Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 4

Quicky:

40. Wann spricht man bei einem quantenmechanischen System von einem diskreten Energiespektrum? von einem kontinuierlichen Energiespektrum? Nennen Sie je ein Beispiel.
41. Wann erwartet man ein gemischtes Spektrum? Welches ist physikalisch der Unterschied zwischen Zuständen im diskreten und im kontinuierlichen Teil des Spektrums?
42. Wie sind Transmissions- und Reflexionskoeffizienten definiert? Welche physikalische Information vermitteln sie?
43. Erklären Sie den Tunneleffekt.
44. Warum kann man die "WKB"-Näherung im Fall von Tunnelbarrieren verwenden? Warum nicht für allgemeine Probleme?
45. Was für weitere typisch quantenmechanische Effekte können bei Streuung an einem eindimensionalen Potential eintreten?
46. Wie lassen sich Resonanzen anschaulich verstehen?

Aufgaben (abzugeben bis 16. November vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 10) Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf II (10 Punkte)

In Aufgabe 9) haben Sie die stationäre Schrödingergleichung für ein Teilchen in einem unendlich hohen Potentialtopf mit Begrenzung bei $x = \pm a/2$ gelöst. Die Lösung finden Sie auch im Skript auf Seite 33. Jetzt sollen Sie auf dieser Basis die Zeitentwicklung einer Welle mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \begin{cases} A & : -a/2 < x < 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ berechnen.

Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

(b) Allgemein lässt sich $\psi(x,t)$ darstellen als Summe

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n(t)\, \phi_n(x) \tag{1}$$

von Lösungen $\phi_n(x)$ der stationären Schrödingergleichung. Berechnen Sie $c_n(0)$.
Hinweis: Es handelt sich bei dieser Entwicklung um eine Fourierreihe.
Erinnerung an die Mathematik-Vorlesungen: Auf einem Intervall $[-L, L]$ stellt ein Orthonormalsystem aus trigonometrischen Funktionen ein vollständiges System dar, d.h. jede quadratintegrable Funktion $f(x)$ lässt sich in eine Reihe

$$f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

entwickeln. Um die Koeffizienten dieser Reihe zu erhalten berechnet man:
$f_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$

(c) Berechnen Sie $\psi(x,t)$ mit Hilfe des Ergebnisses von (b)

(d) Die Wahrscheinlichkeit p_n, zur Zeit t bei einer (hypothetischen) Energiemessung die Energie E_n zu messen, ergibt sich aus den Koeffizienten $c_n(t)$ der Entwicklung (1) von $\psi(x,t)$ gemäß $p_n = |c_n(t)|^2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Grundzustandsenergie bzw. die Energie des ersten angeregten Zustandes zu messen. Wie hängen sie von der Zeit t ab?

e) Zusatzaufgabe(4 Bonuspunkte): Schreiben Sie ein Mathematica Skript zur Visualisierung des Verhaltens von $|\psi(x,t)|^2$.

Aufgabe 11) Delta-Potential (10 Punkte)

Gegeben sei das Potential $V(x) = -V_0\delta(x),\ V_0 > 0$. Die Wellenfunktion $\psi(x)$ sei stetig (insbesondere im Nullpunkt).

(a) Suchen Sie die gebundenen Lösungen ($E < 0$).

Hinweis: Lösen Sie zuerst die Schrödingergleichung außerhalb des Ursprungs. Das Verhalten von $\psi(x)$ bei $x = 0$ erhalten Sie, indem Sie die Schrödingergleichung über das Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ und integrieren und dann den Grenzfall $\epsilon \to 0$ untersuchen.

(b) Berechnen Sie die Streuung einer von links ($x < 0$) einlaufenden ebenen Welle an diesem Potential und bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = |J_{\text{ref}}|/|J_{\text{ein}}|$ und Transmissionskoeffizienten $T = |J_{trans}|/|J_{ein}|$ wobei $J_{\text{ref}}, J_{trans}, J_{\text{ein}}$ die Wahrscheinlichkeitsströme der reflektierten, transmitierten bzw. einlaufenden Welle sind.

Aufgabe 12) Drehimpuls (10 Punkte)

(a) Stellen Sie die Ortsdarstellung von $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ in Kugelkoordinaten dar. Sie erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ \hat{L}_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ \hat{L}_z &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass der Drehimpuls die Polarkoordinatendarstellung

$$\hat{\vec{L}} = \frac{\hbar}{i}(\vec{e}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \vec{e}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}).$$

hat. Hier sind $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, $\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ und $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi$.

c) Berechnen Sie hieraus auch $\hat{\vec{L}}^2$ in Kugelkoordinaten. Das Ergebnis läßt sich in die folgende Form bringen:

$$\hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie:
$\vec{e}_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\theta = 0$, $\vec{e}_\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\phi = -\cos\theta$, $\vec{e}_\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = 0$, $\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta = 0$.