Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 5

Quicky:

48. Welche Symmetriebedingungen müssen erfüllt sein, damit man ein Zweikörperproblem auf ein Einteilchenproblem reduzieren kann?
49. Welches sind die Eigenwerte der Operatoren $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ (Bahndrehimpuls)? Welches sind die zugehörigen Eigenfunktionen?
50. Was versteht man unter Quantenzahlen? Welche Quantenzahlen haben Eigenfunktionen des Drehimpulses?
51. Welche Quantenzahlen haben Energie-Eigenzustände im Wasserstoffatom? Welche Bedeutung haben sie?
52. Wann spricht man davon, daß ein Energieeigenwert entartet ist?
53. Diskutieren Sie die Entartung der Eigenzustände im Wasserstoffatom.

Aufgaben (abzugeben bis 23. November vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 13) Dreidimensionaler Potentialtopf (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie ein dreidimensionales quantenmechanisches Teilchen in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$.

Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf. Machen Sie einen Separationsansatz und reduzieren Sie sie auf drei eindimensionale Gleichungen. Zeigen Sie, daß die Eigenwerte der stationären Schrödingergleichung die Bedingung $E = E_x + E_y + E_z$ erfüllen müssen, wobei E_α die Eigenwerte der eindimensionalen Eigenwertgleichungen sind.

(b) Wenden Sie diese Überlegungen auf den dreidimensionalen unendlich hohen Potentialtopf an. Benutzen Sie die Ergebnisse für den eindimensionalen Topf aus Aufgabe 9 (oder aus dem Skript Seite 33) und geben Sie die Energieeigenwerte eines Teilchen an, das in einem Kasten der Seitenlängen a, b und c eingeschlossen ist.

Aufgabe 14) Virialsatz in der Quantenmechanik (10 Punkte)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator für ein Zentralkraftproblem $H = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$

(a) Beweisen Sie für den Fall des harmonischen Oszillators ($V(r) = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2}$):

$$\frac{i}{\hbar}[H, \frac{1}{2}(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}})] = 2\hat{T} - 2\hat{V} \ .$$

(b) Welche Relation zwischen $\langle T \rangle$ und $\langle V \rangle$ folgt daraus im stationären Fall?

Der harmonischen Oszillator hat Energie-Eigenwerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$. Wie groß sind damit die Erwartungswerte von T und V im zugehörigen Eigenzustand?

Hinweis: Benutzen Sie z.B. das Ehrenfest-Theorem

(c) Betrachten Sie nun das Wasserstoffatom mit $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Wie ändert sich die Operatorrelation aus (a)? Was für eine Relation zwischen den Erwartungswerten $\langle T \rangle$ und $\langle V \rangle$ in gebundenen Eigenzuständen folgt daraus und wie groß sind die Werte konkret?

(d) Für ungebundene Zustände gilt die Relation (c) nicht zwingend! Wieso nicht?

Aufgabe 15) Teilchen im elektromagnetischen Feld (10 Punkte)

Ein Teilchen der Ladung e und der Masse m befinde sich in einem konstanten elektromagnetischen Feld $\vec{E} = (0, 0, E)$, $\vec{B} = (0, B, 0)$.

Die allgemeine Form des Hamiltonoperators bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes ist

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\Phi,$$

wobei $\vec{A}$ und Φ das Vektorpotential und das skalare Potential sind. ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$).

a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf. Wählen Sie die Eichung so, daß $\vec{A}$ und Φ nur von z abhängen.

b) Machen Sie einen Separationsansatz $\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{ik_x x}\, \mathrm{e}^{ik_y y}\, \phi(z)$ und reduzieren Sie damit das Problem auf eine eindimensionale Gleichung für den z-abhängigen Anteil $\phi_z(z)$ der Wellenfunktion. Sie erhalten die Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit einem Hamiltonoperator der Form $\hat{H}_z = \hat{p}_z^2/2m + k(z - z_0)^2$. Berechnen Sie z_0 und den Erwartungswert $\langle z \rangle$ für Eigenfunktionen von $\hat{H}_z$.

Hinweis: Die Lösungen der stationären Schrödingergleichung für den harmonischen Oszillator haben wir in der Vorlesung ja noch nicht durchgenommen. Sie brauchen sie hierfür aber auch nicht zu kennen.

c) Zeigen Sie $\dfrac{d\langle x \rangle}{dt} = -\dfrac{Ec}{B}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Vergleichen Sie mit der klassischen Lösung des Problems. Falls Sie diese nicht kennen, dann recherchieren Sie!