Fakultät für Physik WS 2018/19

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik

Blatt 9

Quicky:

90. Wie lautet der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Welche Eigenwerte hat er?
91. Was sind Aufsteige- und Absteigeoperatoren?
92. Was versteht man in der Quantenmechanik unter einer Erhaltungsgröße? Wie lautet die Bedingung dafür, daß eine Observable eine Erhaltungsgröße ist?
93. Was versteht man unter einer Symmetrieoperation? Wie lautet die Bedingung dafür, daß ein System eine bestimmte Symmetrie aufweist?

Aufgaben (abzugeben bis 21. Dezember vor 8:15 Uhr)
Abgabe: Einwurf in den roten Kasten Nr. 34 im Erdgeschoss des Physik-Gebäude

Aufgabe 25) Harmonischer Oszillator I (10 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator.

(a) Konstruieren Sie aus den beiden niedrigsten Energieeigenzuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ einen kombinierten normierten Zustand $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ derart, daß der Erwartungswert $\langle x\rangle$ im reinen System $|\psi\rangle\langle\psi|$ maximal wird.
Sie erhalten $\alpha = \beta = \sqrt{1/2}\,\mathrm{e}^{i\phi}$, wobei der Phasenfaktor ϕ beliebig ist.

(b) Betrachten Sie ein reines System, daß zur Zeit $t = 0$ durch den statistischen Operator $|\psi\rangle\langle\psi|$ beschrieben wird. Berechnen Sie $\langle x(t)\rangle$.

(c) Berechnen Sie $\langle \Delta x^2\rangle$ als Funktion der Zeit.

Hinweis: Drücken Sie den Ortsoperator durch Auf- und Absteigeoperatoren (Leiteroperatoren) aus.

Aufgabe 26) Harmonischer Oszillator II (10 Punkte)

(a) Der Harmonische Oszillator wird im Schrödingerbild durch den Hamiltonoperator $H_S = p_S^2/2m + 1/2\, m\omega^2 x_S^2$ beschrieben. Zeigen Sie, daß er im Heisenbergbild als Funktion der Operatoren p_H und x_H die gleiche funktionale Form hat.
Zeigen Sie weiterhin $[x_H, p_H] = i\hbar$.

(b) Stellen Sie die Heisenberg-Gleichung für $x_H(t)$ und $p_H(t)$ auf und lösen Sie diese.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ auf (Ehrenfest-Gleichung). Zeigen Sie, daß diese identisch sind mit den Bewegungsgleichungen des klassischen harmonischen Oszillators.

(d) Gilt die Aussage von (c) auch noch für Teilchen in einem Potential die Form $V(x) = \alpha x^4$? Diskutieren Sie den Unterschied.

Aufgabe 27) <u>**Summenregel**</u> (10 Punkte)

Betrachten Sie einen eindimensionalen Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, der nur gebundene Zustände $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ hat.

(a) Zeigen Sie: $[[x, H], x] = \frac{\hbar^2}{m}$.

(b) Werten Sie $\langle n|[[x, H], x]|n\rangle$ durch Einschieben eines vollständigen, orthnormierten Satzes von Eigenfunktionen aus. Beweisen Sie damit und mit Hilfe von (a) die Summenregel

$$\sum_{n'} (E_{n'} - E_n)|\langle n|x|n'\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$$

Diese Gleichung gilt für alle n.

(c) Überprüfen Sie die Summenregel für die Eigenzustände und Eigenwerte des harmonischen Oszillators.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Matrixelemente $\langle n|x|n'\rangle$, indem Sie den Ortsoperator als Summe von Auf- und Absteigeoperatoren (Leiteroperatoren) ausdrücken.