Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 6

Quicky:

54. Was ist ein Hilbertraum?
55. Wie lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und wann gilt sie?
56. Was ist eine Basis?
57. Was versteht man unter "Zerlegung der Eins" in einer Basis?
58. Wie werden Vektoren in einer Basis dargestellt?
59. Wie werden Operatoren in einer Basis dargestellt?
60. Was transformieren sich Darstellungen eines Vektors bei Basiswechsel?
61. Was ist ein unitärer Operator?
62. Was ist ein hermitescher, was ein selbstadjungierter Operator?
63. Was versteht man unter einem Projektionsoperator?

Aufgaben (abzugeben bis 30. November vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgrund von Rückmeldungen der Tutoren bekommen Sie im Folgenden noch ein paar Aufgaben zu gebundenen / ungebundenen Lösungen der Schrödingergleichung in einer Dimension.

Aufgabe 16) Streuung an einer Potentialstufe (10 Punkte)

Betrachten Sie das eindimensionale Potential $V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ V_0 & : x > 0 \end{cases}$.

Von links laufe eine ebene Welle $\phi_e(x) = e^{ik_0 x}$ der Energie E ein. Es gelte $E > V_0 > 0$.

(a) Begründen Sie, daß die Lösung der stationären Schrödingergleichung die allgemeine Form $\phi(x) = \begin{cases} e^{ik_0 x} + ae^{-ik_0 x} & : x < 0 \\ be^{ikx} & : x > 0 \end{cases}$ hat. Welchen Wert hat k?

(b) Benennen Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$? Berechnen Sie daraus die Amplituden a und b der reflektierten und transmittierten Welle.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsströme der einlaufenden, reflektierten und transmittierten Welle J_{ein}, J_{refl} und J_{transm}. Berechnen Sie daraus den Reflexionskoeffizient $R = |J_{\text{refl}}|/|J_{\text{ein}}|$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |J_{\text{trans}}|/|J_{\text{ein}}|$. Überprüfen Sie $R + T = 1$,

(d) Was ändert sich, wenn $E < V_0$ wird? Berechnen Sie die Eindringtiefe der Welle in die Potentialstufe (d.h. der Ort, an dem die Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf den Anteil $1/e$ abgefallen ist.

(e) Diskutieren Sie den Fall, dass die Welle von rechts kommt ($E < V_0$) und vergleichen Sie die Reflexionskoeffizienten.

Aufgabe 17) Delta-Potential II (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in dem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 \\ -V_0\,\delta(x-a) & : x > 0 \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0 \text{ und } a > 0.$$

(a) Welche Bedingungen muss die Wellenfunktion bei $x = 0$ erfüllen?

Welche Bedingung muss sie bei $x = a$ erfüllen? Ermitteln Sie diese auf dem gleichen Wege wie in Aufgabe 11 a). Das Ergebnis ist, dass die Wellenfunktion stetig ist und ihre erste Ableitung bei $x = a$ einen Sprung macht. Bestimmen Sie die Größe dieses Sprungs.

(b) Betrachten Sie den Fall eines gebundene Zustandes mit $E < 0$. Lösen Sie dafür zuerst allgemein die stationäre Schrödingergleichung in den Bereichen $0 < x < a$ und $x > a$ und setzen Sie dann die Randbedingungen ein. Unter welchen Bedingungen kann es eine gebundene Lösung geben?

Zeigen Sie konkret, dass es für große a genau eine gebundene Lösung gibt, und für kleine a keine. Bestimmen Sie den Wert von a, bei dem die gebundene Lösung verschwindet.

Hinweis: Falls Sie die Teilaufgabe (a) nicht lösen konnten, dann rechnen Sie mit der Bedingung $\lim_{\epsilon\to 0}\left[\psi'(a+\epsilon) - \psi'(a-\epsilon)\right] = -\psi(a)$ für $x = a$.

Aufgabe 18) Operatoren im Hilbertraum (10 Punkte)

Betrachten Sie lineare Operatoren A, B, C, P in einem Hilbertraum.

a) Zeigen Sie, dass gilt $Sp(ABC) = Sp(BCA)$.

b) Wie transformiert sich die Darstellung L_{ij} eines Operators L bei einem Wechsel der Basis $|b_i\rangle \longrightarrow |b'_i\rangle$?

c) Projektionsoperatoren sind selbstadjungierte Operatoren mit $P^2 = P$. Zum Beispiel projiziert $P = |e\rangle\langle e|$ mit $\langle e|e\rangle = 1$ auf die Achse $|e\rangle$.

- Konstruieren Sie den Projektionsoperator, der auf die Ebene projiziert, die von zwei Vektoren $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ aufgespannt wird.
- Welche möglichen Eigenwerte hat ein Projektionsoperator?
- Welche Werte kann die Spur eines Projektionsoperators annehmen? Wie kann man diese Zahl interpretieren?

Bonusaufgabe: Eindimensionaler harmonischer Oszillator (10 Bonuspunkte)

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator nach demselben Verfahren, das in der Vorlesung für die Winkel- und Radialgleichung des Wasserstoffatoms vorexerziert wurde. Gehen Sie z.B. folgendermaßen vor

(a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ auf. Reskalieren Sie sie dann in geeigneter Weise, bis Sie die einfachere Gleichung

$$(-\frac{d^2}{d\rho^2} + \rho^2)u(\rho) = \epsilon\, u(\rho) \tag{1}$$

erhalten.

(b) Betrachten Sie den asymptotischen Grenzfall $\rho \to \pm\infty$. Begründen Sie, warum in diesem Fall Gleichung (1) durch

$$(\frac{d^2}{d\rho^2} - \rho^2)u(\rho) \approx 0 \tag{2}$$

angenähert werden kann. Lösen Sie diese Gleichung. Sie erhalten eine asymptotische Lösung $u_a(\rho)$.

(c) Machen Sie nun den Ansatz $u(\rho) = p(\rho)\, u_a(\rho)$. Setzen Sie diesen in die Gleichung (1) ein. Sie erhalten

$$p''(\rho) - 2\rho\, p'(\rho) + (\epsilon - 1)\, p(\rho) = 0 \tag{3}$$

(d) Machen Sie einen Potenzreihenansatz und bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten.

Zeigen Sie, dass die Reihe abbrechen muss, weil anderenfalls $u(\rho) = p(\rho)u_a(\rho)$ bei $\rho \to \infty$ und/oder $\rho \to -\infty$ divergiert.

Konstruieren Sie die Abbruchbedingung und daraus die erlaubten Werte für ϵ und für die Energie E (Rückskalieren!).

(e) Die endlichen Polynome $p(\rho)$, die die Gleichung (3) lösen, heißen *Hermitesche* Polynome. Konstruieren Sie die alle Hermiteschen Polynome bis zur Ordnung ρ^3. Die Lösung ist eindeutig bis auf einen konstanten Faktor. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den in Wikipedia angegebenen Polynomen.

Sie können anhand dieser Aufgabe mit den in der Vorlesung vorgestellten Methoden einmal selbst herumspielen. In der Vorlesung werden wir später speziell für den harmonischen Oszillator eine elegantere Lösungsmethode kennenlernen. Deshalb wird diese Aufgabe im Tutorium nur dann besprochen werden, wenn mindestens einer von Ihnen sich an der Lösung versucht hat und Sie die Besprechung ausdrücklich wünschen.