Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 7

Quicky:

64. Was versteht man under dem Spektrum eines linearen Operators?
65. Welche Eigenschaften haben Eigenwerte hermitescher Operatoren?
66. Was versteht man unter einer Spektraldarstellung?
67. Wie lautet die Darstellung eines Operators L in seiner eigenen Spektraldarstellung?
68. Was versteht man unter einem vollständigen Satz kommutierender Observablen?
69. Welche Grundkonzepte ("Postulate") liegen der Quantenmechanik zugrunde?
70. Was ist ein quantenmechanischer Zustandsvektor? Wie wird er mathematisch beschrieben?
71. Wie werden dynamische Größen mathematisch beschrieben?
72. Was ist der statistische Operator?
73. Wie berechnet man den Erwartungswert einer dynamischen Größe in einem quantenmechanischen System?
74. Welche Meßwerte können bei der Messung einer dynamischen Größe auftreten? Welche nicht? Warum nicht?
75. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein konkreter Meßwert auf?
76. Was versteht man unter einem "reinen" System?
77. Wie lautet die allgemeine Version der Unschärferelation?
78. Was versteht man unter einem Zeitentwicklungsoperator?

Aufgaben (abzugeben bis 7. Dezember vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 19) Rechnen mit Operatoren (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[\vec{a}\vec{r}, \vec{b}\vec{p}]$ für den Ort $\vec{r}$, den Impuls $\vec{p}$, und gewöhnlichen komplexen Vektoren im $\mathbf{C}^3$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(b) Zeigen Sie für reelle Vektoren $\vec{a}$: $\exp(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{a})f(\vec{r}) = f(\vec{r}+\vec{a})$.

(c) Betrachten Sie in einem zweidimensionalen Hilbertraum den Operator $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie explizit den Operator $\ln(M)$. Für welche λ ist dieser Operator definiert?

Hinweis: Benutzen Sie die Spektraldarstellung von M.

Aufgabe 20) **Unterschied zwischen hermitesch und selbstadjungiert** (10 Punkte)

Der Radialimpuls ist definiert als $p_r = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\vec{r}\vec{p} + \vec{p}\vec{r}\frac{1}{r})$. In Ortsdarstellung gilt $p_r = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$. Er ist ein Beispiel für einen hermiteschen Operator, der nicht selbstadjungiert ist und für den daher das Spektraltheorem nicht gilt. Das sollen Sie in dieser Aufgabe nachvollziehen.

(a) Zeigen Sie, dass p_r der zu r kanonisch konjugierte Impuls ist, d.h. $[p_r, r] = \frac{\hbar}{i}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Radialimpuls hermitesch ist, wenn er auf dem Hilbertraum der Funktionen mit

$$\lim_{r\to 0} r\psi(\vec{r}) = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} r\psi(\vec{r}) = 0$$

definiert ist.

(c) Zeigen Sie, dass p_r **nicht** selbstadjungiert ist, wenn der Definitionsbereich der Hilbertraum aus (b) ist.
Vergleichen Sie dazu den Definitionsbereich des adjungierten Operators p_r^+ mit dem Definitionsbereich von p_r. Beachten Sie, dass der Definitionsbereich des adjungierten Operators maximal ist, d.h. er enthält **alle** Funktionen $|\phi\rangle$, für die $\langle p_r^+\phi|\psi\rangle = \langle\phi|p_r\psi\rangle$ erfüllt ist.

(d) Berechnen Sie die Eigenzustände von p_r und zeigen Sie, dass diese den Hilbertraum aus (b) nicht aufspannen.

(e) Kann der Radialimpuls eine Observable sein?

Aufgabe 21) **Statistischer Operator** (10 Punkte)

(a) Gegeben sei ein statistischer Operator ρ. Zeigen Sie, daß $1 - \rho$ positiv semidefinit ist.
(Hinweis: Diskutieren Sie die Eigenwerte von ρ und $(1 - \rho)$).

(b) Zeigen Sie: Damit ein hermitescher, positiv definiter Operator ρ mit Spur 1 ein reines System beschreibt, ist es notwendig und hinreichend, daß $\mathrm{Sp}(\rho^2) = 1$.
(Hinweis: Benutzen Sie die Eigendarstellung von ρ).

(c) Beweisen Sie im Schrödingerbild das Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle\frac{i}{\hbar}[H, A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$$

für beliebige (nicht notwendig reine) quantenmechanische Systeme.
Benutzen Sie dazu die von-Neumann-Gleichung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho = [H, \rho]$