in der Vorlesung zeigen). Wie lauten dann die möglichen Lösungen der Schrödingergleichung? Welche Energie-Eigenwerte sind nur möglich?