Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 8 (korrigiert!)

Quicky:

78. Was versteht man unter einem Zeitentwicklungsoperator?
79. Welche Eigenschaften muß der Zeitentwicklungsoperator haben und warum?
80. Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Schrödingerbild und dem Heisenbergbild.
81. Wie entwickeln sich Zustände, Observablen, statistische Operatoren zeitlich im Schrödingerbild und im Heisenbergbild?
82. Wie hängen die Ausdrücke für Zustände, Observablen, statistische Operatoren im Heisenbergbild und im Schrödingerbild zusammen? Was passiert konkret, wenn der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist?
83. Was bedeutet "explizit zeitabhängig" ? Nennen Sie Beispiele für explizit zeitabhängige und nicht explizit zeitabhängige Observablen.
84. Wie lautet die von-Neumann-Gleichung und wann wird sie angewendet?
85. Wie lautet die Heisenberg-Gleichung und wann wird sie angewendet?
86. Wie entwickeln sich Erwartungswerte zeitlich im Schrödingerbild und im Heisenbergbild?
87. Was versteht man unter einem "trunkierten statistischen Operator"? Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem trunkierten statistischen Operator und dem vollen statistischen Operator? In welchem Kontext werden trunkierte Operatoren eingeführt und wofür können sie verwendet werden?
88. Erläutern Sie den Vorgang der Dekohärenz.
89. Was geschieht nach dem Reduktionspostulat bei einer Messung? Wie hängen Reduktionspostulat und Dekohärenz miteinander zusammen?

Aufgaben (abzugeben bis 14. Dezember vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 22) Unitäre Operatoren (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie: Die Eigenwerte eines unitären Operators sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.

(b) Zeigen Sie, daß der Operator $\exp(i\alpha A)$ (α reell) genau dann unitär ist, wenn A hermitesch ist.

(c) Es U ein unitärer Operator, der eine Operatortransformation $X \to \bar{X} = U^\ddagger X U$ vermittelt. Zeigen Sie: Für Operatorfunktionen $F = f(A)$ gilt $\bar{F} = f(\bar{A})$. Für Operatorfunktionen $G = g(A_1, \cdots A_n)$ gilt $\bar{G} = g(\bar{A}_1, \cdots \bar{A}_n)$.

Hinweis: Operatorfunktionen von mehreren Operatoren wie $g(A_1, \cdots A_n)$ kann man analog zu einfachen Operatorfunktionen $f(A)$ über eine (in diesem Fall mehrdimensionale) Taylorreihe definieren.

Aufgabe 23) <u>**Zeitentwicklung für ein freies Teilchens**</u> (10 Punkte)

Für ein freies Teilchen lautet der Hamiltonoperator $H = p^2/2m$. Dies gilt sowohl im Schrödingerbild als auch im Heisenbergbild (warum?). In dieser Aufgabe sollen Sie die daraus resultierende Zeitentwicklung für freie Teilchen in einer Dimension diskutieren.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für $U_S(t, t_0)$ im Schrödingerbild auf und lösen Sie diese Operatorgleichung. Stellen Sie dann $U_S(t, t_0)$ in Impulsdarstellung dar. Sie erhalten $\langle p|U_S(t, t_0)|p'\rangle = \delta(p - p')\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(t-t')\frac{p^2}{2m}}$

(b) Betrachten Sie nun die Ortsdarstellung von $U_S(t, t_0)$.
Das Objekt $G(x, t; x, t') := \langle x|U_S(t, t_0)|x'\rangle$ nennen wir Propagator. Zeigen Sie erst den allgemeinen Zusammenhang $\psi(x, t) = \int \mathrm{d}x'\, G(x, t; x', t')\, \psi(x', t')$.
Berechnen Sie dann $G(x, t; x', t')$ für freie Teilchen mit Hilfe von (b).
(Hinweis: Verwenden Sie $\langle x|p\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}xp}$.)

(e) Welche Form hat der Zeitentwicklungsoperator $U_H(t, t_0)$ im Heisenbergbild?

(f) Zeigen Sie im Heisenbergbild die Operatorgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_H = p_H/m$ und lösen Sie sie.

Aufgabe 24) <u>**von-Neumann Ergodizität**</u> (10 Punkte)

Betrachten Sie im Schrödingerbild ein abgeschlossenes quantenmechanisches System mit einem zeitunabhängigem Hamiltonoperator H, der ein diskretes Energiespektrum hat.

(a) Betrachten Sie als "Vorübung" das eindimensionale System eines Teilchens in dem unendlich hohen Potentialtopf $V(x) = \begin{cases} 0: & |x| < a/2 \\ \infty: & |x| > a/2 \end{cases}$.
Der Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ sei gegeben durch $\rho(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$ mit $\langle x|\psi(t)\rangle = \psi(x, 0) = \sqrt{1/a}$ für $|x| < a/2$ (und $\psi(x, 0) = 0$ sonst).
Berechnen Sie die Matrixelemente $\overline{\rho}_{nn} := \langle E_n|\rho(0)|E_n\rangle$
Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse zu den Energie-Eigenfunktionen des unendlich hohen Potentialtopfes (Skript Seite 33) benutzen.

(b) Zeigen Sie nun allgemein für beliebige zeitunabhängige Hamilontoperatoren: Für den statistischen Operator gilt $\rho(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}Ht}\rho(0)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$.

(c) Das Langzeitmittel über den Erwartungswert einer Observablen A ist gegeben durch $\overline{A} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\, \langle A\rangle_t$ mit $\langle A\rangle_t = \mathrm{Sp}(\rho(t)A)$. Zeigen Sie: Unabhängig von A gilt

$$\overline{A} = \mathrm{Sp}(\overline{\rho}A) \quad \text{mit} \quad \overline{\rho} = \overline{\rho}_{nn}|E_n\rangle\langle E_n|, \qquad \overline{\rho}_{nn} = \langle E_n|\rho(0)|E_n\rangle$$

In Worten: Die Langzeitmittel aller Observablen sind identisch mit den Erwartungswerten der Observablen in einem effektiven System, in dem der statistische Operator in Energiedarstellung *diagonal* ist.

(d) Geben Sie konkret den effektiven statistischen Operator $\overline{\rho}$ für das System aus (a) an.