

Vorlesung Elektrodynamik und Relativitätstheorie (Theorie 2)

Version vom SS 2025*

Universität Mainz
Institut für Physik
Theorie der kondensierten Materie
Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Inhalt: Grundbegriffe der Elektrodynamik

- Maxwellsche Gleichungen im Vakuum
- Stationäre Lösungen im unendlichen Raum
- Maxwellsche Gleichungen in Materie
- Stationäre Randwertprobleme
- Wellenausbreitung
- Liénard-Wiechert Potentiale

Die spezielle Relativitätstheorie

- Einführung und Grundpostulate
- Die Lorentz-Transformation
- Raum-Zeit und Lorentzinvarianz
- Relativistische Mechanik
- Relativistische Lagrange-Mechanik

Die Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

- Lagrange-Funktion für Punktteilchen im elektromagnetischen Feld
- Wirkungsprinzip und Lagrangedichte für Felder
- Die Lagrangedichte der Elektrodynamik
- Maxwellsche Gleichungen in kovarianter Form
- Symmetrien und Erhaltungsgrößen
- Anwendung: Strahlung

*Elektronisch: Letzte Änderung am 01.05.25

[†]Staudingerweg 9, 03-534, Tel. (06131-)3920365, <Friederike.Schmid@uni-mainz.de>

© Copyright 2015 Friederike Schmid

Die Verteilung dieses Dokuments in elektronischer oder gedruckter Form ist gestattet, solange sein Inhalt einschließlich Autoren- und Copyright-Angabe unverändert bleibt und die Verteilung kostenlos erfolgt, abgesehen von einer Gebühr für den Datenträger, den Kopiervorgang usw.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	1
1 Grundbegriffe der Elektrodynamik	5
1.1 Die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum	6
1.1.1 Die elementaren Gleichungen	7
1.1.2 Diskussion der Gleichungen	8
1.1.3 Energie und Impuls	9
1.1.4 Elektromagnetische Potentiale	11
1.1.5 Zusammenfassung von Kapitel 1.1	12
1.2 Stationäre Lösungen im unbegrenzten Raum	13
1.2.1 Grundgleichungen	13
1.2.2 Elementare Lösungen	14
1.2.3 Multipolentwicklung	15
1.2.4 Zusammenfassung von Kapitel 1.2	22
1.3 Maxwellsche Gleichungen in Materie	23
1.3.1 Phänomenologische Überlegungen	23
1.3.2 Mikroskopische Herleitung	25
1.3.3 Permeabilitätsfunktionen	28
1.3.4 Poyntingscher Satz in Medien	30
1.3.5 Grenzflächen und Randbedingungen	32
1.3.6 Zusammenfassung von Kapitel 1.3	33
1.4 Stationäre Randwertprobleme	34
1.4.1 Grundlegende Fragestellung	34
1.4.2 Die Methode der Greenschen Funktion	35
1.4.3 Lösungsmethoden für Randwertprobleme	38
1.4.4 Leitersysteme	40
1.4.5 Zusammenfassung von Kapitel 1.4	42
1.5 Wellenausbreitung	43
1.5.1 Elektromagnetische Wellen	43
1.5.2 Reflexion und Brechung	45
1.5.3 Elektromagnetische Signale	46
1.5.4 Zusammenfassung von Kapitel 1.5	49
1.6 Felder beliebiger Ladungs-/Stromverteilungen	49
1.6.1 Allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung	49
1.6.2 Punktförmige Ladungen: Liénard-Wiechert Potentiale	50
1.6.3 Spezialfall: Gleichförmig bewegte Punktladung	51

1.6.4	Zusammenfassung von Kapitel 1.6	52
1.7	Wissensfragen	53
2	Die Spezielle Relativitätstheorie	57
2.1	Einführung und Grundprinzipien	57
2.1.1	Das Relativitätsprinzip in der Newtonschen Mechanik	57
2.1.2	Schwierigkeiten mit der Newtonschen Mechanik	58
2.1.3	Die Einsteinschen Postulate	60
2.1.4	Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten	60
2.2	Die Lorentz-Transformation	62
2.2.1	Herleitung der „speziellen“ Lorentz-Transformation	63
2.2.2	Veranschaulichung und Anwendungsbeispiele	68
2.2.3	Allgemeine Lorentz-Transformationen	71
2.3	Raum-Zeit und Lorentzinvarianz	78
2.3.1	Minkowski-Diagramm und Lichtkegel	78
2.3.2	Viererskalare, Vierervektoren, Vierertensoren	80
2.3.3	Kovarianz-Forderung an Naturgesetze	81
2.4	Relativistische Mechanik	82
2.4.1	Relativistisches Kraftgesetz	82
2.4.2	Impuls und Energie	84
2.4.3	Relativistische Lagrange-Mechanik	87
2.5	Ausblick: Das starke Äquivalenzprinzip	90
2.6	Wissensfragen	91
3	Die Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik	93
3.1	Erweiterte Lagrangefunktion für Punktteilchen	93
3.1.1	Eichinvarianz und Viererpotential	93
3.1.2	Feldstärketensor und elektromagnetische Felder	94
3.1.3	Fazit	95
3.2	Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes	96
3.2.1	Der Lagrangedichte-Formalismus	96
3.2.2	Lagrangedichte für freie elektromagnetische Felder	98
3.2.3	Erweiterung: Wechselwirkung mit Materie	99
3.2.4	Dynamische Gleichungen	100
3.2.5	Zusammenfassung und Diskussion	101
3.3	Die Maxwell-Gleichungen	102
3.4	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	103
3.4.1	Noether-Theorem in der Feldtheorie	103
3.4.2	Eichinvarianz	105
3.4.3	Maxwellsches Tensorfeld	106
3.5	Lösen der Wellengleichung	107
3.5.1	Kovariante Greensche Funktion	107
3.5.2	Feld einer einzelnen Punktladung	109
3.6	Wissensfragen	110

Vorbemerkungen

„Elektrodynamik“: Zweite Vorlesung aus dem Zyklus „Theoretische Physik“, bestehend aus:

- Mechanik
- Elektrodynamik (diese Vorlesung)
- Quantenmechanik
- Thermodynamik und Statistische Physik
- Höhere Quantenmechanik (nicht verpflichtend; Bachelor oder Master)
- Höhere Statistische Physik (nicht verpflichtend; Master)

In der ersten Vorlesung (Mechanik)

Klassische Struktur von Raum und Zeit

Dynamik von Massenpunkten

Symmetrien und Erhaltungssätze, Noether-Theorem

Weitere Konzepte: Potential, Wirkungsprinzip, Phasenraum

Formalismen: Lagrange-Formalismus, Hamilton-Formalismus

Mathematisch: Gewöhnliche Differentialgleichungen

In dieser Vorlesung

Raum-Zeit Struktur in der speziellen Relativitätstheorie

Felder: Zusätzliche "innere" Freiheitsgrade des Raums

Noether-Theorem für Felder

Wirkungsprinzip und Lagrangeformalismus für Felder

Weitere neue Konzepte: Eichfelder und Eichinvarianz

Mathematisch: Partielle Differentialgleichungen (und Lösungsverfahren)

Konkrete **Struktur** der Vorlesung: Drei Teile

- Grundbegriffe der Elektrodynamik
(die Maxwell-Gleichungen und wie man sie löst)
- Spezielle Relativitätstheorie
(Raum-Zeit Struktur nach Einstein)
- Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik]
(Die Elektrodynamik als Beispiel einer klassischen Feldtheorie)

Einige empfohlene Bücher:

Zur Elektrodynamik

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics Bd. 2*

J.D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik*

W. Nolting: *Theoretische Physik Bd. 3* (Vieweg)

L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Theoretische Physik Bd. 2* (Klassische Feldtheorie)

L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Theoretische Physik Bd. 8* (Elektrodynamik der Kontinua)

T. Fliessbach: *Elektrodynamik*

F.E. Low, *Classical Field Theory*

C.A. Brau, *Modern Problems in Classical Electrodynamics*

Zur Speziellen Relativitätstheorie

W. Rindler: *Essential Relativity*. (van Nostrand Reinhold)

W. Nolting: *Theoretische Physik Bd. 4* (Vieweg)

R. d'Inverno: *Einführung in die Relativitätstheorie*. (VCH)

Vorab einige grundsätzliche Überlegungen: Was sind klassische Felder?

Man kann zwei nach außen hin grundlegend verschiedene Klassen von klassischen Feldern unterscheiden:

- (i) Generische Felder (z.B. elektromagnetisches Feld, Gravitationsfeld)
- (ii) Kontinua (z.B. elastische Körper, Fluide)

erscheinen zwar konzeptionell unterschiedlich, doch methodische Behandlung und Phänomenologie sind ähnlich (z.B. gibt es Wellen etc.)

Zu (ii)

Beispiel wurde in Theorie 1 kurz angesprochen: Hydrodynamik

Weiteres prominentes Beispiel: Elastizitätstheorie

Feld ist nicht "fundamental", vielmehr eine Hilfsgröße, um mit den vielen Freiheitsgraden eines Vielteilchensystems umzugehen.

Mikroskopische Grundlage: "Vergrößerung"

- Ersetze mikroskopische Freiheitsgrade (Teilchenkoordinaten) durch wenige "wichtige" Freiheitsgrade (z.B. Teilchendichte, Impulsdichte, Energiedichte ...)
- vergrößerte Beschreibung auf einer vergrößerten (unscharfen) Längenskala, auf der die einzelnen Teilchen nicht mehr sichtbar sind.

Struktur der Theorie im Wesentlichen durch Symmetrieüberlegungen bzw. Erhaltungssätze gegeben

(z.B. Fluide: Teilchenzahlerhaltung und Impulserhaltung

→ Navier-Stokes Gleichungen

Zu (i)

Beispiel: diese Vorlesung

Weiteres prominentes Beispiel: Allgemeine Relativitätstheorie

Feld ist eine Eigenschaft des Raums

Im Allgemeinen nicht direkt messbar, nur über Wirkung auf Teilchen (Kräfte auf Teilchen bzw. zwischen Teilchen)

Hat trotzdem Eigendynamik (Wellen etc.)

Struktur der Theorie kann aus Symmetrieüberlegungen abgeleitet – oder zumindest motiviert – werden.

("Lorentzvinvarianz, Eichinvarianz, siehe Kapitel 3).

Klassisch: "Felder" und "Teilchen" sind klar unterschiedliche Konzepte

Quantenmechanisch: Unterschied löst sich auf:

- Welle-Teilchen Dualismus (Experimentalphysik 3, Theorie 3)
Teilchen werden durch Wellen beschrieben
- Quantenfeldtheorie (Theorie 5 und Folgende)
Teilchen sind im Wesentlichen Anregungen von Feldern
(z.B. elektromagnetisches Feld ↔ Photonen)

Kapitel 1

Grundbegriffe der Elektrodynamik

Historisches

- Antike **Altägyptisch (Kahun Papyri); Indisch (Veden); China; Griechenland (Thales von Milet)**
Reibungselektrizität von Bernstein (griechisch: "Elektron").
Magnetismus von Magnetit (griechisch "Stein aus Magnesia").
- 1600 **William Gilbert**
Erste neuzeitliche Abhandlung über Magnetismus und Reibungselektrizität ("de magnete").
- 1729 **Stephen Gray**
Elektrizität kann fließen.
- 1782 **Benjamin Franklin**
Ladung bleibt erhalten.
- 1767 **Joseph Priestley**
Elektrostatische Kräfte zwischen Ladungen fallen wie $1/r^2$ ab.
(deskriptiv, Analogie zur Gravitation).
- 1785 **Charles-Augustin de Coulomb**
Coulombgesetz (Kraft zwischen Ladungen $F \sim q_1 q_2/r^2$).
Magnetostatik.
- 1800 **Alessandro Volta**
Erste chemische Stromquelle.
- ~ 1800 **Michael Faraday**
Erstmals begriff des Feldes (statt Fernwirkung).
Anschauung: zugrundeliegender "Äther" (elastisches Medium).
- 1813 **Siméon-Denis Poisson**
Poisson-Gleichung (für das elektrostatische Potential).
→ mit Ladungserhaltung vollständige Theorie der Elektrostatik

- 1820 **Hans Christian Ørsted**
Elektrischer Strom kann Magnetfelder produzieren.
↪ Erste Verbindung zwischen Elektrizität und Magnetismus.
- 1820 **André-Marie Ampère**
quantitativ dazu: Ampère-Gesetz
- 1831 **Michael Faraday**
Magnetismus kann elektrischen Strom erzeugen.
(Faradaysches Induktionsgesetz).
- 1861-
1864 **James Clerk Maxwell**
Maxwell-Gleichungen.
Abgeschlossene Theorie der Elektrodynamik, Bis heute gültig.

1.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

Es soll nun ohne weitere Vorrede gleich die vollständigen Grundgleichungen der Elektrodynamik eingeführt werden ("Herleitung" später in Kapitel 3).

Gegenstand der Elektrodynamik, bzw. physikalische Objekte, mit denen sich die Elektrodynamik beschäftigt, sind:

- Felder: $\vec{E}(\vec{r}, t)$: Elektrisches Feld
 $\vec{B}(\vec{r}, t)$: Magnetisches Feld
- Ladungen: Punktladungen q bzw. Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$.

Es gilt Ladungserhaltung: Ladung kann nicht irgendwo entstehen oder verschwinden, sondern muß immer hin- oder abfließen.

⇒ Es muß eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ geben, so daß für die Gesamtladung Q in einem Gebiet G mit Oberfläche ∂G gilt ($Q = \int_G dV \rho(\vec{r}, t)$) :

$$\frac{d}{dt} Q = \int_G dV \partial_t \rho \stackrel{!}{=} - \int_{\partial G} d\vec{A} \cdot \vec{j} \stackrel{\text{Gauß'scher Satz}}{=} - \int_G dV \nabla \cdot \vec{j}.$$

Da dies für alle möglichen Gebiete gelten muß, folgt

Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$

Konkret: Für ein System von Punktladungen q_i an den Orten \vec{r}_i ist

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \text{ und}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

(↪ $\vec{j} = \rho \langle \vec{v} \rangle$ mit $\langle \vec{v} \rangle$: Mittlere Ladungsgeschwindigkeit).

1.1.1 Die elementaren Gleichungen

* Maxwellgleichungen im Vakuum:

$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$
inhomogene Maxwellgleichungen	homogene Maxwellgleichungen

* Lorentzkraft auf Punktladung q der Geschwindigkeit \vec{v}
bzw. Kraftdichte $\vec{f}(\vec{r}, t)$ auf Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right) \quad \text{bzw.} \quad \vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})$$

Mit der Zusatzbedingung, dass \vec{E} und \vec{B} im Unendlichen verschwinden sollen, ist dieses Gleichungssystem vollständig, wegen des Helmholtzschen Satzes: Ein Vektorfeld, das im Unendlichen verschwindet, ist durch seine Divergenz und Rotation eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Hier verwenden wir das Gaußsche Maßsystem.

Allgemeiner lauten die Grundgleichungen der Elektrodynamik:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{4\pi}{k_1}\rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{k_2}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{k_1 k_2 c}\vec{j} + \frac{1}{c k_2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

und Lorentzkraft: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{k_2}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right)$.

Vorfaktoren k_i in gebräuchlichen Maßsystemen:

Maßsystem	k_1	k_2	Ladungseinheit
Gauß	1	1	$[\text{Masse}]^{1/2}[\text{Länge}]^{3/2}/[\text{Zeit}]$
Heaviside-Lorentz	4π	1	$[\text{Masse}]^{1/2}[\text{Länge}]^{3/2}/[\text{Zeit}]$
Elektrostatische Einheiten (esE)	1	c	$[\text{Masse}]^{1/2}[\text{Länge}]^{3/2}/[\text{Zeit}]$
Elektromagnetische Einheiten (emE)	$1/c^2$	c	$[\text{Masse}]^{1/2}[\text{Länge}]^{1/2}$
SI Einheiten	$4\pi\epsilon_0$	c	As

mit $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{A}^2\text{s}^4/\text{kg m}^3$

Hintergrund: Unterschiedliche Einheiten für \vec{E} , \vec{B} und Ladung.

Darüberhinaus unterscheiden sich i.A. auch noch die Einheiten für Masse, Länge und Zeit (z.B. cm,g,s statt m,kg,s).

1.1.2 Diskussion der Gleichungen

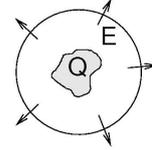
1.1.2.1 Bedeutung der statischen Terme

Betrachte Situation, in der die Felder und Dichten stationär sind,
d.h. $\partial_t \vec{E} = \partial_t \vec{B} = \partial_t \rho = \partial_t \vec{j} = 0$.

(i) $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \Leftrightarrow$ Gaußsches Gesetz

$$\int_{\text{Oberfläche } \partial V \text{ eines Volumens } V} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi \underbrace{Q_V}_{\text{eingeschlossene Ladung}}$$

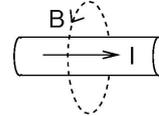
(Verbindung: Gaußscher Satz)



(ii) $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Leftrightarrow$ Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\text{Kurve } C, \text{ die eine Fläche } O \text{ umschließt}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{I}_{\text{Strom durch Fläche } O}$$

(Verbindung: Stokescher Satz)



(iii) $\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert Potential Φ mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$

Zusammen mit (i) folgt Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$

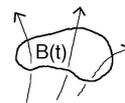
(iv) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert Vektorpotential \vec{A} mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
(mehr dazu in 1.1.4).

1.1.2.2 Bedeutung der zeitabhängigen Terme

Zusatzterme im Fall $\partial_t \vec{E} \neq 0, \partial_t \vec{B} \neq 0$

(i) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \Leftrightarrow$ Faradaysches Induktionsgesetz

$$\int_{\text{Leiterschleife}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt}$$



mit Φ_m : magnetischer Fluss durch Leiterschleife, $\Phi_m = \int d\vec{A} \cdot \vec{B}$

(Verbindung: Stokescher Satz)

(ii) $\nabla \times \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$: Maxwellscher Verschiebungsstrom

Zusatzterm nötig, um Ladungserhaltung zu gewährleisten.

(Ladungserhaltung: Fordere $\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$)

Es gilt $4\pi\rho = \nabla \cdot \vec{E} \Rightarrow \partial_t \rho = \frac{1}{4\pi} \partial_t \nabla \cdot \vec{E}$

Mit $\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$ folgt $\nabla \cdot \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B})}_0 - \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \partial_t \vec{E}$

$\Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ erfüllt, aber nur bei Anwesenheit des Zusatzterms.)

1.1.3 Energie und Impuls

In der Mechanik waren zentrale Begriffe die Energie und der Impuls.

Frage: Wie sieht das hier in der Elektrodynamik aus? Gibt es erhaltene Größen, die man mit Energie bzw. Impuls identifizieren könnte?

1.1.3.1 Der Energiesatz der Elektrodynamik

Ausgangspunkt: Energiebilanz für Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Auf Teilchen wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}))$

→ verrichtet Leistung $\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot \vec{E} + \frac{q}{c} \underbrace{\vec{v}(\vec{v} \times \vec{B})}_0 = q \vec{v} \cdot \vec{E}$

⇒ Energiegewinn oder -verlust des Teilchens pro Zeit: $\frac{dE}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E}$

Analog: Auf Ladungsverteilung ρ wirkt Kraftdichte $\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})$

→ entspricht Leistungsdichte $W = \vec{j} \cdot \vec{E}$

⇒ Energiegewinn oder -verlust der Materie: $\partial_t e + \nabla \cdot \vec{j}_e = \vec{j} \cdot \vec{E}$,

mit $e(\vec{r}, t)$: Energiedichte der Materie

und \vec{j}_e : Dichte des Energiestroms in der Materie

(Ströme z.B. wegen Teilchentransport oder wegen Stößen)

Frage: Lässt sich Energieänderung in der Materie auf eine Energieänderung im elektromagnetischen Feld zurückführen?

Ansatz: Drücke $\vec{j} \cdot \vec{E}$ nur als Funktion von \vec{E}, \vec{B} aus:

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{c}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right) \cdot \vec{E} \quad \underbrace{-\frac{1}{c} \partial_t \vec{E}} \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \right) \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}) \\ &= -\nabla \cdot \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] - \partial_t \left[\frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] =: -\nabla \cdot \vec{S} - \partial_t u \end{aligned}$$

⇒ Zusammen: $\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ Poynting-Theorem

mit $u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$ Energiestromdichte bzw. "Poynting-Vektor"

$W = \vec{j} \cdot \vec{E}$ Am/vom Feld geleistete Arbeit pro Zeit und Volumen.

Folgerungen:

Für $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ gilt $\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} = 0$
Kontinuitätsgleichung für Feldenergie

Für $\vec{j} \cdot \vec{E} \neq 0$ ist $\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{d}{dt} e$:

Energie wird vom Feld an Materie abgegeben und umgekehrt.

Feld + Materie zusammen: Energieerhaltung!

1.1.3.2 Impulssatz und Maxwell'scher Spannungstensor

Ausgangspunkt: Impulsbilanz für Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ hat Impuls mit Dichte $\vec{p}(\vec{r}, t)$

Ohne elektromagnetisches Feld gilt lokale Impulserhaltung: $\partial_t \vec{p} + \nabla \cdot \vec{\Pi} = 0$
mit $\vec{\Pi}$: Impulsflussdichte der Materie

(Impulsfluss z.B. wegen Konvektion oder Stößen)

Lorentzkraft bewirkt Impulsänderung $\Rightarrow \partial_t \vec{p} + \nabla \cdot \vec{\Pi} = \vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$

Drücke diese wieder als Funktion von \vec{E} und \vec{B} aus:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{f} &= \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \\ &\left| \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \vec{E}; \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}) \\ = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) - \frac{1}{c} (\partial_t \vec{E}) \times \vec{B}) \end{array} \right. \\ &\left| \begin{array}{l} \text{Addiere } \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \\ \text{Ersetze } (\partial_t \vec{E}) \times \vec{B} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \times \partial_t \vec{B} = \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) + c \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \end{array} \right. \\ = \frac{1}{4\pi} &\left[\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] - \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &\left| \begin{array}{l} \text{Schreibe um} \\ [\vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})]_i = \sum_j E_i \partial_j E_j - \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m \\ \left| \begin{array}{l} \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\ = \sum_j (E_i \partial_j E_j - E_j \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i) = \sum_j \partial_j (E_i E_j) - \frac{1}{2} \partial_i \vec{E}^2 \\ = \sum_j \partial_j (E_i E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij}) \end{array} \right. \\ \text{Dasselbe für } \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \end{array} \right. \\ \Rightarrow f_i &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \partial_j \underbrace{[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \delta_{ij}]}_{=: T_{ij}} - \partial_t \underbrace{\frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{B}]_i}_{=: g_i} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Zusammen: } \boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_i - \sum_j \partial_j T_{ji} = -f_i}$$

$$\text{mit } \boxed{\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})} \quad \underline{\text{Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes.}}$$

$$\boxed{T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2))} \quad \underline{\text{negative Impulsstromdichte bzw. "Maxwell'scher Spannungstensor"}}$$

$$\boxed{\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}} \quad \text{Mechanische Impulsänderung der Teilchen durch elektromagnetisches Feld (pro Volumen)}$$

Folgerung und Interpretation

Für $\vec{f} = 0$ gilt $\boxed{\partial_t \vec{g} - \nabla \cdot \vec{T} = 0}$ mit $\vec{T} = (T_{ij})$, (mit $[\nabla \cdot \vec{T}]_i = \sum_j \partial_j T_{ij}$)
 \rightarrow Kontinuitätsgleichung für Feldimpuls

Für $\vec{f} \neq 0$ ist $\partial_t \vec{g} - \nabla \cdot \vec{T} = -\vec{f}$:

Übertrag von Impuls vom Feld an Materie und umgekehrt.

Feld + Materie zusammen: Impulserhaltung!

1.1.4 Elektromagnetische Potentiale

1.1.4.1 Einführung der Potentiale

Teilweise Lösung der Maxwell'schen Gleichungen durch Rückführung von \vec{E} und \vec{B} auf geeignete Potentiale (analog 1.1.1 für stationäre Felder).

* $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow$ Es existiert ein Vektorpotential mit $\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$.

(Beweis: \Leftarrow : da $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \forall \vec{A}$.

\Rightarrow : "Errate" ein \vec{A} , welches $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ erfüllt.

Ansatz: $A_k = -\frac{1}{3} \epsilon_{klm} \int dr_l B_m$ (d.h. $A_x = \frac{1}{3} \int dz B_y - \frac{1}{3} \int dy B_z$ etc.)

$$\begin{aligned} \rightarrow [\nabla \times \vec{A}]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = -\frac{1}{3} \sum_{jlm} \underbrace{\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \int dr_l \partial_j B_m \\ &= -\frac{1}{3} \int dr_i \underbrace{\sum_j \partial_j B_j}_{\nabla \cdot \vec{B} = 0} + \frac{1}{3} \sum_j \int dr_j \underbrace{\partial_j B_i}_{3B_i} = B_i \quad \checkmark \end{aligned}$$

* $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \partial_t \vec{A} \Rightarrow \nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}) = 0$

\Leftrightarrow Es existiert skalares Potential Φ mit $\boxed{\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}}$.

Bemerkung: Damit kann man auch ein geschwindigkeitsabhängiges "generalisiertes Potential" U für die Lorentzkraft \vec{F} definieren (siehe Theorie 1):

$$\boxed{F_i = \left[-\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \right] U(\vec{r}, \vec{v}, t)} \quad \text{mit} \quad \boxed{U(\vec{r}, \vec{v}, t) = q \left(\Phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)}$$

$$\begin{aligned} (\text{Rechnung: } F_i &= \left[-\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} \right] U = -q \partial_i \Phi + \frac{q}{c} (v_j \partial_i A_j - \frac{d}{dt} A_i(\vec{r}, t)) \\ &= -q \partial_i \Phi + \frac{q}{c} \underbrace{(v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i - \partial_t A_i)}_{[\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_i} \\ &= -q (\partial_i \Phi + \frac{1}{c} \partial_t A_i) + \frac{q}{c} [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})]_i = q (E_i + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]_i) \quad \checkmark \end{aligned}$$

1.1.4.2 Eichtransformationen

Eichfreiheit: \vec{A} und Φ sind nicht eindeutig:

Man kann mit beliebigem skalarem Potential "umeichen" gemäß

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda(\vec{r}, t) \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda(\vec{r}, t) \end{aligned}}$$

(Check: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$, da $\nabla \times \nabla \Lambda = 0 \checkmark$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi' - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}' = -\nabla (\Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda) - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \frac{1}{c} \partial_t \nabla \Lambda = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \quad \checkmark)$$

Diskussion: \vec{A} und Φ sind Hilfsgrößen ohne physikalische Realität.

Dagegen haben \vec{E} und \vec{B} physikalische Realität, da über Lorentzkraft mit Testladung direkt messbar \rightarrow eindeutig!

Hintergrund: Enger Zusammenhang mit der Invarianz der Lagrange-Mechanik unter Addition einer totalen Zeitableitung zur Lagrangefunktion (siehe Theorie 1 und Kapitel 3).

Beliebte Eichungen (Zusatzbedingungen, die Λ festlegen)

Lorenzeichung: Eichbedingung $\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$

Coulombeichung: Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

1.1.4.3 Maxwellgleichungen ausgedrückt in Potentialen

Beachte: Durch Einführung der Potentiale sind homogenen Maxwellgleichungen automatisch gelöst. Es bleiben nur die inhomogenen Maxwellgleichungen. Ihre Form hängt von der Wahl der Eichung ab.

Generell: Definiere d'Alembert Operator: $\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$\Rightarrow \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \nabla \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} \right), \quad \square \Phi = 4\pi \rho + \frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} \right)$$

(Herleitung:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \vec{A}$$

$$\Rightarrow \square \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \nabla \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad \checkmark$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \Rightarrow -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \vec{A} = 4\pi \rho$$

$$\Rightarrow \square \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \Delta \Phi = 4\pi \rho + \frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad \checkmark$$

1) Lorenzeichung:

$$\Rightarrow \text{Maxwellgleichungen: } \boxed{\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \square \Phi = 4\pi \rho}$$

$$\text{mit Eichbedingung } \boxed{\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

2) Coulombeichung:

$$\Rightarrow \text{Maxwellgleichungen: } \boxed{\Delta \Phi = -4\pi \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \nabla \partial_t \Phi}$$

$$\text{mit Eichbedingung } \boxed{\nabla \cdot \vec{A} = 0}$$

Vorteile der Coulombeichung: Besonders günstig bei $\rho = 0$ (Optik).

1.1.5 Zusammenfassung von Kapitel 1.1

- Fundamentale Gleichungen der Elektrodynamik:
Maxwellgleichungen im Vakuum
- Diskussion von Energie- und Impulsbilanz
→ Energie und Impuls elektromagnetischer Felder
- Elektromagnetische Potentiale
 - vorerst einfach nur Hilfsmittel zur Lösung der Maxwellgleichungen
 - künftig wichtiges Konzept: Eichfreiheit und Eichinvarianz

1.2.2 Elementare Lösungen

1.2.2.1 Elektrostatik und Coulomb-Potential

Wichtigste elementare Lösung der Elektrostatik:

Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -4\pi\rho$ im unbegrenzten Raum für beliebige stationäre Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

* Potential einer einzelnen Punktladung q am Ursprung

Symmetrie und Wirbelfreiheit von $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{r}/r$.

Lege Kugel K (Radius R) um Punktladung, wende Gaußsches Gesetz an.:

$$\int_{\partial K} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 E(r) \stackrel{!}{=} 4\pi \underbrace{Q_K}_{\substack{\text{eingeschlossene} \\ \text{Ladung}}} = 4\pi q \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = q \vec{r}/r^3.$$

Mit $\vec{r}/r^3 = -\nabla(1/r)$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$ erhält man für das Potential Φ

das Coulomb-Potential $\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}$

* Potential und elektrisches Feld einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

Wegen des Superpositionsprinzips addieren sich Beiträge auf.

Beitrag einer infinitesimalen Ladung $\rho(\vec{r}') d^3r'$: $d\Phi = d^3r' \rho(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$.

Zusammen: $\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

1.2.2.2 Magnetostatik und Biot-Savart-Ampèresches Gesetz

Betrachte nun analoges Problem der Magnetostatik:

Lösung der vektoriiellen Poisson-Gleichung $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ für vorgegebene stationäre Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ mit zusätzlicher Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

* Potential und Magnetfeld einer beliebigen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$

Analogie zur Elektrostatik ($\Delta\Phi = -4\pi\rho \rightarrow \Phi = \int d^3r' \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Überprüfe Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &\quad \left| \text{partielle Integration, } \vec{j} \rightarrow 0 \text{ im Unendlichen} \right. \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0 \text{ wegen } \nabla \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = 0 \text{ (stationär)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für das Magnetfeld ergibt sich: $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

* Anwendung: Biot-Savart-Ampèresches Gesetz

Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern.

– Magnetfeld des Leiters 2: $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}_2(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

– Lorentzkraft auf Leiter 1: Integral über Kraftdichte $\vec{f} = \frac{1}{c}(\vec{j}_1 \times \vec{B}_2)$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' \vec{j}_1(\vec{r}) \times (\vec{j}_2(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}) \\ &= \frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' \left[\vec{j}_2(\vec{r}') (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}) - \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')) \right] \\ &\quad \left| \int d^3r \vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = - \int d^3r \vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right. \\ &\quad \left. = \int d^3r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}_1(\vec{r})}_0 = 0 \right. \\ &= -\frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{1}{c} \iint d^3r d^3r' (\vec{j}_1(\vec{r}) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}')) \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

1.2.3 Multipolentwicklung

1.2.3.1 Idee der Multipolentwicklung

Im unbegrenzten Raum: Elektro- und Magnetostatik im Prinzip gelöst.

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \text{ bzw. } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Häufig kennt man ρ und \vec{j} aber gar nicht so genau bzw. braucht Φ und \vec{A} gar nicht so genau zu wissen. \rightarrow Entwicklung nach wichtigsten Beiträgen.

Hier: Diskutiere wichtigsten derartigen Fall:

$\rho(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ räumlich begrenzt auf kompakten Träger (z.B. Molekül).

Gesucht ist das von ρ bzw. \vec{j} erzeugte Feld in großer Entfernung.

Konkrete Fragestellung lautet also: Angenommen, es gäbe ein $R > 0$, so dass

$\rho(\vec{r}') = 0$ bzw. $\vec{j}(\vec{r}') = 0$ für $r' > R$ (zumindest in guter Näherung).

Suche resultierende Potentiale bzw. Felder bei $r \gg R$ (Fernfeld)

\leadsto Entwicklung nach Potenzen von $1/r$: Multipolentwicklung.

Vorgehen: Entwickle $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ nach Potenzen von $1/r$.

Es gibt zwei populäre Darstellungen:

(i) In kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } (1 + \alpha)^{-1/2} \text{ nach kleinem Parameter} \\ \alpha = -2\vec{r} \cdot \vec{r}'/r^2 + (r'/r)^2 \\ \text{Sortiere nach Potenzen von } 1/r. \quad \text{Definiere } \vec{e}_r = \vec{r}/r. \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} (\vec{e}_r \cdot \vec{r}') + \frac{1}{r^3} \left(\frac{3}{2} (\vec{e}_r \cdot \vec{r}')^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right) + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \sum_i e_{ri} r'_i + \frac{1}{r^3} \sum_{ij} e_{ri} e_{rj} \left(\frac{3}{2} r'_i r'_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} r'^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

\leadsto Setze ein in Gleichung für Potential Φ bzw. \vec{A} .

$1/r \rightarrow$ Monopolbeitrag.

$1/r^2 \rightarrow$ Dipolbeitrag.

$1/r^3 \rightarrow$ Quadrupolbeitrag.

(ii) In Kugelkoordinaten (systematischer)

$$\text{Ansatz: } \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} a_l(\theta, \phi),$$

Entwickle $a_l(\theta, \phi)$ weiter nach "Kugelflächenfunktionen" $Y_{lm}(\theta, \phi)$

Man erhält (siehe z.B. Jackson)

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\frac{4\pi}{2l+1} r'^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \right) \text{ für } r > r'$$

Bemerkung: In niedrigeren Ordnungen wird i.A. kartesische Darstellung bevorzugt, auch in dieser Vorlesung. Trotzdem sollen im Folgenden kurz die wesentlichen Fakten zu Kugelflächenfunktionen zusammengestellt werden. Mehr dazu kommt in Theorie 3 (Quantenmechanik) (siehe auch Skript "Mathematische Rechenmethoden", Kapitel 9.2.4).

Ergänzung: Einschub zu Kugelflächenfunktionen

- Vollständiger Satz von Funktionen des Raumwinkels, jede "vernünftige" Funktion $f(\theta, \phi)$ kann nach ihnen entwickelt werden.
- Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplace-Operators: In Kugelkoordinaten ist $\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2$ mit $\hat{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$. Es gilt $\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$ (und $\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = -m^2 Y_{lm}(\theta, \phi)$)

Daraus folgt: Potentiale $\Phi(\vec{r})$ mit $\Delta \Phi = 0$ können folgendermaßen entwickelt werden: $\Phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} (a_{lm} r^l + b_{lm}/r^{l+1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$

(Rechnung dazu:

$$\text{Ansatz } \Phi(\vec{r}) = c_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \Rightarrow \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r c_{lm}(r) = \frac{1}{r^2} l(l+1) c_{lm}(r)$$

$$\text{Substituiere } c_{lm}(r) = u(r)/r \Rightarrow \partial_{rr} u(r) = \frac{1}{r^2} l(l+1) u(r)$$

$$\Rightarrow u(r) \propto r^\alpha \text{ mit } \alpha(\alpha-1) = l(l+1) \Rightarrow \alpha = l+1 \text{ oder } \alpha = -l$$

$$\Rightarrow c_{lm}(r) = a_{lm} r^l + b_{lm}/r^{l+1})$$

NB: Diese Eigenschaft macht die Kugelflächenfunktionen im Kontext der Multipolentwicklung interessant, da für $r > R$ die Potentiale die Laplace-Gleichung erfüllen: $\Delta \Phi = 0$ bzw. $\Delta \vec{A} = 0$.

- Orthonormal: $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
- Vollständig: $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$

Daraus folgt, dass man alle $f(\theta, \phi)$ nach Y_{lm} entwickeln kann:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm} \text{ mit } c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$$

- Konkrete Form: $Y_{lm}(\theta, \phi) = \mathcal{N}_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ für $l \geq m \geq 0$,
 $Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$
mit $P_l^m(x)$: Zugeordnete Legendre-Polynome
und \mathcal{N}_{lm} : Normierung

- Spezielle Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} & Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ & & Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{aligned}$$

1.2.3.2 Multipolentwicklung in der Elektrostatik

Betrachte nun speziellen Fall einer begrenzten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$

Fragen: 1) Wie verhält sich das elektrostatische Feld in großer Entfernung?

2) Welche Gesamtkraft wirkt auf die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in einem äußeren elektrostatisches Feld?

zu 1) Berechnung des Fernfeldes bzw. Potentials in großer Entfernung

Multipolentwicklung für Potential $\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
basierend auf der Entwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ aus 1.2.4.1

(i) In kartesischen Koordinaten:

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\vec{r}')}_{=q: \text{Gesamtladung}} + \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{=:\vec{p}} + \frac{1}{r^3} \sum_{ij} e_{ri} e_{rj} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}') \left(\frac{3}{2} r'_i r'_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} r'^2 \right)}_{=:\frac{1}{2} Q_{ij}}$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{r} q + \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{p} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \vec{e}_r \overset{\leftrightarrow}{Q} \vec{e}_r + \dots$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r q + \frac{1}{r^3} (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}) + \frac{1}{r^4} \left(\frac{5}{2} \vec{e}_r (\vec{e}_r \overset{\leftrightarrow}{Q} \vec{e}_r) - \overset{\leftrightarrow}{Q} \vec{e}_r \right) + \dots$$

\leadsto Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ wird durch Momente charakterisiert:

$q = \int d^3r \rho(\vec{r})$ (Gesamtladung)	: Monopol \oplus
$\vec{p} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r}$: Dipolmoment \oplus
$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r}) (3 r_i r_j - \delta_{ij} r^2)$: Quadrupolmoment \oplus
etc.	(höhere Ordnungen)

NB: $\overset{\leftrightarrow}{Q} = (Q_{ij})$ ist ein Beispiel für einen physikalischen Tensor
Es gilt $Q_{ij} = Q_{ji}$, $\text{Spur}(Q) = \sum_i Q_{ii} = 0$

(ii) In Kugelkoordinaten

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\frac{4\pi}{2l+1} r'^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \right)$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm}$$

$$\text{mit } q_{lm} = \int d^3r \rho(\vec{r}) r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad \underline{\text{Multipolmoment}}$$

Konkret z.B.: $q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} q$, $q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$, $q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - i p_y)$

Für das elektrostatische Feld erhält man mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+2}} \left(\vec{e}_r (l+1) Y_{lm} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm} \right)$$

zu 2) Kraft auf Ladungsverteilung in äußerem Feld \vec{E}_{ext}

Betrachte nun eine starre, aber als Ganzes verschiebbare Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r} - \vec{r}_0)$, $\rho_0(\vec{r})$ starr. Multipole sind bzgl. $\rho_0(\vec{r})$ definiert.

\vec{E}_{ext} variere nur langsam und $\nabla \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = 0$ im Bereich $\rho(\vec{r}) \neq 0$.

Berechne zuerst die potentielle Energie von $\rho(\vec{r})$ im Potential Φ_{ext} mit $\vec{E}_{\text{ext}} = -\nabla\Phi_{\text{ext}}$ (Φ_{ext} schließt das von ρ erzeugte Potential Φ_0 *nicht* ein!)

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \int d^3r \rho_0(\vec{r} - \vec{r}_0) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \int d^3r \rho_0(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r} + \vec{r}_0) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \text{ um } \vec{r} = \vec{r}_0 \\ \Phi_{\text{ext}}(\vec{r} + \vec{r}_0) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \vec{r} \cdot \nabla\Phi_{\text{ext}}|_{\vec{r}_0} + \frac{1}{2} \sum_{ij} r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Phi_{\text{ext}}|_{\vec{r}_0} + \dots \\ | \quad \vec{E}_{\text{ext}} = -\nabla\Phi_{\text{ext}} \\ = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{2} \sum_{ij} r_i r_j \partial_j E_{\text{ext},i}|_{\vec{r}_0} + \dots \\ | \quad \text{Füge ein: } 0 = \frac{1}{6} \nabla \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{1}{6} \sum_{ij} \delta_{ij} \partial_j E_{\text{ext},i} \\ = \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} (3 r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_j E_{\text{ext},i}|_{\vec{r}_0} + \dots \end{array} \right\} \\ &= \int d^3r \rho_0(\vec{r}) \left\{ \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} (3 r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_j E_{\text{ext},i}|_{\vec{r}_0} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(\vec{r}_0) = q \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \partial_j E_{\text{ext},i}|_{\vec{r}_0} + \dots$$

$$\Rightarrow \text{Kraft auf Ladungsverteilung: } \vec{F} = -\nabla U = q \vec{E}_{\text{ext}} + \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}) + \dots$$

↪ Kraft wird auch von Multipolen bestimmt.

Ladung erfährt Kraft in Richtung Feld

Dipol erfährt Kraft in Richtung Feldgradient etc.

Bemerkung: Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man von der im elektrostatischen Feld gespeicherten Wechselwirkungsenergie ausgeht:

– Gesamtenergie: $E_{\text{total}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}_\rho + \vec{E}_{\text{ext}})^2$ (\vec{E}_ρ : Feld von ρ)

– Energie des externen Feldes: $E_{\text{ext}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}_{\text{ext}}^2$

– Energie des Feldes von ρ : $E_\rho = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}_\rho^2$

↪ Wechselwirkungsenergie: $E_{\text{WW}} = E_{\text{total}} - E_{\text{ext}} - E_\rho = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{E}_\rho \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$

Es gilt: $E_{\text{WW}} = \int dr \rho(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = U$

$$\begin{aligned} (\text{Denn: } \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} &= \int d^3r (\nabla\Phi_\rho) \cdot (\nabla\Phi_{\text{ext}}) = \int d^3r \nabla(\Phi_{\text{ext}} \cdot \nabla\Phi_\rho) - \int d^3r \underbrace{\Delta\Phi_\rho}_{-4\pi\rho} \Phi_{\text{ext}} \\ &= 4\pi \int d^3r \rho \Phi_{\text{ext}} \quad \text{Gauss: Randterm, verschwindet} \end{aligned}$$

Aber Achtung: In der Magnetostatik ist der Zusammenhang zwischen Feldenergie und Potential eines Dipols nicht so einfach.

(siehe Diskussion am Ende von 1.2.3.3)

Fazit aus 1) und 2) :

Räumlich begrenzte Ladungsverteilungen können durch Multipolmomente charakterisiert werden. Nützliches Konzept besonders im statischen Fall.

- Beinhalten wichtigste Informationen über das Potential der Ladungsverteilung bei großen Abständen
- Beschreiben die Wechselwirkungen mit äußeren Feldern

1.2.3.3 Multipolentwicklung in der Magnetostatik

Nun: Betrachte entsprechendes Problem der Magnetostatik:

Begrenzte (starre) stationäre Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$.

Fragen analog wie beim elektrostatischen Fall:

- 1) Wie verhält sich das magnetostatische Feld in großer Entfernung?
- 2) Welche Gesamtkraft wirkt auf die Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in einem äußeren magnetostatisches Feld?

zu 1) Multipolentwicklung des Fernfeldes bis zur Dipol-Ordnung

Ausgehend von dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (vgl. 1.2.3) und basierend auf der Entwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ aus 1.2.4.1

→ Fernfeld wird durch Momente der Stromverteilung bestimmt:

$$A_k(\vec{r}) = \frac{1}{r} q_k^{(m)} + \frac{1}{r^2} \sum_j e_{rj} p_{kj}^{(m)} + \dots$$

$$\text{mit Monopol: } q_k^{(m)} = \frac{1}{c} \int d^3 r j_k(\vec{r}),$$

$$\text{Dipol: } p_{kj}^{(m)} = \frac{1}{c} \int d^3 r j_k(\vec{r}) r_j, \quad \text{etc.}$$

Einschränkungen wegen Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \vec{j} = 0$:

$$\text{Monopolterm: } q_k^{(m)} = \frac{1}{c} \int d^3 r j_k(\vec{r}) = 0$$

$$\text{(Denn: } \int d^3 r j_k(\vec{r}) \underset{j_k = \vec{j} \cdot (\nabla r_k)}{=} \int d^3 r \vec{j} \cdot (\nabla r_k) = \underbrace{\int d^3 r \nabla(\vec{j} r_k)}_{\text{Gauß: } \int_{\infty} d\vec{A} \cdot (\vec{j} r_k) = 0} - \int d^3 r \underbrace{(\nabla \cdot \vec{j}) r_k}_{=0} = 0)$$

⇒ Es gibt keine magnetischen Monopole!

$$\text{Dipolterm: } p_{kl}^{(m)} = \frac{1}{c} \int d^3 r j_k(\vec{r}) r_l \text{ ist antisymmetrisch: } p_{kl}^{(m)} = -p_{lk}^{(m)}$$

$$\text{(Denn: } p_{kl}^{(m)} + p_{lk}^{(m)} = \int d^3 r (j_k r_l + j_l r_k) \underset{j_k = \vec{j} \cdot (\nabla r_k)}{=} \int d^3 r (r_l \vec{j} \cdot (\nabla r_k) + r_k \vec{j} \cdot (\nabla r_l)) \\ = \underbrace{\int d^3 r \nabla(r_k r_l \vec{j})}_{\text{Gauß: } \int_{\infty} d\vec{A} (r_k r_l \vec{j}) = 0} - \int d^3 r (r_k r_l \underbrace{\nabla \cdot \vec{j}}_{=0}) = 0)$$

$$\Rightarrow p_{kj}^{(m)} =: \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ wirkt als Kreuzprodukt } \vec{p} \vec{b} \equiv \vec{m} \times \vec{b} \forall \vec{b}.$$

$$\text{mit } m_i = \frac{1}{2} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} p_{kj}^{(m)} = \frac{1}{2c} \int d^3 r \sum_{jk} \epsilon_{ijk} j_k r_j = \frac{1}{2c} \int d^3 r [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})]_i$$

$$\text{Fazit: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \vec{m} \times \vec{e}_r + \dots$$

$$\text{mit } \vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \quad \underline{\text{magnetisches Moment}}$$

$$\text{Man erhält das Magnetfeld } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^3} (3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{m}) - \vec{m}) + \dots$$

zu 2) Kraft auf Stromverteilung in einem externen Magnetfeld \vec{B}_{ext}

Betrachte starre, als Ganzes verschiebbare Stromverteilung $\vec{j}_d(\vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{r} - \vec{r}_0)$
 \vec{B}_{ext} variere nur langsam. Berechne magnetische Kraft \vec{F} auf $\vec{j}_d(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}_d \times \vec{B}_{\text{ext}}]_k = \sum_{lm} \epsilon_{klm} \frac{1}{c} \int d^3r' j_{0,l}(\vec{r}') B_{\text{ext},m}(\vec{r}' + \vec{r}_0) \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } \vec{B}_{\text{ext}}: B_{\text{ext},m}(\vec{r}' + \vec{r}_0) = B_{\text{ext},m}(\vec{r}_0) + \sum_n r'_n \partial_n B_{\text{ext},m}|_{\vec{r}_0} \\ = \sum_{lm} \epsilon_{klm} B_{\text{ext},m}|_{\vec{r}_0} \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3r' j_{0,l}}_{q_l^{(m)=0}} + \sum_{lmn} \epsilon_{klm} \partial_n B_{\text{ext},m}|_{\vec{r}_0} \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3r' j_{0,l} r'_n}_{p_{ln}^{(m)}} \end{array} \right. \\
 &= \sum_{lm} \epsilon_{klm} \underbrace{\sum_n p_{ln}^{(m)} \partial_n}_{[\vec{m} \times \nabla]_l} B_{\text{ext},m}|_{\vec{r}_0} = [(\vec{m} \times \nabla) \times \vec{B}_{\text{ext}}]_k = \partial_k (\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}) - m_k \underbrace{(\nabla \cdot \vec{B}_{\text{ext}})}_0 \\
 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}) + \dots} \quad (\text{analog Elektrostatik})
 \end{aligned}$$

Frage: Gibt es hier auch wieder ein zugehöriges Potential?

- Pro: Kraft \vec{F} kann formal auf ein "magnetisches Potential" zurückgeführt werden: $\vec{F} = -\nabla U^{(m)}$ mit $U^{(m)} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$ in Dipolnäherung und allgemeiner: $U^{(m)}(\vec{r}_0) = -\int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}')$

(Dipolnäherung: klar

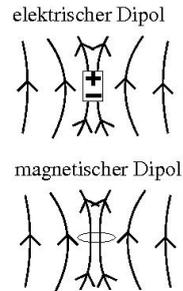
$$\begin{aligned}
 \text{Allgemeiner: } \vec{F} &= \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}_d(\vec{r}) \times \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r})] = \frac{1}{c} \int d^3r [\vec{j}_d \times (\nabla \times \vec{A}_{\text{ext}})] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r \sum_l [j_{d,l} \nabla A_{\text{ext},l} - j_{d,l} \partial_l \vec{A}_{\text{ext}}] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r [\sum_l j_{d,l} \nabla A_{\text{ext},l} + \vec{A}_{\text{ext}} \underbrace{\sum_l \partial_l j_{d,l}}_{\nabla \cdot \vec{j}_d=0} - \frac{1}{c} \int d^3r \sum_l \partial_l (j_{d,l} A_{\text{ext},k})] \\
 &\quad \text{Gauss: Randterm, verschwindet} \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r \sum_l j_{0,l}(\vec{r} - \vec{r}_0) \nabla A_{\text{ext},l}(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r' \sum_l j_{0,l}(\vec{r}') \nabla_{\vec{r}_0} A_{\text{ext},l}(\vec{r}' + \vec{r}_0) \\
 &= \nabla_{\vec{r}_0} \left[\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}') \right] \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

- Contra: $U^{(m)}$ entspricht nicht der im Feld gespeicherten Wechselwirkungsenergie $E_{\text{WW}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r [(\vec{B}_d + \vec{B}_{\text{ext}})^2 - \vec{B}_d^2 - \vec{B}_{\text{ext}}^2]$ zwischen Dipol und \vec{B}_{ext} . (mit \vec{B}_d : von der Stromverteilung generiertes Magnetfeld.) Für diese erhält man: $E_{\text{WW}} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}) = -U^{(m)}$!

$$\begin{aligned}
 (\text{Denn: } E_{\text{WW}} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{B}_d = \frac{1}{4\pi} \int d^3r (\nabla \times \vec{A}_{\text{ext}}) \cdot (\nabla \times \vec{A}_d) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \sum_{kl} [(\partial_k A_{\text{ext},l})(\partial_k A_{d,l}) - (\partial_k A_{\text{ext},l})(\partial_l A_{d,k})] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r \underbrace{\sum_k \partial_k [\sum_l (A_{\text{ext},l} \partial_k A_{d,l} - A_{\text{ext},l} \partial_l A_{d,k})]}_{\text{Gauss: Randterm, verschwindet}} \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \int d^3r [-\sum_l A_{\text{ext},l} (\sum_k \partial_k \partial_k A_{\text{ext},l}) + \sum_l A_{\text{ext},l} \partial_l (\sum_k \partial_k A_{d,k})] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_d(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad \checkmark \quad \Delta A_{d,l} = -\frac{4\pi}{c} j_{d,l} \quad \nabla \cdot \vec{A}_d = 0: \text{Coulomb-Eichung}
 \end{aligned}$$

~> Wenn sich der magnetische Dipol im Feld ausrichtet, erhöht sich die Feldenergie - im Gegensatz zum elektrischen Dipol, bei dem sich die Feldenergie erniedrigt.

Anschaulich: Wegen $E_{\text{WW}} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r})$ bzw. $E_{\text{WW}} = \int d^3r \vec{j}_d(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r})$ wird E_{WW} vom Feld direkt am Ort der Ladungs- bzw. Stromverteilung bestimmt (*nicht* vom Fernfeld!). Beim elektrischen Dipols ist dort lokal das elektrostatische Feld erniedrigt, beim magnetischen Dipol ist das magnetische Feld erhöht!



Diskussion: Mechanisches Potential vs. Gesamtenergie

\vec{F} beschreibt mechanische Kraft auf konstante (verschiebbare) Stromverteilung $\vec{j}_d(\vec{r}) = \vec{j}_0(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$ im externen Feld \vec{B}_{ext} . Um \vec{j}_0 und \vec{B}_{ext} bei einer Verschiebung von \vec{j}_0 mit Geschwindigkeit $\vec{V} = d\vec{r}_0/dt$, aufrecht zu erhalten, muss zusätzliche Arbeit geleistet werden.

(a) Beiträge der Lorentzkraft

NB: Im Gegensatz zum \vec{E} -Feld kann das \vec{B} -Feld insgesamt keine Arbeit verrichten, da $\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B})$ senkrecht auf \vec{v} steht !

Bilanz: Es gilt $\vec{j}_0(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) \vec{v}_0(\vec{r})$. Betrachte Arbeit die an bzw. von den beweglichen Ladungen $\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$ verrichtet wird.

– Gesamtstromdichte (inklusive Bewegung \vec{V}): $\vec{j} = \rho(\vec{v}_0 + \vec{V})$

⇒ Dichte der Lorentzkraft: $\vec{f} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}_{\text{ext}} = \frac{1}{c} \rho (\vec{v}_0 + \vec{V}) \times \vec{B}_{\text{ext}}$

⇒ Leistungsdichte: Mit $d\vec{r} = (\vec{v}_0 + \vec{V}) dt$ und $W = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f}$ folgt

- Anteil mechanische Verschiebung des Dipols:

$$W_1 = \vec{V} \cdot \vec{f} = \frac{1}{c} \rho \vec{V} \cdot ((\vec{v}_0 + \vec{V}) \times \vec{B}_{\text{ext}}) = \frac{1}{c} \rho \vec{V} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{B}_{\text{ext}})$$

$$\text{mit } \int d^3r W_1 = \vec{V} \cdot \vec{F}(\vec{r}_0(t)) = -\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{r}_0} U^{(m)} = -\frac{d}{dt} U^{(m)}$$

- Anteil, der von der Stromquelle aufgewendet werden muss, um die Ströme \vec{j}_0 gegen \vec{f} aufrecht zu erhalten:

$$W_2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{f} = \frac{1}{c} \rho \vec{v}_0 \cdot ((\vec{v}_0 + \vec{V}) \times \vec{B}_{\text{ext}}) = \frac{1}{c} \rho \vec{v}_0 \cdot (\vec{V} \times \vec{B}_{\text{ext}}) = -W_1$$

⇒ $W_1 + W_2 = 0$, wie es sein sollte.

Die Stromquelle leistet Arbeit, die in mechanische Arbeit zur Verschiebung des Dipols umgesetzt wird.

Aber: Zusätzlich erhöht sich Feldenergie. Woher kommt die Energie?

(b) Zusatzbeitrag: Magnetfeld von \vec{j}_d und Aufrechterhaltung von \vec{B}_{ext}

Betrachte nun auch die Stromverteilung \vec{j}_{ext} , die das inhomogene äußere Feld \vec{B}_{ext} erzeugt. Wenn \vec{j}_d verschoben wird, ändert sich das von \vec{j}_d erzeugte Magnetfeld $\vec{B}_d(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$. Dadurch werden wegen $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$ elektrische Wirbelfelder induziert, die \vec{j}_{ext} entgegenwirken. Um \vec{j}_{ext} aufrechtzuerhalten, muss (pro Zeit) weitere Arbeit $\int d^3r W_3 = -\int d^3r W_1$ verrichtet werden.

NB: Maxwell'scher Verschiebungsstrom (aus $\partial_t \vec{E}$) ist hier nicht berücksichtigt. Erzeugt elektromagnetische Wellen, die abgestrahlt werden und zur Bilanz nicht beitragen.

(Rechnung: $\int d^3r W_3 = \int d^3r \vec{j}_{\text{ext}} \cdot \vec{E}$ mit $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$, $\vec{j}_{\text{ext}} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B}_{\text{ext}}$.)

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \partial_t \vec{B} &= \partial_t \vec{B}_d(\vec{r}, t) = \partial_t \vec{B}_0(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \Big|_{\vec{r} - \vec{r}_0(t)} \\ &= -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B}_d \Big|_{\nabla \cdot \vec{B}_d = 0} = \vec{V} \times (\nabla \times \vec{B}_d) = \frac{4\pi}{c} \vec{V} \times \vec{j}_d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int d^3r W_3 &= \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{ext}} = \frac{c}{4\pi} \int d^3r \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}_{\text{ext}}) \\ &= \frac{c}{4\pi} \int d^3r \nabla \cdot (\vec{B}_{\text{ext}} \times \vec{E}) + \frac{c}{4\pi} \int d^3r \vec{B}_{\text{ext}} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \\ &\quad \text{Gauss: Randterm, verschwindet} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{B}_{\text{ext}} \cdot (\partial_t \vec{B}) = -\frac{1}{c} \int d^3r \vec{B}_{\text{ext}} \cdot (\vec{V} \times \vec{j}_d) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_d \cdot (\vec{V} \times \vec{B}_{\text{ext}}) = -\int d^3r W_1 \checkmark \end{aligned}$$

Insgesamt ist Leistungsbilanz: $\int d^3r (W_1 + W_2 + W_3) = -\int d^3r W_1 = -\frac{d}{dt} U^{(m)}$

Die geleistete Arbeit wird in magnetischer Feldenergie gespeichert.

Deshalb folgt für die Wechselwirkungsenergie: $\frac{d}{dt} E_{WW} = -\frac{d}{dt} U^{(m)}$!

NB: Dass sich mit diesen ganzen Korrekturen "nur" das Vorzeichen umdreht, ist kein Zufall. Für eine systematischere Behandlung brauchen wir ein verallgemeinertes Konzept von Potential und Arbeit → siehe Vorlesung Thermodynamik (Theorie 4))

Fazit: Die Dynamik von permanenten Stromverteilungen \vec{j}_0 um Referenzpunkt \vec{r}_0 im äußeren Magnetfeld \vec{B}_{ext} (festes \vec{j}_0 im Sinne einer Zwangsbedingung) wird bestimmt durch das "mechanische" Potential

$$U^{(m)} = - \int d^3r' \vec{j}_0(\vec{r}' - \vec{r}_0) \cdot \vec{A}_{\text{ext}}(\vec{r}')$$

Die Wechselwirkungsenergie im magnetischen Feld ist $E_{WW} = -U^{(m)}$.

Konkret sind Potential und Energie eines permanenten Dipols

$$U^{(m)} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} \quad \text{und} \quad E_{WW} = \vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}.$$

(NB: Vergleiche dazu Elektrostatik nach 1.2.3.2

$$U = \int d^3r' \rho_0(\vec{r}' - \vec{r}_0) \Phi(\vec{r}') = q\Phi_{\text{ext}} - \vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \quad \text{und} \quad E_{WW} = U)$$

1.2.4 Zusammenfassung von Kapitel 1.2

Betrachtung stationärer Probleme, $\partial_t A = 0$ für alle Größen A .

Beschränkung auf unbegrenzte Geometrien → unendlicher Raum, keine Ränder.
(siehe Kapitel 1,4 für Randwertprobleme)

- Entkoppelte Gleichungen für elektrische und magnetische Felder
→ Getrennte Gebiete der Elektrostatik und Magnetostatik
- Trotzdem ähnliche Gleichungen → ähnliche Lösungsverfahren und Lösungen
- Wichtigste elementare Lösung:
Funktion $\Psi(\vec{r}) = 1/r$ löst Gleichung $\Delta\Psi = -4\pi\delta(\vec{r})$
- Daraus abgeleitete Lösungen:
 - Allgemeine Lösung des elektrostatischen Problems $\Delta\Phi = -4\pi\rho(\vec{r})$
 - Allgemeine Lösung des magnetostatischen Problems $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$
(Biot-Savart-Ampèresches Gesetz)
- Praktisch relevant: Multipolentwicklung
 - Systematische Entwicklung des Fernfeldes von räumlich begrenzten Ladungs- und Stromverteilungen in Potenzen von $1/r$
 - Beschreibung der Wechselwirkung solcher Objekte mit externen Feldern (Monopol - Feld, Dipol - Feldgradienten etc.)
 - (Last not least) Schafft notwendigen Voraussetzungen für das nächste Kapitel: Herleitung der Maxwellgleichungen in Medien

1.3 Maxwell'sche Gleichungen in Materie

Bisher: Elektrodynamik im Vakuum

→ Fundamentale Gleichungen der Elektrodynamik

Praktische Anwendungen der Elektrodynamik:

Im täglichen Leben hat man im Allgemeinen ein Medium (z.B. Luft)

→ Vielteilchensystem: Strenggenommen müssten sämtliche Freiheitsgrade sämtlicher beteiligten Ladungen (Kerne, Elektronen) berücksichtigt werden.

Aber: De facto kommt man zum Glück mit sehr viel weniger aus. Mikroskopische Freiheitsgrade des Mediums können größtenteils "ausintegriert" werden. Übrig bleibt eine effektive Theorie der elektromagnetischen Felder: Die "makroskopischen Maxwellgleichungen"

NB: Man kann zwischen zwei Arten von Ladungen in Medien unterscheiden:

- Gebunden an Atome und Moleküle
lokale Ladungsverschiebungen → Dipolmomente etc.
- Freie Ladungen, z.B. freie Elektronen, Ionen

1.3.1 Phänomenologische Überlegungen

Betrachte zunächst statische Eigenschaften von isolierenden Medien

1.3.1.1 Elektrostatik in Medien

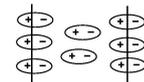
Medium bestehe aus Molekülen, die ungeladen sind, aber Dipolmomente haben.

Betrachte Scheibe aus einem solchen Material.

Lege äußeres Feld \vec{E}_0 an: Dipole werden orientiert.

→ An der Oberfläche werden Oberflächenladungen Q induziert, die das Feld im Inneren reduzieren (Kondensator).

Reduziertes Feld: $\vec{E} = \vec{E}_0 - 4\pi Q/A$ (mit A : Fläche der Scheibe)



Allgemeiner: Durch Verschiebung von Ladungen werden lokal Ladungsdichten $\rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}$ erzeugt mit \vec{P} : Polarisation (\leftrightarrow lokale Dipoldichte)

(Denn: Ausgehend von lokal völlig neutralem System: $\bar{\rho}_+ \equiv \bar{\rho}_- \Rightarrow \bar{\rho} = \bar{\rho}_+ - \bar{\rho}_- \equiv 0$)

betrachte Einfluss von Ladungsverschiebung $\delta \vec{u}_\pm \Rightarrow \delta \rho_\pm = -\nabla \cdot (\rho_\pm \delta \vec{u}_\pm)$

(Analogie Kontinuitätsgleichung: $\partial_t \rho = -\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$)

$\Rightarrow \delta \rho_p = \delta \rho_+ - \delta \rho_- = -\nabla \cdot \vec{P}$ mit $\vec{P} = \rho_+ \delta \vec{u}_+ - \rho_- \delta \vec{u}_-$)

Dann folgt mit $\nabla \cdot \vec{E}_p = 4\pi \rho_p$ lokal: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - 4\pi \vec{P}$,

Umgekehrt betrachte nun das von externen Ladungen ρ_{ext} im Medium generierte Feld \vec{E} . Definiere dielektrische Verschiebung $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$.

Dann gilt für einen Betrachter, der sich für innere Polarisationsladungen nicht interessiert, eine modifizierte Maxwellgleichung

→ Inhomogene Maxwellgleichung (statisch): $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}}$

Homogene Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{E} = 0$ wie gehabt (bleibt unverändert)

Zur Vervollständigung des Gleichungssystems braucht man Beziehung $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$
 Empirisch: Für kleine \vec{E} gilt oft $\vec{P} \propto \vec{E}$, also $\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$
 mit ϵ : Dielektrizitätskonstante oder dielektrische Permeabilität

1.3.1.2 Magnetostatik in Medien

Betrachte Moleküle mit magnetischen Momenten.
 Äußeres Magnetfeld \rightarrow richtet magnetische Momente aus.

In Analogie zu 1.3.1.1 vermuten wir ("intelligentes Raten"):
 Magnetfeld verändert sich gemäß $\vec{B} = \vec{B}_0 + 4\pi\vec{M}$
 mit \vec{M} : Magnetisierung (Dichte der magnetischen Momente)

Definiere $\boxed{\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}}$
 \Rightarrow Das von externen Strömen induzierte Magnetfeld erfüllt
 – Inhomogene statische Maxwellgleichung: $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{ext}}}$
 – Homogene Maxwellgleichung $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (unverändert wie gehabt)

Nomenklatur: \vec{H} heißt "magnetisches Feld"
 \vec{B} heißt "magnetische Induktion"
 (verwirrend, aber so ist das nun mal.)

Zusammenhang $\vec{H} \leftrightarrow \vec{B}$: Nimm wieder an $\vec{H} \propto \vec{B}$ und definiere $\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$
 μ : magnetische Permeabilität

1.3.1.3 Abschließende Bemerkungen

- Phänomenologische "Herleitung" der Maxwellgleichungen in Medien
 \rightarrow gar nicht schlecht. Kommt nochmal sauberer in 1.3.2, aber Ergebnis bleibt gleich
- Phänomenologischer Zusammenhang $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$, $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$ problematischer
 - $\vec{E} \parallel \vec{D}$, $\vec{M} \parallel \vec{H}$ nicht unbedingt gegeben in anisotropen Medien
 - $\vec{E} \propto \vec{D}$, $\vec{M} \propto \vec{H}$ oft richtig bei kleinen E, B , aber nicht mehr bei großen und insbesondere in nichtlinearen Medien
- Phänomenologische Überlegungen liefern nur stationäre Maxwellgleichungen. Verallgemeinerung für nichtstationäre Systeme steht noch aus.

1.3.2 Mikroskopische Herleitung

1.3.2.1 Die Idee des Coarse Graining

Ausgangspunkt: Mikroskopische Theorie eines Materials, bestehend aus Punktladungen (Elektronen und Kerne); hier klassische Behandlung.

⇒ Mikroskopische Maxwellgleichungen für mikroskopische Felder \vec{e} , \vec{b} :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{e} &= 4\pi\eta & \nabla \times \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{b} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \nabla \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

mit $\eta(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$: Mikroskopische Ladungs- und Stromdichten
 ↔ Mikroskopische Freiheitsgrade aller Teilchen

Ziel: Theorie, in der man nicht mehr das vollständige System betrachten muss. Material wird als Medium betrachtet.
 → Herleitung der "makroskopischen" Maxwellgleichungen.

Ansatz: Vergrößerung oder Coarse Graining.

Mikroskopische Variationen von \vec{e} , \vec{b} interessieren nicht, nur langwellige Schwankungen. → Lokale Mittelung über Größen ("unscharf stellen")

Konkret: Faltung mit einer Vergrößerungsfunktion $f(\vec{r})$, z.B. Stufenfunktion oder Gausskurve (normiert). Details von $f(\vec{r})$ sind egal. Wichtig ist die Breite → Längenskala der Vergrößerung

Mittelung: Für gegebene mikroskopische Funktion $g(\vec{r}, t)$ definiere
 $\langle g(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3r' f(\vec{r} - \vec{r}') g(\vec{r}', t)$
 Ableitungen: $\langle \partial_t g(\vec{r}, t) \rangle = \partial_t \langle g(\vec{r}, t) \rangle$, $\langle \partial_i g(\vec{r}, t) \rangle = \partial_i \langle g(\vec{r}, t) \rangle$
 (denn: $\langle \partial_i g(\vec{r}, t) \rangle = \int d^3r' f(\vec{r} - \vec{r}') \partial'_i g(\vec{r}', t) = - \int d^3r' g(\vec{r}', t) \partial'_i f(\vec{r} - \vec{r}') = \int d^3r' g(\vec{r}', t) \partial_i f(\vec{r} - \vec{r}') = \partial_i \langle g(\vec{r}, t) \rangle \quad \checkmark$)

Fazit: Aus Vielteilchentheorie wird Kontinuumstheorie (Dichte-/Stromfelder), analog Hydrodynamik in Theorie 1

1.3.2.2 Anwendung auf Maxwellgleichungen

Definiere nun $\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \langle \vec{b}(\vec{r}, t) \rangle$

⇒ Mikroskopische Maxwellgleichungen geben

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Berechne nun lokale Mittelung für $\langle \eta \rangle$ und $\langle \vec{j} \rangle$

(a) Mittelung über Ladungsdichte $\langle \eta(\vec{r}, t) \rangle$

Unterscheide freie und gebundene Ladungen: $\eta = \eta_{\text{frei}} + \eta_{\text{gebunden}}$

η_{gebunden} : Ladungen sitzen auf Atomen/Molekülen n mit Schwerpunkt \vec{R}_n , räumlich beschränkte Ladungsverteilung $\eta_n(\vec{r}, t) \equiv \rho_n(\vec{r} - \vec{R}_n, t)$

η_{frei} : Externe und bewegliche Ladungen, z.B. Elektronen und Ionen

Mittlere gebundene Ladungen η_{gebunden} :

$$\begin{aligned}
 \langle \eta_{\text{gebunden}} \rangle &= \sum_n \langle \rho_n(\vec{r} - \vec{R}_n, t) \rangle = \sum_n \int d^3 r' f(\vec{r} - \vec{r}') \rho_n(\vec{r}' - \vec{R}_n, t) \\
 &= \sum_n \int d^3 u f(\vec{r} - \vec{R}_n - \vec{u}) \rho_n(\vec{u}, t) \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Ladungen räumlich begrenzt} \\ \rightarrow \text{Entwickle } f(\vec{r} - \vec{R}_n - \vec{u}) \text{ nach kleinen } \vec{u} \end{array} \right. \\
 &\approx \sum_n \int d^3 u \rho_n(\vec{u}, t) \{ f(\vec{r} - \vec{R}_n) - \vec{u} \cdot \nabla f|_{\vec{r} - \vec{R}_n} \} \\
 &= \sum_n \{ f(\vec{r} - \vec{R}_n) \underbrace{\int d^3 u \rho_n(\vec{u}, t)}_{q_n: \text{ molekulare Ladung}} - \nabla f \cdot \underbrace{\int d^3 u \rho_n(\vec{u}, t) \vec{u}}_{\vec{p}_n: \text{ molekulares Dipolmoment}} \} \\
 &= \sum_n \{ \langle q_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \} \\
 &\Rightarrow \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = \underbrace{\langle \eta_{\text{frei}} \rangle + \sum_n \langle q_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle}_{\rightarrow \text{Ladung } \rho(\vec{r}, t)} - \nabla \cdot \underbrace{\sum_n \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle}_{\rightarrow \text{Polarisation } \vec{P}} \\
 &\Rightarrow \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle \approx \rho(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

(b) Mittelung über Stromdichte $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle$ (geht im Prinzip analog)

Unterscheide zwischen freien und gebundenen Strömen \vec{j}_{frei} und $\vec{j}_{\text{gebunden}}$

$$\vec{j}_{\text{gebunden}} = \sum_n \vec{j}_n(\vec{r} - \vec{R}_n) \quad \text{mit} \quad \vec{j}_n(\vec{r}) = \vec{V}_n \rho_n(\vec{r}, t) + \vec{j}_n(\vec{r}, t),$$

wobei \vec{V}_n : Schwerpunktgeschwindigkeit und \vec{j}_n : innere Ströme

Mittlere gebundene Ströme $\vec{j}_{\text{gebunden}}$:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{j}_{\text{gebunden}} \rangle &= \int d^3 u \sum_n f(\vec{r} - \vec{R}_n - \vec{u}) \vec{j}_n(\vec{u}) = \int d^3 u \sum_n f(\vec{r} - \vec{R}_n - \vec{u}) [\vec{V}_n \rho_n(\vec{u}, t) + \vec{j}_n(\vec{u}, t)] \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Taylorentwicklung von } f(\vec{r} - \vec{R}_n - \vec{u}) \text{ nach kleinen } \vec{u} \\ \bullet \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u}, t) = \int d^3 u (\vec{j}_n \cdot \nabla) \vec{u} = - \int d^3 u \vec{u} (\nabla \cdot \vec{j}_n) = - \int d^3 u \vec{u} (\partial_t \rho_n) = \partial_t \vec{p}_n \\ \Rightarrow \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u}, t) = \int d^3 u \vec{p}_n = \langle (\partial_t \vec{p}_n) \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \\ = \partial_t \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle - \langle \vec{p}_n \partial_t \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \\ = \partial_t \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle + \langle \vec{p}_n (\vec{V}_n \cdot \nabla) \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \end{array} \right. \\
 &= \sum_n \{ f(\vec{r} - \vec{R}_n) [\vec{V}_n \int d^3 u \rho_n(\vec{u}, t) + \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u}, t)] - \sum_i \partial_i f [\vec{V}_n \int d^3 u \rho_n u_i + \int d^3 u \vec{j}_n u_i] \} \\
 &= \sum_n \{ f \vec{V}_n q_n + f \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u}, t) - \vec{V}_n (\vec{p}_n \cdot \nabla f) - \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u}, t) (\vec{u} \cdot \nabla f) \} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Vorgehen wie 1.2.2.3, aber diesmal mit } \nabla \cdot \vec{j}_n = -\partial_t \rho_n (\neq 0) \\ \bullet \int d^3 u [\vec{j}_n(\vec{u} \cdot \nabla f)]_k = \sum_i (\partial_i f) (\frac{1}{2} \int d^3 u (\vec{j}_{n,k} u_i + \vec{j}_{n,i} u_k) + \frac{1}{2} \int d^3 u (\vec{j}_{n,k} u_i - \vec{j}_{n,i} u_k)) \\ \text{mit } \int d^3 u (\vec{j}_{n,k} u_i + \vec{j}_{n,i} u_k) = \int d^3 u (u_i \vec{j}_n(\nabla u_k) + u_k \vec{j}_n(\nabla u_i)) \\ = - \int d^3 u u_i u_k (\nabla \cdot \vec{j}_n) = \int d^3 u u_i u_k \partial_t \rho_n = \frac{1}{3} \partial_t Q'_{n,ik} \approx 0 \\ \text{(Quadrupolterme werden vernachlässigt)} \\ \text{und } \sum_i (\partial_i f) \int d^3 u (\vec{j}_{n,k} u_i - \vec{j}_{n,i} u_k) = \int d^3 u [\vec{j}_n(\vec{u} \cdot \nabla f) - \vec{u}(\vec{j}_n \cdot \nabla f)]_k \\ = -[\nabla f \times \int d^3 u (\vec{u} \times \vec{j}_n)]_k = -2c [\nabla f \times \vec{m}_n]_k \\ \Rightarrow \int d^3 u \vec{j}_n(\vec{u} \cdot \nabla f) \approx -c \nabla f \times \vec{m}_n = -c \nabla \times \langle \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \end{array} \right. \\
 &\bullet f \vec{V}_n q_n = \langle \vec{V}_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle, \quad \vec{V}_n (\vec{p}_n \cdot \nabla f) = \langle \vec{V}_n (\vec{p}_n \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}_n)) \rangle \\
 &= \sum_n \langle q_n \vec{V}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle + \partial_t \sum_n \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle + c \nabla \times \sum_n \langle \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle \\
 &\quad + \underbrace{\sum_n \langle \vec{p}_n (\vec{V}_n \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}_n)) - \vec{V}_n (\vec{p}_n \cdot \nabla \delta(\vec{r} - \vec{R}_n)) \rangle}_{\nabla \times (\vec{p}_n \times \vec{V}_n) \delta(\vec{r} - \vec{R}_n)} \\
 &\Rightarrow \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle \approx \underbrace{\langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle + \sum_n \langle q_n \vec{V}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle}_{\rightarrow \text{makroskopische Stromdichte } \vec{J}} + \partial_t \underbrace{\sum_n \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle}_{\rightarrow \text{Polarisation } \vec{P} \text{ wie (a)}} + c \nabla \times \underbrace{\sum_n \langle \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle}_{\rightarrow \text{Magnetisierung } \vec{M}} \\
 &\quad + \nabla \times \sum_i \langle (\vec{p}_n \times \vec{V}_n) \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle = \vec{J}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{P}(\vec{r}, t) + c (\nabla \times \vec{M}) + \nabla \times \sum_n \langle (\vec{p}_n \times \vec{V}_n) \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle$$

Letzter Term: Im Allgemeinen vernachlässigbar, da molekulare Geschwindigkeiten \vec{V}_n sehr klein. Ausnahme: Bewegte Medien

(c) Zusammenfassung und Folgerung für Maxwellgleichungen

Mittelung von η und \vec{j} ergab:

$$\langle \eta(\vec{r}, t) \rangle \approx \rho(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)$$

$$\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle \approx \vec{J}(\vec{r}, t) + \partial_t \vec{P}(\vec{r}, t) + c (\nabla \times \vec{M})$$

mit $\rho(\vec{r}, t) = \langle \eta_{\text{frei}} \rangle + \sum_n \langle q_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle$:
 → makroskopische Ladungsdichte

$\vec{J}(\vec{r}, t) = \langle \vec{j}_{\text{frei}} \rangle + \sum_n \langle q_n \vec{V}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle$:
 → makroskopische Stromdichte

$\vec{M}(\vec{r}, t) = \sum_n \langle \vec{m}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle$ mit $\vec{m}_n = \frac{1}{2c} \int d^3u (\vec{u} \times \vec{j}_n(\vec{u}, t))$:
 → makroskopische Magnetisierung

$\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_n \langle \vec{p}_n \delta(\vec{r} - \vec{R}_n) \rangle$ mit $\vec{p}_n = \int d^3u \vec{u} \rho_n(\vec{u}, t)$
 → Polarisation

Setze dieses nun ein in die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = 4\pi (\rho - \nabla \cdot \vec{P})$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{4\pi}{c} (\vec{J} + \partial_t \vec{P} + c (\nabla \times \vec{M}))$$

Ergebnis:

Definiere $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ Dielektrische Verschiebung
 $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}$ Magnetfeld (\vec{H} -Feld)

Dann gelten folgende effektive Feldgleichungen
 (in dem Inertialsystem, in dem das Medium in Ruhe ist):

$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

inhomogene
 Maxwellgleichungen
 (modifiziert)

homogene
 Maxwellgleichungen
 (unverändert)

Dies gilt nun auch allgemein für nichtstationäre Systeme
 (Verallgemeinerung von (1.3.1.1))

Zur Vervollständigung des Gleichungssystems brauchen wir nun noch Ausdrücke für den Zusammenhang zwischen (\vec{D}, \vec{H}) bzw. (\vec{P}, \vec{M}) und (\vec{E}, \vec{B}) .

→ Diskussion im nächsten Abschnitt

1.3.3 Permeabilitätsfunktionen

Suche nun also Zusammenhang zwischen (\vec{D}, \vec{H}) bzw. (\vec{P}, \vec{M}) und (\vec{E}, \vec{B}) .

Annahme aus 1.3.1: $\vec{D} \propto \vec{E}$ (d.h. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$) und $\vec{H} \propto \vec{B}$ (d.h. $\vec{B} = \mu \vec{H}$)

Heuristisch, alles andere als selbstverständlich

Tatsächlicher Zusammenhang hängt von Material und Feldstärke ab. Um ihn zu berechnen oder auch nur abzuschätzen, braucht man Konzepte aus der Vielteilchentheorie und der statistischen Physik (Theorie 4). Hier werden im Folgenden deshalb nur ein paar wichtige Ergebnisse zitiert.

Allgemeiner Zugang für "kleine" Felder und "normale" Medien:

Theorie der linearen Antwort (linear response theory)

Voraussetzungen:

- Thermische Mittelung möglich
- Felder klein (\sim "kleine Störung" des Mediums)
- Variationen der Felder so langwellig, dass die Kontinuumsnäherung noch sinnvoll ist (nötig für unsere Anwendung hier, nicht allgemeine Voraussetzung für die Theorie der linearen Antwort)
- Im Folgenden nehmen wir noch an, dass das Medium in Abwesenheit äußerer Felder isotrop ist.

Vorhersage: (Rechnung an dieser Stelle nicht möglich)

Zusammenhang $\vec{D} \leftrightarrow \vec{E}$ und $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$ nicht instantan, aber kausal
 $\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon(t-t') \vec{E}(t')$ und $\vec{B}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \mu(t-t') \vec{H}(t')$
 $\Rightarrow \epsilon(t-t')$ und $\mu(t-t')$ beinhalten auch Gedächtniseffekte des Mediums. Einfluss einer Variation von $\vec{E}(\vec{r}, t)$ auf Polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t)$ bzw. $\vec{D}(\vec{r}, t)$ kann noch eine Weile nachwirken, Analoges gilt für magnetische Größen .

Nach Fouriertransformation (unter Anwendung des Faltungssatzes) erhält man frequenzabhängige Permeabilitäten $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ mit

$$\boxed{\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega)} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega)}$$

Nun: Konkrete Beispiele / Anwendungen

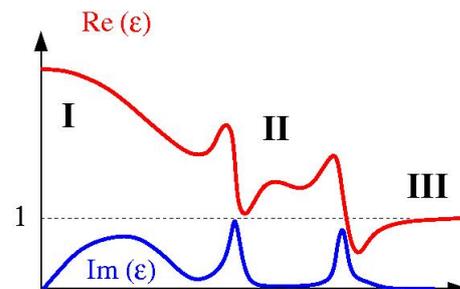
1.3.3.1 Dielektrische Permeabilität bzw. Dielektrizitätsfunktion

* Isolierende, isotrope Medien (z.B. Wasser)

Dann gilt $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ mit $\vec{P}(\omega) = \chi(\omega) \vec{E}(\omega) \Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega)$

Typische Form (schematisch):

Diskutiere nun die Bereiche I,II,III



I: Orientierungspolarisation:

Permanente Dipole richten sich gegen thermische Unordnung aus.

Annahme: Relaxationsverhalten mit Relaxationszeit τ

Rechnung mit Theorie der linearen Antwort liefert:

mit p_0 : molekulares Dipolmoment, ρ : Dichte

$$\chi_{\text{pol}} \approx \frac{p_0^2 \rho}{3k_B T} \frac{1}{1-i\omega\tau}$$

$k_B T$: "Boltzmann-Faktor" (T : Temperatur, $k_B = 1.39 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)

II: Resonanzen des Mediums

Einfaches Modell: Kombination unabhängiger Eigenschwingungen

("Oszillatormodell") $\rightarrow \chi = \sum_i \chi_i$ mit $\chi_i(\omega) \sim [\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i]^{-1}$,

wobei ω_i : Resonanzfrequenz, γ_i : Dämpfungskonstante

(Betrachte z.B. Elektron, das um einen Atomkern schwingt,

Abstand $d(t)$, Ladung e , Masse $m \rightarrow$ Dipolmoment $p(t) = e d(t)$.

Äusseres Feld $E(t)$ induziert Schwingung $m(\ddot{d} + \gamma_i \dot{d} + \omega_i^2 d) = e E(t)$

Fouriertransformation in den Frequenzraum: $d(t) \rightarrow d(\omega)$

$\ddot{d} \rightarrow -i\omega d$, $\dot{d} \rightarrow -\omega^2 d \Rightarrow m(-\omega^2 - i\gamma_i\omega + \omega_i^2)d(\omega) = e E(\omega)$

$\Rightarrow p(\omega) = e d(\omega) = \chi(\omega) E(\omega)$ mit $\chi(\omega) = -\frac{e^2}{m} / (\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega)$.

\rightarrow Lorentz-Drude-Formel für einfaches Medium mit Orientierungspo-

larisation $\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_{\text{pol}} + 4\pi\frac{e^2}{m} \sum_i n_i / [\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega]$

mit n_i : Oszillatorstärke (Anzahl der Oszillatoren pro Volumen mit Frequenz ω_i ; $\sum_i n_i = n_e$: Elektronendichte)

Weitab der Resonanzfrequenzen: Normale Dispersion:

ϵ reell, $\text{Re}[\epsilon(\omega)]$ monoton steigend, $\text{Im}[\epsilon(\omega)] \approx 0$

Nahe an Resonanzen: Anomale Dispersion: $\text{Re}[\epsilon(\omega)]$ fallend,

$\text{Im}[\epsilon(\omega)] \neq 0 \rightarrow$ Energieverlust, Dissipation (siehe 1.3.4)

III: Hochfrequenter Grenzwert $\omega \rightarrow \infty$:

$$\epsilon \approx 1 - 4\pi\frac{n_e e^2}{m} =: 1 - \omega_p^2 / \omega^2$$

mit ω_p : Plasmafrequenz und n_e : Elektronendichte

* Leiter

Bei $\omega = 0$ (stationärer Fall) treten makroskopische Ladungsverschiebungen und Ströme auf ($\hat{=} \epsilon \rightarrow \infty$) \rightarrow erfordert Sonderbehandlung

Bei $\omega \neq 0$: lokalisierte Ladungsverschiebungen (Schwingungen)

\rightarrow Formale Beschreibung über dielektrische Permeabilität möglich!

Ansatz: Nutze $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (σ : Leitfähigkeit), und bewegliche Ladungen und Ströme im Leiter in das Feld \vec{D} zu inkorporieren.

Leiter habe "Grundpermeabilität" $\tilde{\epsilon} < \infty$ (z.B. Atomrümpfe)

Rechnung: Überführe $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}$ und $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ mit $\vec{D} = \tilde{\epsilon} \vec{E}$

in Gleichungen mit impliziten ρ und \vec{j} : $\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}$ und $\nabla \cdot \vec{D} = 0$

Im Frequenzraum: $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} - i\frac{\omega}{c} \tilde{\epsilon} \vec{E} =: -i\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$ mit $\epsilon = \tilde{\epsilon} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$

Setze ein: mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \nabla \cdot (\tilde{\epsilon} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}) \vec{E} = \nabla \cdot \vec{D} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \vec{j}$

Mit $\nabla \cdot \vec{j} = -i\omega\rho$ (Kontinuitätsgleichung) und $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ folgt $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ ✓)

Ergebnis: $\epsilon(\omega) = \tilde{\epsilon} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$

NB: Leitfähigkeit σ kann auch frequenzabhängig sein.

Bei $\omega \rightarrow 0$ gilt $\epsilon \rightarrow \infty$ wie erwartet.

1.3.3.2 Magnetische Permeabilität

Behandlung ganz ähnlich: $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ mit $\vec{M}(\omega) = \chi^{(\text{mag})}(\omega)\vec{B}(\omega)$
 $\Rightarrow \mu(\omega)H(\omega) = B(\omega)$ mit $\mu = [1 - 4\pi\chi^{(\text{mag})}]^{-1}$

Bemerkungen:

- Frequenzabhängigkeit von μ kann i. A. vernachlässigt werden.
- In gewöhnlichen Materialien ist μ sehr nahe an 1 ($\mu - 1 \sim 10^{-6}$)
- Ausnahmen: Para- und Ferromagnete, spezielle Nanomaterialien

1.3.3.3 Mögliche Komplikationen

- Medium nicht isotrop (z.B. Flüssigkristall, doppelbrechende Medien)
 $\rightarrow \epsilon$ und μ sind Matrizen
- Manche Materialien sind schon bei Abwesenheit äußerer Felder magnetisiert bzw. polarisiert (Ferroelektrika und Ferromagnete)
 \rightarrow Bei $\omega = 0$ offenbar kein linearer Zusammenhang
 \rightarrow Bei $\omega \neq 0$ i. A. keine Änderung
- Hohe Felder (z.B. Laser)
 \rightarrow nichtlineare Effekte, "nichtlineare Optik"

1.3.4 Poyntingscher Satz in Medien

Erinnerung Energiebilanz für das elektromagnetische Feld: (1.1.3)

Poynting-Theorem: $\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0$

mit $u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$: Energiedichte

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$: Poynting-Vektor

Frage: Kann man diese Bilanzgleichung für Medien übertragen?
 (nichttrivial, da Energieübertrag an Medium möglich!)

Herleitung der Bilanzgleichung aus den Maxwell-Gleichungen

Ansatz analog 1.1.3: Leistungsdichte im elektromagnetischen Feld

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{c}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \right) \cdot \vec{E} && \underbrace{-\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}} \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{H} \right) \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) - \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

\Rightarrow Es gilt in jedem Medium

$$\boxed{\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = 0}$$

Annahme im Folgenden: Medium linear im Sinne von 1.3.3, d.h. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$ mit frequenzabhängige Permeabilitätsfunktionen $\epsilon(\omega)$ und $\mu(\omega)$
 \leadsto Moden zu verschiedenen Frequenzen ω sind dann unabhängig

1.3.4.1 Langsam veränderliche Felder in isolierenden Medien

Betrachte zunächst isolierende Medien in dem Fall, dass \vec{E} und \vec{B} so langsam variieren, dass die Frequenzabhängigkeit von ϵ und μ vernachlässigbar ist.

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \frac{1}{2} \partial_t (\vec{E} \cdot \vec{D}) \text{ und } \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} = \frac{1}{2} \partial_t (\vec{H} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow \text{Mit } \boxed{u = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})} \text{ und } \boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})}$$

$$\text{gilt das Poynting-Theorem wie gehabt: } \boxed{\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0}$$

1.3.4.2 Schnell veränderliche Felder

Nun diskutiere den Fall, dass \vec{E} und \vec{B} so schnell oszillieren, dass die Frequenzabhängigkeit $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ wichtig wird.

\leadsto Betrachte zeitgemittelte Energiebilanz: im Frequenzraum

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right\} = 0$$

$$\text{Zerlege: } f(t) = \frac{1}{2} f(\omega_0) + \sum_{n>0} \text{Re}[f(\omega_n) e^{-i\omega_n t}] \text{ mit } \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$(\Rightarrow \text{Inverses: } f(\omega_n) = \frac{2}{T} \int_0^T dt e^{i\omega_n t} f(t); \text{ Ableitungen: } \partial_t f(t) \rightarrow -i\omega f(\omega);$$

$$\text{Parsevalsche Gleichung: } \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)g(t) = \frac{1}{4} f(\omega_0)g(\omega_0) + \sum_{n>0} \text{Re}[\frac{1}{2} f(\omega_n)g^*(\omega_n)]$$

$$\Rightarrow \sum_n \text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\omega) \cdot \vec{j}^*(\omega) + \frac{i\omega}{8\pi} (\vec{E}(\omega) \cdot \vec{D}^*(\omega) - \vec{H}^*(\omega) \cdot \vec{B}(\omega)) + \frac{c}{8\pi} \nabla \cdot (\vec{E}(\omega) \times \vec{H}^*(\omega))] = 0$$

$$\Rightarrow \text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\omega) \cdot \vec{j}^* + \dots] = 0 \forall \omega \quad (\text{da Moden } \omega \text{ unabhängig voneinander})$$

\Rightarrow Komplexes Poynting-Theorem: Im zeitlichen Mittel gilt:

$$\boxed{\text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\omega) \cdot \vec{j}^*(\omega) + 2i\omega (u_{\text{el}}(\omega) - u_{\text{mag}}(\omega)) + \nabla \cdot \vec{S}(\omega)] = 0}$$

$$\text{mit } \boxed{\vec{S}(\omega) = \frac{c}{8\pi} (\vec{E} \times \vec{H}^*)} \quad \boxed{u_{\text{el}}(\omega) = \frac{1}{16\pi} \vec{E} \cdot \vec{D}^*} \quad \boxed{u_{\text{mag}}(\omega) = \frac{1}{16\pi} \vec{H}^* \cdot \vec{B}}$$

Folgerungen und Bemerkungen:

- NB: Beachte Faktor 1/2 im Vergleich zu 1.3.4.1 und 1.1.3.1
 \rightarrow Spiegelt Effekt der zeitlichen Mittelung wider:
 Für $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ ist $\frac{1}{T} \int dt f(t)^2 = \frac{1}{2} |f_0|^2$
 \rightarrow Mathematisch: Folgt aus unserer Definition der Fourierzerlegung
- Falls $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell $\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{D}^*$ und $\vec{H}^* \cdot \vec{B}$ reell $\Rightarrow u_{\text{el}}, u_{\text{mag}}$ reell
 $\Rightarrow \text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\omega) \cdot \vec{j}^*(\omega) + \nabla \cdot \vec{S}(\omega)] = 0$
 Arbeit $\hat{=}$ abgestrahlte Energie (im zeitlichen Mittel)
- Falls $\epsilon(\omega)$ komplex wird in der Nähe einer Resonanz
 $\Rightarrow \text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\omega) \cdot \vec{j}^*(\omega) + \nabla \cdot \vec{S}(\omega)] = 2\omega \vec{E}(\omega) \cdot \text{Im}[\epsilon(\omega)] \vec{E}^*(\omega)$
 \leadsto Verluste: Energie wird an Medium abgegeben!

1.3.5 Grenzflächen und Randbedingungen

Häufige Problemstellung in der Elektrodynamik: Systeme mit Grenzflächen
Medium in großen Bereichen homogen, dazwischen scharfer Übergang

- z.B. – Grenzfläche Dielektrikum / Leiter
– Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika
– Grenzflächen zu Magneten

Frage: Welche Randbedingungen liegen an Grenzflächen vor?

1.3.5.1 Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Betrachte Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen magnetischen bzw. dielektrischen Charakteristika. Keine expliziten Ladungen ρ und Ströme \vec{j}

Dann gelten folgende allgemeine Stetigkeitsbedingungen:

- Normalenrichtung: \vec{D}_\perp stetig, \vec{B}_\perp stetig
Tangentialrichtung: \vec{E}_\parallel stetig, \vec{H}_\parallel stetig

Grund: Mit $\rho, \vec{j} \equiv 0$ folgt

- Stetigkeit von \vec{D}_\perp und \vec{B}_\perp aus $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
(denn: Gaußscher Satz, infinitesimal dünnes Volumen um Grenzfläche $\int d^3r \nabla \cdot \vec{D} = 0$, $\int d^3r \nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint d\vec{A} \cdot \vec{D} = \oint d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad \checkmark$)
- Stetigkeit von \vec{E}_\parallel und \vec{H}_\parallel aus $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}$, $\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c}\partial_t \vec{D} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, und aus der Endlichkeit von \vec{B}_\perp , \vec{D}_\perp
(denn: Stokesscher Satz, infinitesimal schmale Fläche durch Grenzfläche $\int d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \rightarrow 0$, $\int d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \rightarrow 0 \Rightarrow \oint d\vec{l} \cdot \vec{E} = \oint d\vec{l} \cdot \vec{H} = 0 \quad \checkmark$)

NB: Hier wurde angenommen, dass in den makroskopischen Maxwellgleichungen keine Oberflächenladungen und -Ströme auftreten (d.h., ρ und \vec{j} sind endlich). Mikroskopisch bilden sich natürlich nach 1.3.2 und 1.3.3 Oberflächenladungen /-Ströme aus, die für den abrupten Wechsel von ϵ und μ verantwortlich sind.

1.3.5.2 Spezielle Grenzflächen

(a) Grenzflächen zu Leitern

Kennzeichen eines Leiters: Ladungen frei beweglich, folgen den Feldlinien
→ im statischen Fall (unbewegte Ladungen) muss das Feld Null sein
($\vec{E} = 0$, Potential $\Phi = \text{const.}$) → entspricht 1.3.5.1 mit $\epsilon \rightarrow \infty$

Oberfläche: Feld senkrecht zur Oberfläche
(sonst würden sich Ladungen parallel verschieben)

Anwendung: Faraday-Käfig

Im ladungsfreien Inneren einer geschlossenen leitenden Oberfläche ist das elektrostatische Potential konstant, d.h. $\vec{E} \equiv 0$

(b) Grenzfläche zu magnetisch hochpermeablem Material

Entspricht 1.3.5.1 mit $\mu_1 \rightarrow \infty$

$$\vec{B}_\perp, \vec{H}_\parallel \text{ stetig} \rightarrow \vec{H}_\perp^{(2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_\perp^{(1)} \gg \vec{H}_\perp^{(1)}, \vec{H}_\parallel^{(2)} = \vec{H}_\parallel^{(1)}$$

~> außerhalb der permeablen Materials (in dem Bereich 2), stehen Feldlinien von \vec{H} praktisch senkrecht auf der Oberfläche

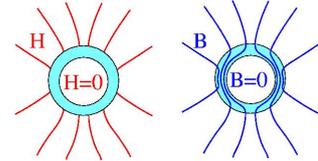
~> ähnliche Situation wie bei Leitern

Anwendung: Magnetische Abschirmung

Hohlkugel aus hochpermeablem Material $\mu \gg 1$

→ Im Inneren der Kugel ist Magnetfeld abgeschirmt, ähnlich Faraday-Käfig bei Leitern

(genauere Rechnung siehe Jackson)



(c) Grenzfläche zu Permanentmagneten

Feste Magnetisierung \vec{M}

Entspricht 1.3.5.1 mit nichtlinearem Zusammenhang $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$

$$(\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \text{ mit festem } \vec{M})$$

1.3.6 Zusammenfassung von Kapitel 1.3

- Maxwellgleichungen in Medien (mikroskopisch hergeleitet)

$$\begin{array}{l|l} \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho & \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

mit $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ Dielektrische Verschiebung

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ Magnetfeld (\vec{H} -Feld)

wobei \vec{P} : Polarisation, \vec{M} : Magnetisierung

Voraussetzungen für die Gültigkeit der mikroskopischen Herleitung:

- Medium ruht (sonst Zusatzterm laut 1.3.2.2)
- Ladungsverteilungen im Medium sind durch molekulare Dipole und magnetische Momente hinreichend beschrieben. Momente höherer Ordnung (Quadrupol etc.) können vernachlässigt werden.

- Permeabilitätsfunktionen: Beschreiben Zusammenhang zwischen \vec{D} und \vec{E} in linearen Medien und bei hinreichend kleinen Feldern.

$$\Rightarrow \vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega)$$

Fouriertransformierte von ϵ, μ in der Zeit berücksichtigt Kausalität

Speziell Leiter: $\epsilon = \tilde{\epsilon} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ mit Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$

- Energieerhaltung gilt dann, wenn $\epsilon(\omega), \mu(\omega)$ reell sind.

Anderenfalls Dissipation → Energie wird an das Medium abgegeben

- Randbedingungen an Grenzflächen zwischen Medien: $\vec{D}_\perp, B_\perp, \vec{E}_\parallel, \vec{H}_\parallel$ stetig

1.4 Stationäre Randwertprobleme

Fortführung von 1.2, nun aber in Anwesenheit von Grenzflächen zwischen homogenen Bereichen (d.h. stückweise homogene Medien mit $\epsilon = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$)

1.4.1 Grundlegende Fragestellung

* Grundstruktur der Gleichungen

- (1) In der Elektrostatik (für lineare Medien mit $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$)
Gleichungen: $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$, $\nabla \times \vec{E} = 0$, ρ stationär
 \leadsto Es existiert ein Potential Φ mit $\vec{E} = -\nabla\Phi \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot (\epsilon \nabla\Phi) = -4\pi\rho}$
 Für $\epsilon = \text{const.} \Rightarrow \boxed{\Delta\Phi = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho}$ bzw. (falls $\rho = 0$) $\boxed{\Delta\Phi = 0}$
- (2) In der Magnetostatik (für lineare Medien mit $\vec{B} = \mu \vec{H}$)
Gleichungen: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, \vec{j} stationär
 (mit geeigneten Randbedingungen)
- (i) Lösung über Vektorpotential
 \leadsto Es gibt Potential \vec{A} mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Coulomb-Eichung)
 $\Rightarrow [\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}]_k \underset{\nabla \cdot \vec{A} = 0}{=} \boxed{\nabla \cdot (\frac{1}{\mu} \nabla A_k) = -\frac{4\pi}{c} j_k}$
 bzw. für $\mu = \text{const.}$ $\boxed{\Delta A_k = -\frac{4\pi\mu}{c} j_k}$
- (ii) Alternativ in Bereichen mit $\vec{j} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = 0$
 \Rightarrow Es gibt "magnetisches Skalarpotential" Φ_M mit $\vec{H} = -\nabla\Phi_M$
 $\xrightarrow{(\nabla \cdot \vec{B} = 0)}$ $\boxed{\nabla(\mu \nabla\Phi_M) = 0}$ bzw. für $\mu = \text{const.}$: $\boxed{\Delta\Phi_M = 0}$
- (3) Gemeinsame Struktur
 Wenn Medien linear und stückweise homogen, d.h. $\epsilon = \text{const.}$ und $\mu = \text{const.}$ außer bei Grenzflächen
 \leadsto Grundproblem besteht darin, unter Berücksichtigung der Randbedingungen die homogene oder inhomogene Laplace-Gleichung zu lösen: $\boxed{\Delta\Psi = 0}$ oder $\boxed{\Delta\Psi = -4\pi f(\vec{r})}$ (für beliebige $f(\vec{r})$)

* Spezielle Randbedingungen

- (i) Begrenzende Oberfläche O mit Dirichletschen Randbedingungen: Wert des Potentials $\Psi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in O$ ist vorgegeben.
 Realisierung (Elektrostatik) z.B. leitende Oberflächen (1.3.5.2)
- (ii) Begrenzende Oberfläche O mit von Neumannschen Randbedingungen: Wert der Normalenableitung $\vec{n} \cdot \nabla\Phi$ auf O ist vorgegeben, wobei \vec{n} : Einheitsvektor senkrecht zur Oberfläche. (Konvention: zeigt in das betrachtete Gebiet hinein.)
 Realisierung (Elektrostatik) z.B. Grenzflächen zu einem Medium mit sehr viel niedrigerer dielektrischer Konstante (1.3.5.1)
 (oder in der Hydrodynamik)

* Eindeutigkeitssatz

Sind auf einer geschlossenen Oberfläche ∂V eines Gebietes V Dirichletsche oder von-Neumannsche Randbedingungen vorgegeben, so ist die Lösung der Poissongleichung in diesem Gebiet eindeutig (evtl. bis auf eine Konstante). Das gilt auch für gemischte Randbedingungen (teilweise Dirichlet, teilweise von Neumann).

(Beweis: Angenommen, es gäbe zwei unterschiedliche Lösungen Ψ_1 und Ψ_2
 \Rightarrow Differenz $\tilde{\Psi} = \Psi_1 - \Psi_2$ erfüllt $\Delta\tilde{\Psi} = 0$ im Volumen
 und Randbedingung $\tilde{\Psi} = 0$ oder $\tilde{n} \cdot \nabla\tilde{\Psi} = 0$ auf Oberfläche.

Wende Gaußschen Satz auf $\tilde{\Psi} \nabla\tilde{\Psi}$ an:

$$\int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{-dA \tilde{n}} \cdot (\tilde{\Psi} \nabla\tilde{\Psi}) = \int_{\partial V} dA \tilde{\Psi} (\tilde{n} \cdot \nabla\tilde{\Psi}) = 0 \text{ laut Voraussetzung}$$

$$\stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_V d^3r \nabla(\tilde{\Psi} \nabla\tilde{\Psi}) = \int_V d^3r \left[(\nabla\tilde{\Psi})^2 + \underbrace{\tilde{\Psi} \Delta\tilde{\Psi}}_0 \right]$$

$\Rightarrow (\nabla\tilde{\Psi}) \equiv 0$ überall in $V \Rightarrow \tilde{\Psi} \equiv \text{const.}$

bzw. bei Dirichlet-Randbedingungen sogar $\tilde{\Psi} \equiv 0$.

$\Rightarrow \Psi_1 \equiv \Psi_2 + \text{const.}$ bzw. im Dirichlet-Fall $\Psi_1 \equiv \Psi_2$.)

NB: Dieser Satz begründet den besonderen Stellenwert der Dirichletschen bzw. der von-Neumannschen Randbedingungen.

1.4.2 Die Methode der Greenschen Funktion

In 1.2.2: Herleitung einer Gleichung für das Potential bzw. Vektorpotential einer beliebigen Ladungsverteilung bzw. Stromverteilung im unbegrenzten Raum aus dem Potential einer Punktladung mittels Superpositionsprinzip.

In diesem Abschnitt: Verallgemeinerung für beliebige Randbedingungen.

1.4.2.1 Allgemeines Konzept der Greenschen Funktion

Gegeben sei lineare Differentialgleichung für ein Skalarfeld $\Psi(\vec{r})$ im Gebiet V

$$\boxed{L\Psi(\vec{r}) = 4\pi f(\vec{r})} \quad L \text{ linearer Operator (z.B. } L = -\Delta, L = \square)$$

mit Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V :

- (i) vom Dirichlet-Typ ($\Psi(\vec{r})$ vorgegeben) oder
- (ii) vom von-Neumann-Typ ($\tilde{n} \cdot \nabla\Psi(\vec{r})$ vorgegeben).

Ansatz: Löse zunächst die Gleichung $\boxed{LG(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')}$ mit Randbedingung $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ im Fall (i), $\tilde{n} \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ im Fall (ii).

Bestimme ferner Feld $\tilde{\Psi}(\vec{r})$ mit $L\tilde{\Psi} \equiv 0$ im Gebiet V , das auf der Oberfläche ∂V denselben Randbedingungen wie Ψ genügt.

\Rightarrow Allgemeine Lösung für beliebiges $f(\vec{r})$ ist

$$\boxed{\Psi(\vec{r}) = \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') + \tilde{\Psi}(\vec{r})}$$

(Beweis: Einsetzen $L\Psi(\vec{r}) = \int d^3r' f(\vec{r}') \underbrace{LG(\vec{r}, \vec{r}')}_{4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} + \underbrace{L\tilde{\Psi}}_0 = 4\pi \int d^3r' f(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = 4\pi f(\vec{r})$)

Randbedingungen sind per Konstruktion erfüllt. \checkmark)

Vorteil: Man muß nur einmal G und $\tilde{\Psi}$ ausrechnen, und hat damit die Lösung für alle $f(\vec{r})$.

1.4.2.2 Anwendung auf Poisson-Gleichung

Im Kontext der Elektro- und Magnetostatik ist $L = -\Delta$, d.h. man sucht die Greensche Funktion des Laplace-Operators.

- * Vereinfachung: Mit Hilfe des Greenschen Satzes kann der Ansatz so umformuliert werden, dass eine separate Berechnung von $\tilde{\Psi}$ nicht nötig ist.

Greenscher Satz: Für Skalarfelder φ, ψ auf Gebiet V gilt:

$$\int_V d^3r (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi)$$

Setze ein: $\psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})$ und $\varphi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$.

$$\Rightarrow \int_V d^3r \Psi(\vec{r}) \underbrace{\Delta G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')} - \int_V d^3r G(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{\Delta \Psi(\vec{r})}_{-4\pi f(\vec{r})} = \int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{-\vec{n} dA} \cdot (\Psi \nabla G - G \nabla \Psi)$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}') = \int_V d^3r G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA \left(\Psi(\vec{r}) (\vec{n} \cdot \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')) - G(\vec{r}, \vec{r}') (\vec{n} \cdot \nabla \Psi(\vec{r})) \right).$$

\Rightarrow Allgemeine Lösung: $\Psi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}', \vec{r}) f(\vec{r}') + \tilde{\Psi}(\vec{r})$

mit $\tilde{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA' \left\{ \Psi(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r}', \vec{r})) - G(\vec{r}', \vec{r}) (\vec{n}' \cdot \nabla \Psi(\vec{r}')) \right\}$

Dirichletsche Randbedingungen: $G = 0$, $\Psi(\vec{r}')$ vorgegeben.

von-Neumann Randbedingungen: $\vec{n} \cdot \nabla G = 0$, $(\vec{n} \cdot \nabla \Psi)$ vorgegeben.

(Achtung: Hier zeigt \vec{n} nach innen, in das Gebiet V hinein!)

* Bemerkungen:

- Gleichung für Ψ sieht hier etwas anders aus als in 1.4.2.1 (dort lautete zweiter Term $\int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')$). Ergibt sich aus der Anwendung des Greenschen Satzes zur Berechnung von $\tilde{\Psi}$ aus der Greenschen Funktion. Stört nicht weiter.

- Bei reinen von Neumannschen Randbedingungen an den Oberflächen ∂V von endlichen Gebieten V tritt ein Problem auf:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} dA (\vec{n} \cdot \nabla G) &= - \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \nabla G = - \int_V d^3r \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= 4\pi \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi. \end{aligned}$$

\Rightarrow Randbedingung $(\vec{n} \cdot \nabla G) \equiv 0$ ist nicht realisierbar!

Ausweg: Modifizierte Greensche Funktion $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$ mit Randbedingung $\vec{n} \cdot \nabla G_N = 4\pi/A$, wobei A : Fläche von ∂V .

$$\Rightarrow \tilde{\Psi}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} dA' (\vec{n}' \cdot \nabla \Psi) G_N(\vec{r}', \vec{r}) + \underbrace{\frac{1}{A} \int_{\partial V} dA' \Psi(\vec{r}')}_{\text{const.}}$$

NB: Die zusätzliche Konstante ist uninteressant. Bei durchgängig von-Neumannschen Randbedingungen ist Ψ ohnehin nur bis auf eine Konstante bestimmt!

* Interpretation der Greenschen Funktion

Vergleiche Gleichungen $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ und $\Delta \Psi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$
 $\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist das von einer Punktladung $q' = 1$ am Ort \vec{r}' erzeugte
 elektrostatische Potential am Ort \vec{r} unter den Randbedingungen $G = 0$
 bzw. $\vec{n} \cdot \nabla G = 0$. Formalismus funktioniert wegen Superpositionsprinzip
 \rightarrow Potentiale können aufaddiert werden.

* Beispiele für Greensche Funktionen

(Potential einer Punktladung unter verschiedenen Randbedingungen)

- Unbegrenzter Raum mit Randbedingung $\Psi(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ entspricht Potential $\Phi(\vec{r})$ einer
 Punktladung $q' = 1$ bei \vec{r}' . Bekannt aus 1.2.2 \Rightarrow

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Halbraum $z > 0$ mit Dirichletscher Randbedingung bei $z = 0$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ entspricht Potential $\Phi(\vec{r})$ einer Punktladung $q' = 1$ bei \vec{r}'
 mit $\vec{r}' = (x', y', z' > 0)$ im Bereich $z > 0$ mit Randbedingung $\Phi|_{z=0} \equiv 0$

$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

(Check: $\Phi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$ entspricht Feld zweier Punktladungen $q', q'' = \pm 1$
 bei $\vec{r}' = (x', y', z')$ und $\vec{r}'' = (x', y', -z')$

Nur Ladung q' bei \vec{r}' ist im Halbraum

$\Rightarrow G$ Erfüllt $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ im Halbraum \checkmark

Bedingung $G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0$ für $z = 0$ automatisch erfüllt. \checkmark)

- Halbraum $z > 0$ mit von Neumannscher Randbedingung bei $z = 0$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ entspricht Potential $\Phi(\vec{r})$ einer Punktladung $q' = 1$ bei \vec{r}'
 mit $z' > 0$ im Bereich $z > 0$ mit Randbedingung $\partial_z \Phi|_{z=0} \equiv 0$

$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}$$

(Check: Ähnlich wie oben: $\Phi(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$ entspricht Feld zweier
 Punktladungen $q', q'' = 1$ bei $\vec{r}' = (x', y', z')$ und $\vec{r}'' = (x', y', -z')$

Nur Ladung q' bei \vec{r}' ist im Halbraum

$\Rightarrow G$ Erfüllt $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ im Halbraum \checkmark

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ ist symmetrisch gegen Vertauschung $z \leftrightarrow -z$

$\Rightarrow \partial_z G|_{z=0} = 0$ aus Symmetriegründen \checkmark)

1.4.2.3 **Greensche Funktion in inhomogenen Medien**

Formalismus der Greenschen Funktion kann im Prinzip auch für ortsabhängige
 $\epsilon(\vec{r})$ und $\mu(\vec{r})$ angewendet werden, da die Gleichungen $\nabla(\epsilon \nabla \Phi) = -4\pi \rho$
 bzw. $\nabla(\frac{1}{\mu} \nabla A_k) = -\frac{4\pi}{c} j_k$ linear sind (\Rightarrow Superpositionsprinzip gültig).
 Dann kann allerdings der Greensche Satz nicht mehr zur Berechnung von
 $\tilde{\Phi}$ verwendet werden.

Im ersten Fall z.B. muss dann die Gleichung $\nabla(\epsilon(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}')) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$
 und $\nabla(\epsilon(\vec{r}) \nabla \tilde{\Phi}(\vec{r})) = 0$ mit den einschlägigen Randbedingungen gelöst
 werden. Man erhält $\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \tilde{\Phi}(\vec{r})$

1.4.3 Lösungsmethoden für Randwertprobleme

Wir stellen nun ein paar Methoden zusammen, die bei der Lösung der Laplace-Gleichung und der Berechnung von Greenschen Funktionen mit vorgegebenen Randbedingungen helfen können.

1.4.3.1 Spiegelladungen

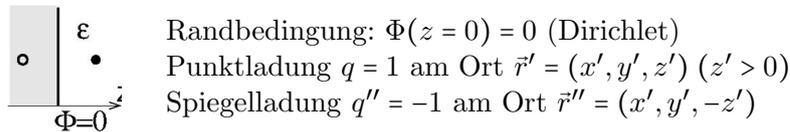
Gesucht: Potential einer Punktladung in einem begrenzten Gebiet mit vorgegebenen Randbedingungen

Lösungsansatz: Verteilung zusätzlicher fiktiver Punktladungen außerhalb des Gebiets, welche die Randbedingungen sicherstellen.

Beispiele

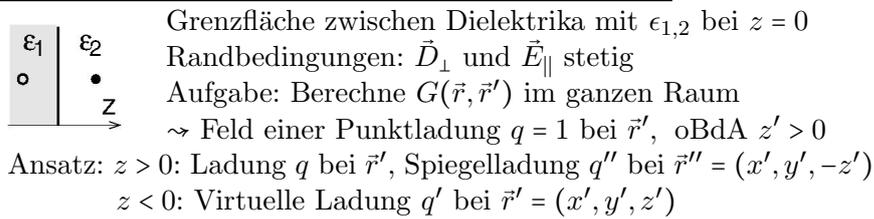
- * Dielektrikum im Halbraum, begrenzt durch leitende Ebene

(siehe 1.4.2.2)



Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right]$ erfüllt Randbedingung $G \equiv 0$ bei $z = 0$ und $\epsilon \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ auf $z > 0$.

- * Zwei Dielektrika mit planarer Grenzfläche dazwischen



$$\Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} & =: G^< \quad : z < 0 \\ \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) & =: G^> \quad : z > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Stetigkeit: } \vec{D}_\perp &= -\epsilon \partial_z G \text{ stetig} \rightarrow \epsilon_1 \partial_z G^< \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \partial_z G^> \Big|_{z=0} \\ \vec{E}_\parallel &= -\partial_{x,y} G \text{ stetig} \rightarrow \partial_{x,y} G^< \Big|_{z=0} = \partial_{x,y} G^> \Big|_{z=0} \\ \Rightarrow q' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad q'' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \end{aligned}$$

1.4.3.2 Inversionsmethode

Beobachtung: Die Laplace-Gleichung $\Delta \Psi = 0$ ist invariant gegen Transformationen der Form $r \rightarrow \tilde{r} = r_0^2/r$ $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = \frac{r_0}{r} \Psi = \frac{\tilde{r}}{r_0} \Psi$

Konkret: Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \Psi - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2 \Psi = 0 \quad (-\hat{L}^2: \text{Winkelanteil, siehe 1.2.3.1})$$

Mit $\Psi(\vec{r})$ ist auch $\tilde{\Psi}(\vec{r}) = \frac{r_0}{r} \Psi(\vec{r})$ mit $\tilde{r} = \frac{r_0^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, d.h. aus $\Delta \Psi(\vec{r}) = 0$ folgt $\Delta \tilde{\Psi}(\vec{r}) = 0$.

$$(\text{Check: } [\frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{r}} \tilde{r}^2 \partial_{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \hat{L}^2] \tilde{\Psi}(\vec{r}) = \dots = (\frac{\tilde{r}}{r_0})^5 [\frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad \checkmark)$$

Anwendung: Damit lassen sich aus bekannten Lösungen der Poisson-Gleichung neue Lösungen konstruieren

Beispiel: Aus 1.4.3.1 bekannt: Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung in einem durch eine leitende Ebene begrenzten Halbraum

Konstruiere daraus Lösung für Greensche Funktion mit leitender Kugel:

- Vorab:

- Inversion projiziert Ebene auf Kugel

(Wähle Koordinatensystem so, dass Ebene bei $z = \bar{z}$ ist;

\Rightarrow Vektoren der Ebene haben die Form $\vec{r} = \bar{z}\vec{e}_z + \vec{\rho}$

mit $\vec{\rho} \perp \vec{e}_z \quad (\Rightarrow r^2 = \bar{\rho}^2 + \bar{z}^2)$

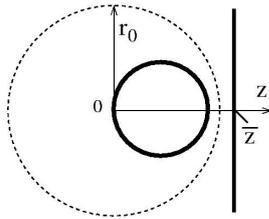
Invertiere an Kreis mit Radius $r_0 < \bar{z}$

$\Rightarrow \vec{r} \rightarrow \tilde{\vec{r}} = \vec{r} \frac{r_0^2}{r^2} = (\bar{z}\vec{e}_z + \vec{\rho}) \frac{r_0^2}{\bar{\rho}^2 + \bar{z}^2};$

Definiere $\tilde{R} = \frac{1}{2}\vec{e}_z \frac{r_0^2}{\bar{z}}$

$\Rightarrow (\tilde{\vec{r}} - \tilde{R})^2 = \dots = \frac{r_0^4}{4\bar{z}^2} = \tilde{R}^2 = \text{const.} \checkmark$

NB: Da Ursprung des Koordinatensystems und somit \bar{z} und r_0 beliebig gewählt werden können, kann auf eine Kugel mit beliebigem Radius R projiziert werden. ($R = r_0/\sqrt{2\bar{z}}$)



- Inversion projiziert eine Punktladung q_i am Ort \vec{r}_i auf eine Punktladung $\tilde{q}_i = \frac{r_0}{r_i} q_i$ am Ort $\tilde{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2$

(Invertiere Potential der Punktladung, $\Phi(\vec{r}) = \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ und vergleiche:

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}) = \frac{r_0}{r} \Phi\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \vec{r}\right) = \frac{r_0}{r} \frac{q_i}{\left|\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \vec{r} - \vec{r}_i\right|} = \frac{q_i}{r_0} / \left(1 + \frac{r^2 r_i^2}{r_0^4} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i\right) = \frac{r_0}{r_i} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 \vec{r}_i\right|} \checkmark)$$

- Suche nun: Lösung von $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ mit Randbedingung: $G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv 0$ für \vec{r} auf Kugel vom Radius R

- Strategie: – Wähle z -Achse durch Kugelmittelpunkt und Ort \vec{r}'

- Bilde Kugel durch geeignete Inversion auf Ebene ab

Inversionsradius $r_0 > R$, Abstand der Ebene $D = \frac{r_0^2}{2R}$

Ladung $q = 1$ bei z'

\Rightarrow "invertierte" Ladung $\tilde{q} = \frac{r_0}{z'} q$ bei $\tilde{z} = \frac{r_0^2}{z'}$

- Spiegelladung im invertierten System:

$$\tilde{q}^* = -\tilde{q}, \quad \tilde{z}^* = 2D - \tilde{z} = r_0^2 \left(\frac{2D}{r_0^2} - \frac{1}{z'}\right) = r_0^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'}\right)$$

- Invertiere wieder zurück

\rightarrow Spiegelladung am Ort $z^* = \frac{r_0^2}{\tilde{z}^*} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'}\right)^{-1} = \frac{Rz'}{z' - R}$

Wert der Spiegelladung: $q^* = \tilde{q}^* \frac{r_0}{z^*} = -\frac{R}{z' - R} q$

- Bezüglich des Mittelpunkts der Kugel folgt:

Abstand zwischen \vec{r}' und dem Kugelmittelpunkt ist $d_0 = z' - R$

Abstand zwischen Spiegelladung und dem Kugelmittelpunkt ist

$$d_0^* = z^* - R = R^2/d_0$$

Wert der Spiegelladung: $q^* = -q R/d_0$

\Rightarrow In einem Bezugssystem, in dem der Ursprung im Mittelpunkt der Kugel liegt, lautet die Greensche Funktion:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \alpha \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'/\alpha^2|} \quad \text{mit } \alpha = R/r'$$

1.4.3.3 Konforme Abbildungen

Ähnlicher Gedanke wie Inversionsmethode: Konstruktion neuer Lösungen aus bekannten Lösungen. Mächtiges Lösungsverfahren für Gleichungen $\Delta\Psi = 0$, funktioniert aber leider nur in zwei Raumdimensionen.

Nimm an, Feld hängt nur von zwei Variablen x, y ab

→ Dann gibt es Zusammenhang mit Funktionentheorie

- (i) Fasse $x + iy = z$ zu komplexer Variablen zusammen.
 Betrachte beliebige holomorphe Funktion $w(z) = u + iv$
 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:
 $\partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v \Rightarrow \Delta u = \partial_{xy} v - \partial_{yx} v = 0, \Delta v = 0$
 $\Rightarrow u$ und v erfüllen automatisch die Laplace-Gleichung
- (ii) Umgekehrt: Falls Φ die Laplace-Gleichung erfüllt, lässt sich $w = \Phi - iA$ konstruieren, das holomorph ist.
 $(\vec{E} = -\nabla\Phi, \nabla \cdot \vec{E} = -\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \vec{E}$ hat Vektorpotential $\vec{A} = (0, 0, A)$
 mit $\vec{E} = \nabla \times \vec{A}$, d.h. $E_x = \partial_y A, E_y = -\partial_x A \Rightarrow w = \Phi - iA$ ist gesuchte Funktion)

Anwendung: Analog 1.4.3.2 – Konstruktion neuer Lösungen der Laplace-Gleichung zu neuen Randbedingungen

Mit $\Phi(x, y)$ ist auch $\Phi(u, v)$ Lösung der Laplace-Gleichung, falls $z = x + iy$ eine holomorphe Funktion von $w = u + iv$ ist (also $z(w)$ analytisch)

Damit kann man fast nach Belieben Randbedingungen auseinander konstruieren.

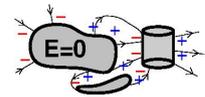
↪ Geniales Verfahren, auch in der Hydrodynamik sehr nützlich, aber eben leider nur für zweidimensionale Probleme!

1.4.4 Leitersysteme

Zum Abschluss dieses Teilkapitels: Zusammenstellung einiger Ergebnisse speziell zur Elektrostatik von Systemen von Leitern im Vakuum.

- * Kennzeichen von Leitern (vgl. 1.3.5.2: Es gibt frei bewegliche Ladungen, die den Feldlinien folgen können (z.B. Metalle mit freien Elektronen, Salzlösungen mit freien Ionen)

→ im statischen Fall (unbewegte Ladungen) muss das Feld innerhalb des Leiters Null sein ($\vec{E} = 0, \Phi = \text{const.}$).
 An Oberflächen steht es senkrecht zur Oberfläche.



- * Konsequenzen für ein System von Leitern im Vakuum:

- (a) Oberflächenladungen: Ladungen sitzen auf der Oberfläche. Oberflächenladungsdichte σ (Ladung pro Fläche) verteilt sich so, dass

$$\vec{E} = \vec{n} 4\pi\sigma \quad (\vec{n}: \text{Normalenvektor})$$

(denn: Gaußscher Satz, Lege infinitesimales Volumen um Flächenelement a ,
 $\Rightarrow \oint d\vec{A} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{n} a = \int d^3r \nabla \cdot \vec{E} = \int d^3r 4\pi\rho = 4\pi\sigma a \quad \checkmark$)

(b) Elektrostatische Energie eines Systems von Leitern α mit Potentialen

$$\Phi_\alpha \text{ und Ladungen } Q_\alpha: \quad U = \frac{1}{2} \sum_\alpha Q_\alpha \Phi_\alpha$$

(denn: $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla\Phi)^2 = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \Phi \Delta\Phi + \frac{1}{8\pi} \int d\vec{A} \cdot \Phi \nabla\Phi$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Zweiter Term: Wähle Oberfläche: Kugel mit Radius } R \rightarrow \infty \\ \text{Im Unendlichen } \Phi \text{ mindestens wie } 1/R \text{ (vgl. 1.2.3)} \\ \Rightarrow \Phi \cdot \nabla\Phi \text{ fällt mindestens wie } 1/R^3 \text{ ab} \Rightarrow \oint d\vec{A} \cdot \Phi \nabla\Phi \sim 1/R \rightarrow 0 \\ \text{Erster Term: } \int d^3r \Phi \Delta\Phi = -4\pi \int d^3r \Phi \rho = -4\pi \sum_\alpha \Phi_\alpha \underbrace{\int_{V_\alpha} d^3r \rho}_{Q_\alpha} \\ \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_\alpha \Phi_\alpha Q_\alpha \quad \checkmark \end{array} \right.$$

(c) Zusammenhang zwischen Ladungen und Potentialen

Da die Feldgleichungen linear sind, müssen die Ladungen Q_α und die Potential Φ_α linear voneinander abhängen

$$Q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \Phi_\beta \quad \text{mit geometrieabhängigen Koeffizienten } C_{\alpha\beta}$$

Terminologie (nicht einheitlich; hier folgen wir Jackson)

$C_{\alpha\beta}$: Kapazitätskoeffizienten

$C_{\alpha\alpha}$: Kapazität: Entspricht Ladung pro Potential auf Leiter α , wenn alle anderen Leiter geerdet sind (d.h. das Potential $\Phi = 0$ haben)

Damit kann die Energie eines Leitersystems geschrieben werden als

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \Phi_\alpha \Phi_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^{-1} Q_\alpha Q_\beta$$

Es gilt:

- $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, $C_{\alpha\beta}^{-1} = C_{\beta\alpha}^{-1}$ (nicht gezeigt)
- $C_{\alpha\alpha} > 0$, $C_{\alpha\alpha}^{-1} > 0$ (da $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2$ immer positiv ist.)
 (Betrachte den Fall, dass alle Leiter bis auf Leiter α geerdet sind.)
 $\Rightarrow U = \frac{1}{2} C_{\alpha\alpha} \Phi_\alpha^2 > 0 \Rightarrow C_{\alpha\alpha} > 0$
 $C_{\alpha\alpha}^{-1}$: Analoges Argument, alle Leiter bis auf α ungeladen.)
- $C_{\alpha\beta} < 0$ für $\alpha \neq \beta$
 (Betrachte System, in dem alle Leiter bis auf einen geerdet sind. Dieser habe $\Phi > 0 \Rightarrow Q > 0$
 \Rightarrow induzierte Ladungen auf den anderen Leitern sind negativ.)

(d) Satz von Thomson

Die Ladungen in einem Leitersystem verteilen sich bei festgehaltenen Gesamtladungen auf den Leitern so, dass die Feldenergie minimal ist.

(denn: Variiere Oberflächenladungsdichte σ bei festgehaltenen Gesamtladungen
 Dann ergibt sich $\delta\sigma \rightarrow \delta\vec{E} \rightarrow \delta U$ mit

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E} + \delta\vec{E})^2 - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2 = \frac{1}{4\pi} \int d^3r [\vec{E} \cdot (\delta\vec{E}) + \overbrace{(\delta\vec{E})^2}^{>0}] \\ &> -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \nabla\Phi \cdot (\delta\vec{E}) = -\frac{1}{4\pi} \oint d\vec{A} \cdot (\Phi \delta\vec{E}) + \frac{1}{4\pi} \int d^3r \Phi \nabla \cdot \delta\vec{E} = \int d^3r \Phi \delta(\Delta\Phi) \\ &\quad \rightarrow 0 \text{ im Unendlichen wie in (b)} \quad \delta(\nabla \cdot \vec{E}) \\ &= -4\pi \int d^3r \Phi \delta\rho = -4\pi \sum_\alpha \Phi_\alpha \delta Q_\alpha = 0, \text{ da } \delta Q_\alpha = 0 \Rightarrow U \text{ minimal.} \end{aligned}$$

Folgerung: Ein ungeladener Leiter wird von einem System von Leitern immer angezogen. Die Energie des Feldes wird durch die Umverteilung von Ladungen auf diesem Leiter reduziert.

* Leitersysteme in isolierenden dielektrischen Medien

Für Leiter in Medien gelten im Wesentlichen die gleichen Überlegungen wie oben, mit kleinen Änderungen

- Energiedichte des Feldes: $u = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \cdot \vec{D}$
- Oberflächenladungen: $\vec{D} = \vec{n} 4\pi\sigma$
- Kapazitätskoeffizienten werden reskaliert $C_{\alpha\beta} \rightarrow C'_{\alpha\beta} = \epsilon C_{\alpha\beta}$
- Elektrostatische Energie:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \Phi_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C'_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha} \Phi_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C'^{-1}_{\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta}$$

1.4.5 Zusammenfassung von Kapitel 1.4

Erweiterung von Kapitel 1.2: Lösung elektrostatischer oder magnetostatischer Probleme, diesmal mit Randbedingungen und ggf. in Medien

- Mathematisch: Lösung der Poissongleichung $\Delta\Psi = -4\pi f(\vec{r})$ mit vorgegebenen Randbedingungen, insbesondere
 - Dirichletsche Randbedingungen: Ψ vorgegeben auf dem Rand
 - von Neumannsche Randbedingungen: Normalenableitung $\vec{n} \cdot \nabla\Psi$ vorgegeben auf dem Rand
- Wichtiges Konzept zur Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen
Greensche Funktionen (\leftrightarrow Anwendung des Superpositionsprinzips)
 (übergreifend in vielen Bereichen der Physik verwendet)
- Konkrete Lösungsmethoden: z.B. Spiegelladungen

Zum Abschluss noch ein wichtiger Satz zur elektrostatischen Stabilität:

┌ Eine Punktladung kann sich nicht unter dem alleinigen Ein-
 └ fluss elektrostatischer Kräfte im Gleichgewicht befinden!

Grund: Potential Φ kann innerhalb eines quellenfreien Mediums kein Extremum haben, denn wegen $\Delta\Phi = \text{Sp}(\{\partial_{ij}\Phi\}) = 0$ kann die Matrix $\{\partial_{ij}\Phi\}$ nicht positiv definit sein.

1.5 Wellenausbreitung

In Kapitel 1.2 und 1.4 haben wir uns mit Statik beschäftigt: Stationäre Systeme mit Quellen (Ladungen, Strömen).

Nun komplementäres Problem: Zeitabhängige Felder, aber quellenfrei.
(in Kapitel 1.6 dann Lösung der vollen Maxwellgleichungen)

1.5.1 Elektromagnetische Wellen

1.5.1.1 Allgemeine Lösung

* Ausgangspunkt: Maxwellgleichungen im Frequenzraum ohne Quellterme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \quad \nabla \times \vec{E} - i\omega \vec{B} / c = 0 & \quad \text{mit} & \quad \vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \quad \nabla \times \vec{H} + i\omega \vec{D} / c = 0 & & \quad \mu(\omega) \vec{H}(\omega) = \vec{B}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kombiniert: } \Delta \vec{B} \stackrel{\nabla \cdot \vec{B}=0}{=} -\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) + \Delta \vec{B} &= -\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = i\omega \frac{\epsilon\mu}{c} \nabla \times \vec{E} = -\omega^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{B} \\ \Delta \vec{E} \stackrel{\nabla \cdot \vec{E}=0}{=} -\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \Delta \vec{E} &= -\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -i\omega \frac{1}{c} \nabla \times \vec{B} = -\omega^2 \frac{\epsilon\mu}{c^2} \vec{E} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Wellengleichung } \boxed{\Delta u + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} u = 0} \text{ für Komponenten } u = E_\alpha, B_\alpha$$

$$\text{mit } \boxed{n = \sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{Brechungsindex}$$

NB: $n(\omega)$ ist frequenzabhängig und evtl. komplex, $n = n_r + in_i$

* Allgemeine Lösung in der Zeit setzt sich aus ebenen Wellen zusammen:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t))} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t))}$$

mit (i) $\vec{q} = q \vec{e}_k$, wobei \vec{e}_k Einheitsvektor und $q = k + i\eta = \frac{n\omega}{c}$ (k, η reell)
 \rightsquigarrow "Dispersionsrelation": $\omega(k) = \frac{c}{n} k$
 \rightsquigarrow "Dämpfungsrelation": $\eta(k) = \frac{n_i}{n_r} k$ (aus: Wellengleichung)

(ii) $\vec{e}_k \cdot \vec{E}_0 = \vec{e}_k \cdot \vec{B}_0 = 0$ (aus: $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{B} = 0$)
 \rightsquigarrow Transversale Wellen: \vec{E}, \vec{B} stehen senkrecht auf \vec{e}_k
 \rightsquigarrow Zwei unabhängige Komponenten (Polarisationen)

(iii) $\vec{E}_0 = -\frac{1}{n} (\vec{e}_k \times \vec{B}_0), \quad \vec{B}_0 = n (\vec{e}_k \times \vec{E}_0)$
 $\rightsquigarrow \vec{E}$ und \vec{B} senkrecht, $(\vec{e}_k, \vec{E}, \vec{B})$ bilden Rechtssystem
 (aus: $\nabla \times \vec{B} = i \vec{q} \times \vec{B} = -i \frac{\epsilon\mu}{c} \omega \vec{E} = -in q \vec{E}, \nabla \times \vec{E} = i \vec{q} \times \vec{E} = i \frac{1}{c} \omega \vec{B} = i \frac{1}{n} q \vec{B}$)

* Charakterisierung der ebenen Wellen:

- Definiere $\vec{k} = k \vec{e}_k$, so dass $\vec{q} = \vec{k} + i\eta \vec{e}_k \Rightarrow \vec{E}, \vec{B} \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-\eta \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$
- Betrachte Phasenfunktion $\varphi(\vec{r}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = k \vec{e}_k \cdot (\vec{r} - \frac{\omega}{k} \vec{e}_k t)$
 \Rightarrow Propagiert gemäß $\varphi(\vec{r}, t + dt) = \varphi(\vec{r} - \vec{v}_{\text{ph}} dt, t)$ mit $\vec{v}_{\text{ph}} = \vec{e}_k \omega / k$
 $\rightsquigarrow v_{\text{ph}}$: Phasengeschwindigkeit, $v_{\text{ph}} = \omega / k = c / n_r$
 \vec{e}_k : Ausbreitungsrichtung

$$\text{- Poynting-Vektor (vgl. 1.3.4)} \quad \boxed{\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{e}_k |\vec{E}_0|^2 e^{-2\eta \vec{e}_k \cdot \vec{r}}}$$

1.5.1.2 Dispergierende Medien

* Kennzeichen: $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ reell (fernab jeder Resonanz)

* Folgerungen: n und q reell, $n_i \approx 0$, $\eta \approx 0$

– Gewöhnliche ebene Wellen

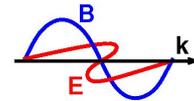
– \vec{E} und \vec{B} sind in Phase ($\vec{B}_0 = n(\vec{e}_k \times \vec{E}_0)$)

* Basissysteme aus ebenen Wellen: Zwei populäre Möglichkeiten

• Linear polarisierte Wellen:

$$\vec{E} = \vec{\epsilon} E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = n(\vec{e}_k \times \vec{\epsilon}) E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

mit $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$: Polarisationsvektor



• Zirkular polarisierte Wellen (wieder mit $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$)

$$\vec{E} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon} \pm i(\vec{e}_k \times \vec{\epsilon})) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} n(\vec{e}_k \times \vec{\epsilon} \mp i\vec{\epsilon}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

(Vorteil in der Quantenmechanik: Felder mit definierter "Helizität")

* Bemerkung: In bestimmten anisotropen Medien hängt die Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\omega)$ und damit der Brechungsindex $n(\omega)$ von der Polarisation $\vec{\epsilon}$ ab. Dann ist die Phasengeschwindigkeit für verschiedene Polarisationen verschieden → Doppelbrechung.

→ Anwendungen in der Optik, z.B.:

$\lambda/4$ -Plättchen: Wechsel zwischen linear/zirkular polarisiertem Licht

$\lambda/2$ -Plättchen: Drehen der Polarisationsrichtung

1.5.1.3 Dissipative Medien und Leiter

* Kennzeichen: ϵ hat großen imaginären Anteil (nahe an Resonanz)

* Folgerungen: n und q komplex, $n_i, \eta \neq 0$

– Wellen $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-\eta \vec{e}_k \cdot \vec{r}}$ sind gedämpft
Abklinglänge bzw. Eindringtiefe ("Skintiefe"): $\delta = 1/\eta$

– \vec{E} und \vec{B} nicht mehr in Phase

Phasenverschiebung: $\vec{B}_0 \propto e^{i\Phi} \vec{E}_0$ mit $\Phi = \arctan(\eta/k) = \arctan(n_i/n_r)$

* Speziell Leiter: $\epsilon(\omega) = \tilde{\epsilon} + i 4\pi\sigma/\omega$ (nach 1.3.3.1)

$\tilde{\epsilon}$: Polarisation des Hintergrundes, σ : Leitfähigkeit

$$\Rightarrow q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} \sqrt{1 + i 4\pi\sigma/\omega \tilde{\epsilon}} = k + i\eta$$

Fälle: • $\frac{4\pi\sigma}{\omega \tilde{\epsilon}} \ll 1$ ("schlechter Leiter")

→ $k \approx \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}} \frac{\omega}{c}$, $\eta \approx \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} \sigma$: Dämpfung unabhängig von ω

• $\frac{4\pi\sigma}{\omega \tilde{\epsilon}} \gg 1$ ("guter Leiter")

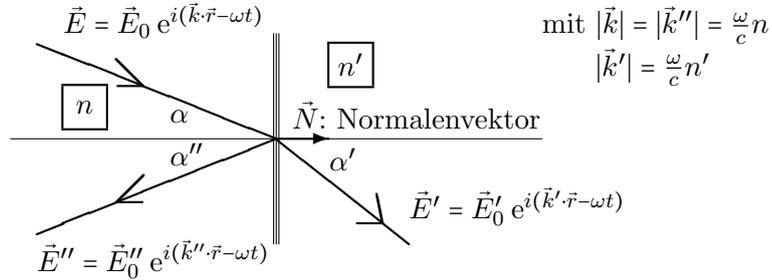
→ $k \approx \eta \approx \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c}$: Dämpfung $\sim \sqrt{\omega}$, Skintiefe $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}$

⇒ In guten Leitern fließt Strom im Hochfrequenzbereich an der Oberfläche. Im Inneren ist er gedämpft!

1.5.2 Reflexion und Brechung

Betrachte nun Wellenausbreitung an Grenzflächen zwischen zwei Medien mit verschiedenem Brechungsindex

* Geometrie:



* Randbedingungen (siehe 1.3.5): \vec{D}_\perp , \vec{B}_\perp , \vec{E}_\parallel , \vec{H}_\parallel stetig

(i) Kinematische Eigenschaften: Verhältnis der Winkel

- Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel $\alpha = \alpha''$
- Snelliussches Gesetz: $\sin \alpha / \sin \alpha' = n' / n$

(denn: Stetigkeitsbedingungen gelten für alle t und \vec{r} in der Grenzfläche
 $\Rightarrow e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)}$ für alle t und \vec{r} in der Grenzfläche
 $\Rightarrow \vec{k}_\parallel$ gleich, \vec{k}_\perp ergibt sich aus Bedingungen für Betrag $k'' = k$, $k' = k \frac{n'}{n}$
 \Rightarrow Reflexion: $k'' = k \Rightarrow k''_\perp = -k_\perp \Rightarrow \alpha = \alpha''$
 Brechung: $|\vec{k}_\parallel| = k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} \checkmark$)

(ii) Dynamische Eigenschaften: Verhältnis von Amplituden und Phasen

\leadsto Fresnelsche Formeln:

Unterscheide zwischen dem Anteil, der senkrecht zur Einfallsebene (der (\vec{k}, \vec{N}) -Ebene) polarisiert ist, und dem parallelen Anteil.

\Rightarrow Senkrecht zur Einfallsebene

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'} \qquad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{n \cos \alpha - n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'}$$

Parallel zur Einfallsebene

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha + n \cos \alpha'} \qquad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha + n \cos \alpha'}$$

mit $\cos \alpha' = \sqrt{1 - (\frac{n}{n'})^2 \sin^2 \alpha}$ (Rechnung dazu: Übungsaufgabe)

* Folgerungen und Bemerkungen

(1) Brewster-Winkel

Einfallswinkel kann so gewählt werden, dass für den parallelen Anteil des Feldes keine Reflexion auftritt!

$$\frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha_B = \frac{n}{n'} \sqrt{1 - (\frac{n}{n'})^2 \sin^2 \alpha_B}$$

bzw. für $\mu = \mu' = 1$: $\tan \alpha_B = n' / n$

Dann ist die reflektierte Welle linear polarisiert.

Generell ist das reflektierte Licht i.A. größtenteils polarisiert.

(2) Totalreflexionswinkel

Im Fall $n > n'$ (Übergang von "optisch dichterem" zu "optisch dünnerem" Medium) kann die Bedingung $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{n'}{n}$ nicht mehr für alle Winkel α erfüllt werden.

Für $\alpha > \alpha_t := \arcsin(\frac{n'}{n})$ tritt Totalreflexion ein.

Beispiel: Für einen Taucher wirkt die Wasseroberfläche unter schrägem Licht wie ein Spiegel. Er sieht den Himmel nicht mehr.

Genauer: Für $\alpha > \alpha_t$ ist $\sin \alpha' > 1$

$\Rightarrow \cos \alpha' = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha'}$ wird imaginär

\Rightarrow Anteil $k_{\perp} = k' \cos \alpha'$ des Wellenvektors wird imaginär

\Rightarrow Gebrochene Welle wird in Richtung senkrecht zur Oberfläche exponentiell gedämpft mit Abfalllänge

$$1/\text{Im}(k' \cos \alpha') = 1/k' \sqrt{\sin^2 \alpha (\frac{n'}{n})^2 - 1}$$

Man erhält eine Welle, die an der Oberfläche parallel mit einstellbarer Eindringtiefe mitläuft.

Anwendungen:

- Verlustfreier Transport von Licht z.B. in Glasfaserkabeln
- Strukturuntersuchungen an Oberflächen
(Röntgenstreuung unter streifendem Einfall – "X-ray under grazing incidence")

(3) Dissipative Medien

Die Fresnel-Formeln können auch für dissipative Medien verwendet werden. Dann ist der Brechungsindex $n(\omega)$ komplex.

1.5.3 Elektromagnetische Signale

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch die Ausbreitung elektromagnetischer Signale diskutiert werden, d.h. die Ausbreitung räumlich lokalisierter elektromagnetischer Wellen.

Beliebige Signale $\vec{E}(\vec{r}, t)$ können aus ebenen Wellen zusammengesetzt werden.

Zeitliche Entwicklung eines Signals ergibt sich aus Dispersionsrelation $\omega(k)$

1.5.3.1 Wellenpakete

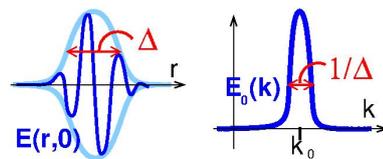
Betrachte einfachheitshalber dispergierende Medien ohne Dissipation ($\eta \approx 0$)

Gegeben Signal $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit Signalform zur Zeit $t = 0$: $\vec{E}(\vec{r}, 0) = \int d^3k \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \int d^3k \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

NB: $\vec{E}_0(\vec{k})$ ist die Fouriertransformierte von $\vec{E}(\vec{r}, 0)$ und zeitunabhängig

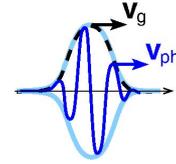
Betrachte nun lokalisiertes Wellenpaket (Bild) mit charakteristischer Wellenlänge $2\pi/k_0$ und charakteristischer Breite Δ



* Wichtige Eigenschaften, basierend auf $\omega(k) = k c/n(\omega)$

(i) Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \frac{c}{n}$:
 Geschwindigkeit eines Wellenberges (siehe 1.5.1.1)

(ii) Gruppengeschwindigkeit $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = \frac{c}{n} \left/ \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right) \right|_{k_0}$:
 Geschwindigkeit der Einhüllenden



(denn: Nimm an, $\vec{E}(\vec{k})$ habe starken peak bei $\vec{k} \approx \vec{k}_0$

$$\Rightarrow \text{Entwickle } \omega(k) \approx \omega(k_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \nabla_{\vec{k}} \omega(k) \Big|_{\vec{k}_0} \stackrel{\nabla_{\vec{k}} = \vec{e}_{k_0}}{=} \omega(k_0) + (\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{e}_{k_0} \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \int d^3 k \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \approx \underbrace{e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega(k_0) t)}}_{\text{ebene Welle}} \underbrace{\int d^3 \xi \vec{E}_0(\vec{k}_0 + \xi) e^{i\xi \cdot (\vec{r} - \vec{e}_{k_0} \frac{d\omega}{dk}|_{k_0} t)}}_{\text{Einhüllende } \vec{H}(\vec{r}, t)}$$

$$\text{mit } \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r} - \vec{e}_{k_0} \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t)$$

→ bewegt sich mit Geschwindigkeit $\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$ in Richtung \vec{e}_{k_0} ✓)

(iii) Dispersion: Wellenpakete zerlaufen

$$\text{Breite der Einhüllenden: } \Delta^2(t) = \Delta^2(0) + \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \frac{1}{\Delta(0)} t \right)^2$$

(Übungsaufgabe oder Theorie III)

* Folgerungen:

- Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{c}{n}$ kann schneller als die Lichtgeschwindigkeit des Vakuums werden (d.h. $v_g > c$), wenn $n = \sqrt{\epsilon\mu} < 1$ ist.

NB: Tritt nach 1.3.3 bei sehr hohen Frequenzen unweigerlich ein, da dann $\epsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 < 1 \Rightarrow n < 1$ für $\mu = 1$!

- Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{c}{n} \left/ \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right) \right.$ normalerweise kleiner als c , aber es gibt keinen rigorosen Grund, warum es so sein muss. $v_g > c$ möglich im Bereich $\frac{dn}{d\omega} < 0 \Rightarrow \frac{d\epsilon}{d\omega} < 0 \Rightarrow$ Anomale Dispersion

In diesem Fall kann die Dissipation nicht vernachlässigt werden, Dämpfung $\eta \neq 0$ muss in der Rechnung berücksichtigt werden. Das ändert aber nichts daran, dass $v_g > c$ möglich ist. Wellenpakete, die sich schneller als Licht fortbewegen, wurden experimentell tatsächlich beobachtet!

- Aber: Wellenfront kann nie schneller als c werden (→ Kapitel 1.5.3.2 !)

1.5.3.2 Maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals

Nach 1.5.3.1 können Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets größer als die Vakuums-Lichtgeschwindigkeit c werden.

Frage: Kann sich ein Signal schneller als c ausbreiten?

Warum das wichtig ist ? – Wenn sich ein Signal schneller als c ausbreiten kann, kann man nach der Relativitätstheorie (→ Kapitel 2) Nachrichten in die Vergangenheit verschicken. Das gibt fundamentale Probleme mit der Kausalität!

Antwort: Nein: Vorderste Front eines Signals bleibt immer langsamer als c !

Beweis: Einfachheitshalber für eindimensionale Signale in Medien mit $\mu = 1$

Betrachte Signal $\vec{E} = \vec{\varepsilon} u(x, t)$, das senkrecht auf ein Dielektrikum trifft:

- Brechungsindex: $n = 1$ für $x < 0$, $n' = n'(\omega)$ für $x > 0$,
- Wohldefinierte Wellenfront: $u(0, t) = 0$ für $t \leq 0$

* Drücke $u(x, t)$ für $x > 0$ als Funktion von $u(x = 0, t)$ aus.

$$\Rightarrow u(x, t) = \int d\omega \frac{2}{1+n'(\omega)} A(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}(n'x-ct)} \text{ mit } A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt u(0, t) e^{i\omega t}$$

(Im Frequenzraum: $u(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt u(x, t) e^{i\omega t}$, $u(x, t) = \int d\omega u(x, \omega) e^{-i\omega t}$)

– Wellengleichung: $\frac{d^2}{dx^2} u = \omega^2 \frac{n^2}{c^2} u \Rightarrow u(x, \omega) \sim e^{i\frac{\omega}{c} n x}$

– $x \leq 0$: $u(x, \omega) = E_0(\omega) e^{i\frac{\omega}{c} n x}$ mit $E_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt u(0, t) e^{i\omega t} =: A(\omega)$

– $x > 0$: $u(x, \omega) = E'_0(\omega) e^{i\frac{\omega}{c} n' x}$ mit $E'_0(\omega)$: Aus Randbedingungen

– Randbedingungen bei $x = 0$: Fresnelsche Formeln mit $\alpha = 0$

$$E'_0/E_0 = 2n/(n+n') = 2/(1+n') \Rightarrow E'_0(\omega) = A(\omega) \frac{2}{1+n'(\omega)} \quad \checkmark$$

* Zeige: Analytische Fortsetzung von $u(x, \omega)$ hat keine Pole in $\text{Im}(\omega) > 0$

Allgemein: Wir nehmen für alle Funktionen $f(t)$ an, dass ihre Fouriertransformierte $f(\omega)$ in der komplexen Ebene analytisch fortgesetzt werden kann bis auf endlich viele isolierte Pole.

Dann gilt: Ist $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, dann hat analytische Fortsetzung von $f(\omega)$ keine Pole in der oberen Halbebene.

Grund: Anwendung des Residuensatzes

In der komplexen Ebene kann für $t < 0$ in $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} f(\omega)$ der Integralweg durch einen unendlich großen Halbkreis in der oberen Halbebene geschlossen werden (für $\text{Im}(\omega) \rightarrow i\infty$ sind verschwindet der Beitrag des Halbkreises wegen $e^{-i\omega t} \sim e^{-|t|\infty} = 0$)

Nach dem Residuensatz folgt für das resultierende geschlossene Integral:

$$f(t) = 2\pi i \sum_j \text{Res}_{\omega_j} (e^{-i\omega_j t} A(\omega_j)), \text{ wobei } j \text{ über alle Pole summiert.}$$

Wenn es Pole ω_j gibt, ist $f(t) = 0$ nicht für alle $t < 0$ realisierbar.

Folgerungen konkret:

– $A(\omega)$ hat keine Pole bei $\text{Im}(\omega) > 0$ da $u(0, t) = \int d\omega e^{-i\omega t} A(\omega) = 0$ für $t \leq 0$ laut Voraussetzung.

– Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\omega)$ hat keine Pole bei $\text{Im}(\omega) > 0$, da Zusammenhang $\vec{E} \rightarrow \vec{D}$ kausal (siehe 1.3.3), d.h. $\epsilon(t) = 0$ für $t < 0$

$\Rightarrow n'(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ und $\frac{1}{1+n'(\omega)} = \frac{1}{1+\sqrt{\epsilon(\omega)}}$ sind analytisch für $\text{Im}(\omega) > 0$

(Pole wären nur möglich für rein reelles $\epsilon = 0$ oder $\epsilon = -1 \rightarrow$ sehr speziell)

$\Rightarrow u(x, \omega) = A(\omega) \frac{2}{1+n'(\omega)} e^{i\frac{\omega}{c} n'(\omega)x}$ hat keine Pole bei $\text{Im}(\omega) > 0$.

* Es gilt: $n'(\omega) \rightarrow 1$ bei $\omega \rightarrow \infty$ (1.3.3.1: $n' \rightarrow 1 - \omega_p^2/2\omega^2$)

Medium trägt bei hohen Frequenzen zu n' nicht bei.

* Folgerung: $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2 A(\omega)}{1+n'(\omega)} e^{i\frac{\omega}{c}(n'x-ct)} = 0$ für $x - ct > 0$

Für $x - ct > 0$: schließe den Integrationsweg über obere Halbebene \rightarrow Null, da Integrand dort keine Pole hat.

Für $x - ct < 0$: schließe den Integrationsweg über untere Halbebene \rightarrow ungleich Null

\Rightarrow Vorderste Front des Signals breitet sich nicht schneller als Licht aus!

Bemerkung: In den Beweis ging unter anderem ein, dass Medium auf Störung

\vec{E} kausal reagiert ($\epsilon(t) = 0$ für $t < 0$). Andererseits garantiert das Ergebnis die Kausalität bei der relativistischen Signalübertragung.

\rightarrow Kausalität im Mediums und bei der Signalausbreitung sind eng miteinander verknüpft!

1.5.4 Zusammenfassung von Kapitel 1.5

Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen für zeitabhängige Felder, aber ohne Quellen (keine Ladungen oder Ströme)

- Elementare Lösung: Ebene Wellen mit charakteristische Eigenschaften:
 - Transversale Wellen mit Polarisation
 - Dispersionsrelation $\omega(k) = c k/n_r$
 - in dissipativen Medien zusätzlich noch Dämpfung
- Randbedingungen an Grenzflächen
 - Reflexion und Brechung
 - Reflexionsgesetz, Snelliussches Gesetz und Fresnelsche Formeln
- Überlagerung von ebenen Wellen zu Signalen
 - Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit
 - Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfront und Kausalität

1.6 Felder beliebiger Ladungs-/Stromverteilungen

Wir kommen nun zur Lösung der vollen Maxwellgleichung: Zeitabhängige Systeme mit beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen

→ Verallgemeinerung des Grundproblems der Elektro- und Magnetostatik. Kann formal wie dort mit dem Formalismus der Greenschen Funktion gelöst werden.

Beschränkung hier auf Vakuum (Kapitel 1.1) im unbegrenzten Raum

Wähle im Folgenden Lorenz-Eichung (vgl. 1.1.4.2): $\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$.

⇒ Maxwellgleichungen: $\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ und $\square \Phi = 4\pi \rho$ (nach 1.1.4.3).

↪ "inhomogene Wellengleichung"

1.6.1 Allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Analog zur Elektrostatik können wir im unbegrenzten Vakuum eine allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung finden.

* Bestimme zunächst Greensche Funktion des d'Alembert Operators,

d.h. Funktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ mit $\square G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$

Ergebnis: $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ (translationsinvariant)

mit $G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t \pm \frac{r}{c}) \theta(\mp t)$ + : "avancierte" Lösung, $t < 0$
 – : "retardierte" Lösung, $t > 0$

(NB: Term $\theta(\mp t)$ kann wg. $r > 0$ auch weggelassen werden.)

(Herleitung: Übungsaufgabe bzw. 3.5.1. Soll hier nur überprüft werden.)

$$\begin{aligned}
 &\text{Zeige: } \square G = \delta(\vec{r}) \delta(t) \text{ für } G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t \pm r/c) \\
 \Delta G &= \frac{1}{2\pi} (\nabla \frac{1}{r}) (\nabla \delta(\dots)) + \frac{1}{4\pi r} \Delta \delta(\dots) + \frac{1}{4\pi} \delta(\dots) \Delta (\frac{1}{r}) \\
 \left. \begin{aligned}
 \nabla \delta(t \pm r/c) &= \pm \frac{1}{c} (\nabla r) \delta'(\dots) = \pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \\
 \Delta \delta(t \pm r/c) &= \pm \frac{1}{c} \underbrace{\nabla (\frac{\vec{r}}{r})}_{2/r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \delta(\dots)}_{\pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots)} \\
 &= \pm \frac{2}{r} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta(\dots) \\
 2(\nabla \frac{1}{r})(\nabla \delta(\dots)) &= -2 \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\pm \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots)) = \mp \frac{2}{r^2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\dots) \\
 \delta(t \pm r/c) \Delta (\frac{1}{r}) &= -\delta(t \pm r/c) 4\pi \delta(\vec{r}) = -4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t) \\
 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G - \delta(\vec{r}) \delta(t) \\
 \Rightarrow \square G &= (\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) G = \delta(\vec{r}) \delta(t) \checkmark
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Wähle von nun an retardierte Greensche Funktion. (Potentiale als Funktion der Ladungs- und Stromverteilungen in der Vergangenheit)

* Konstruiere daraus Feld einer beliebigen (aber vorgegebenen) Ladungs- und Stromverteilung

Einsetzen der Greenschen Funktion:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}, t) &= 4\pi \int d^3 r' \int dt' \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \\
 \text{bzw. } \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int d^3 r' \int dt' \vec{j}(\vec{r}', t') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{
 \begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \rho(\vec{r}', t') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \\
 \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{j}(\vec{r}', t') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})
 \end{aligned}
 }$$

NB: Erfüllt Lorenzgleichung $\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Übungsaufgabe).

1.6.2 Punktförmige Ladungen: Liénard-Wiechert Potentiale

Nun: Feld einer bewegten Punktladung mit Trajektorie $\vec{R}(t)$

Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ mit $v < c$ (Lichtkegelbedingung, siehe Kapitel 3).

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) &= q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \\
 \vec{j}(\vec{r}, t) &= q \vec{v}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \text{ mit } \vec{v}(t) = \dot{\vec{R}}(t).
 \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\Rightarrow \boxed{
 \begin{aligned}
 \Phi(\vec{r}, t) &= q \left/ \left(|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}' \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}{c} \right) \right|_{t'=t_{\text{ret}}} \\
 \vec{A}(\vec{r}, t) &= q \frac{\vec{v}'}{c} \left/ \left(|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}' \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}{c} \right) \right|_{t'=t_{\text{ret}}}
 \end{aligned}
 }$$

wobei $\vec{R}' := \vec{R}(t')$, $\vec{v}' := \dot{\vec{R}}(t')$

und t_{ret} definiert ist als die Lösung von $\boxed{(t - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}})|}$.

(Rechnung: Setze $\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$ und $\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{r} - \vec{R}(t))$ in die allgemeine Gleichungen für $\Phi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$ aus 1.6.1 ein.

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = q \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta(f(t')), \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = q \frac{\vec{v}'}{c} \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta(f(t'))$$

mit $f(t') := (t' - t) + \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{R}(t')|$.

Berechne nun also $\delta(f(t'))$:

Maximale Geschwindigkeit sei v_{\max} . Mit $|\vec{v}(t)| < v_{\max} < c \forall t$ gilt:

$$\begin{aligned} \cdot f(t') &\rightarrow \pm\infty \text{ für } t' \rightarrow \pm\infty \\ t' &\rightarrow \infty : \text{Klar} \\ t' &\rightarrow -\infty : \text{Schätze ab: } |\vec{r} - \vec{R}(t')| < r + |\vec{R}(t')| < r + |\vec{R}(t)| + v_{\max} \cdot (t - t') \\ &\Rightarrow cf(t') < r + \underbrace{|\vec{R}(t)|}_{\text{const.}} + \underbrace{(v_{\max} - c)}_{<0} \underbrace{(t - t')}_{\rightarrow\infty} \rightarrow -\infty \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\cdot f'(t') = \frac{df}{dt'} = 1 + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla_{\vec{R}'} |\vec{r} - \vec{R}'| = 1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{R}')}{|\vec{r} - \vec{R}'|} > 1 - \frac{v}{c} > 0$$

$\Rightarrow f(t')$ hat genau eine Nullstelle t_{ret} und wächst monoton.

$$\Rightarrow \delta(f(t')) = \frac{1}{f'(t_{\text{ret}})} \delta(t' - t_{\text{ret}}) = \delta(t' - t_{\text{ret}}) \frac{|\vec{r} - \vec{R}'|}{|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}'}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}$$

$$\text{Einsetzen} \Rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}'}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q \frac{\vec{v}'}{c}}{|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}'}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}$$

$$\text{mit } \vec{R}' = \vec{R}(t_{\text{ret}}), \vec{v}' = \vec{v}(t_{\text{ret}}), \quad \checkmark \quad)$$

1.6.3 Spezialfall: Gleichförmig bewegte Punktladung

Analysiere konkret Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung, $\vec{R}(t) = \vec{v}t$.

* Bestimmung der elektromagnetischen Potentiale, OBdA bei $t = 0$

$$\begin{aligned} \text{Definiere } \vec{\beta} = \vec{v}/c \Rightarrow f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{v}t'|}{c} \text{ hat Nullstelle } ct_{\text{ret}} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{\beta} + \sqrt{(\vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2} \\ \Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \left. \frac{q}{|\vec{r} - \vec{v}t'| - \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t')} \right|_{t_{\text{ret}}} = \frac{q}{-ct_{\text{ret}} - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \beta^2 ct_{\text{ret}}} = \frac{-q}{ct_{\text{ret}}(1 - \beta^2) + \vec{\beta} \cdot \vec{r}} = \frac{q}{\sqrt{(\vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2)}} \\ \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\beta} \Phi \quad |\vec{r} - \vec{v}t_{\text{ret}}| = -ct_{\text{ret}} \\ \text{Schreibe noch um: } (\vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2) = r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}} \\ \vec{A}(\vec{r}) = q \vec{\beta} / \sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2} \end{cases}$$

* Bestimmung der elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B}

Aus $\Phi(\vec{r})$ und $\vec{A}(\vec{r})$ mittels $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

$$\text{Vorab: } -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} -\vec{\beta}\frac{1}{c}\partial_t\Phi \underset{\frac{1}{c}\partial_t\Phi + \nabla \cdot \vec{A}=0}{=} \vec{\beta}(\nabla \cdot \vec{A}) \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \nabla)\Phi$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \nabla)\Phi;$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \underset{\vec{A}=\vec{\beta}\Phi}{=} \nabla \times \vec{\beta}\Phi = -\vec{\beta} \times \nabla\Phi = \vec{\beta} \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}) = \vec{\beta} \times \vec{E} + \underbrace{(\vec{\beta} \times \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \nabla)\Phi}_0 = \vec{\beta} \times \vec{E}.$$

Dann noch geradlinige längere Rechnung, und man erhält

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{q(1 - \beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}^3} \vec{r} \\ \vec{B} = \frac{q(1 - \beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{\beta})^2}^3} (\vec{\beta} \times \vec{r}) \end{cases}$$

* Diskussion

(i) $\beta \ll 1 \Rightarrow \vec{E} \approx q \vec{r}/r^3, \vec{B} \approx 0$: Coulomb-Potential.

(ii) $\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{E} = q (1 - \beta^2) \vec{r}/r^3 \parallel \vec{v}, \vec{B} = 0$

$\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{r}/r^3 \perp \vec{v}, B = \beta E_{\perp}$

(iii) Lorentzkraft zwischen zwei Ladungen q, q' , die mit gleicher Geschwindigkeit nebeneinander herfliegen:

$$\vec{F} = q' (\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = q' q \frac{(1-\beta^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{\beta} \times \vec{r})^2}} (\vec{r} + \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{r})) = -q' q \nabla \psi$$

$$\text{mit } \psi = (1 - \beta^2) / \sqrt{r^2 - (\vec{\beta} \times \vec{r})^2} \quad (\text{Check durch Einsetzen!})$$

\Rightarrow Kraft hängt von der Geschwindigkeit der Teilchen ab!

\Rightarrow Nicht invariant unter Galilei-Transformationen!

Bemerkung: Dasselbe Problem tritt schon bei den freien elektromagnetischen Wellen auf. Maxwellgleichungen sagen im Vakuum feste (absolute) Phasengeschwindigkeit c voraus. Müßte in jedem Inertialsystem gleich sein: Wie kann das sein?

Lösung: Spezielle Relativitätstheorie, Kapitel 2.

1.6.4 Zusammenfassung von Kapitel 1.6

Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen in Anwesenheit von Quellen (Ladungen, Ströme), im Vakuum und im unbegrenzten Raum.

- Mathematisch: Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square \Psi = 4\pi f(\vec{r}, t)$ im unendlichen Raum
Verfahren wie in 1.4 über Greensche Funktion
- Physikalisch: Elektromagnetischen Potentiale einer bewegten Punktladung: Liénard-Wiechert-Potentiale
- Anwendung für gleichförmig bewegte Punktladungen
 \Rightarrow Verletzung der Galilei-Invarianz
- Ausblick:

In diesem Kapitel wurde das weite Feld der allgemeinen Lösungen der Maxwell-Gleichungen nur angerissen. Reichhaltiges Spektrum von Phänomenen wurde noch gar nicht angesprochen, z.B.

- Beschleunigte Ladungen (\rightarrow Strahlung evtl. am Ende von Kapitel 3)
- Medien (\rightarrow Energieverlust, z.B. Tscherenkow-Strahlung)
- Allgemeine Lösung mit Randbedingungen
(\rightarrow z.B. Wellenleiter, Hohlraumresonatoren)

1.7 Wissensfragen

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen im Vakuum im Gaußschen Maßsystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme
2. Wie lautet die Gleichung für die Lorentzkraft auf ein Punktteilchen im Gaußschen Maßsystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme.
3. Was ist das Gauß'sche Maßsystem? Gibt es noch andere Maßsysteme? Geben Sie Beispiele.
4. Was ist eine Kontinuitätsgleichung?
5. Wie lautet die Gleichung, die die Erhaltung der Ladung beschreibt?
6. Erläutern Sie das Gauß'sche Gesetz
7. Erläutern Sie das Ampere'sche Gesetz
8. Erläutern Sie die Poisson-Gleichung
9. Erläutern Sie das Faraday'sche Induktionsgesetz
10. Erläutern Sie den Maxwell'schen Verschiebungsstrom. Warum musste er eingeführt werden?
11. Wie lautet der Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes?
12. Was ist der Poynting-Vektor? Was beschreibt er? Geben Sie die Gleichung dafür an.
13. Erläutern Sie den Energiesatz der Elektrodynamik im Vakuum.
14. Wie lautet der Ausdruck für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes?
15. Wie ist der Maxwellsche Spannungstensor definiert?
16. Erläutern Sie den Impulssatz der Elektrodynamik im Vakuum.
17. Erläutern Sie die Begriffe von Vektorpotential und skalarem Potential in der Elektrodynamik.
18. Wie lautet das "generalisierte Potential" zur Lorentzkraft und wie hängt es mit der Lorentzkraft zusammen?
19. Was versteht man unter Eichinvarianz? Was ist eine Eichtransformation? Geben Sie einige wichtige Eichungen an.
20. Wie lauten die Maxwellgleichungen in Potentialschreibweise in der Coulomb-Eichung? In der Lorenz-Eichung?
21. Wie lauten die stationären Maxwellgleichungen?
22. Welche Gleichungen erfüllen die zugehörigen Potentiale in Coulomb-Eichung?
23. Wie lauten die Gleichungen für das elektrostatische Potential und das elektrostatische Feld einer Punktladung im unbegrenzten Raum?
24. Geben Sie die allgemeine Lösung für das elektrostatische Potential Φ und das elektrostatische Feld \vec{E} im unbegrenzten Raum bei vorgegebener stationärer Ladungsverteilung an.
25. Geben Sie die allgemeine Lösung für das Vektorpotential \vec{A} und das Magnetfeld \vec{B} im unbegrenzten Raum bei vorgegebener stationärer Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ an.
26. Wie lautet das Gesetz von Biot-Savart-Ampère?

27. Was versteht man in der Elektrostatik und Magnetostatik unter Multipolentwicklung? Wann macht eine Multipolentwicklung Sinn?
28. Was ist das Monopolmoment einer Ladungsverteilung?
29. Wie ist das Dipolmoment und das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung definiert?
30. Was ist das Monopolmoment einer Stromverteilung?
31. Wie ist das magnetische Moment einer Stromverteilung definiert?
32. Wie lauten die führenden Terme (bis zur zweiten Ordnung) des Fernfeldes einer stationären Ladungsverteilung?
33. Welche Kraft wirkt auf einen elektrischen Monopol in einem äusseren elektrostatischen Feld? auf einen elektrischen Dipol?
34. Welche Kraft wirkt auf einen magnetischen Dipol in einem äusseren magnetostatischen Feld?
35. Was sind Kugelflächenfunktionen?
36. Wie lautet die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten?
37. Was ist die Wechselwirkungsenergie einer Ladungsverteilung mit einem äusseren Potential?
38. Wie ist die mechanische Energie einer Stromverteilung im äusseren Potential? Wie ist die Gesamtenergie einer Stromverteilung im äusseren Potential? Wie unterscheiden sich die beiden und warum?
39. Was versteht man unter der dielektrischen Polarisierung?
40. Was versteht man unter Magnetisierung?
41. Wie lauten die makroskopischen Maxwellgleichungen in isolierenden Medien? Woher kommen die Unterschiede zum Vakuum?
42. Was ist die dielektrische Verschiebung und wie hängt sie mit dem elektrischen Feld zusammen?
43. Wie hängen magnetisches Feld und magnetische Induktion zusammen und was ist das?
44. Was ist die Dielektrizitätsfunktion?
45. Was ist die magnetische Permeabilität?
46. Diskutieren Sie die Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$. Was kann man daraus über das Medium lernen?
47. Wie lautet der Poyntingsche Satz in Medien für langsam veränderliche Felder?
48. Wie lautet der komplexe Poyntingsche Satz in Medien für schnell veränderliche Felder? Diskutieren Sie die einzelnen Terme.
49. Welche Randbedingungen müssen die Felder \vec{D} , \vec{E} , \vec{H} und \vec{B} an Grenzflächen zwischen isolierenden Medien erfüllen?
50. Wie lauten die Randbedingungen an der Grenzfläche zu Leitern im statischen Fall?
51. Wie lauten die Randbedingungen an der Grenzfläche zu Leitern im dynamischen Fall (bei hochfrequenten elektromagnetischen Feldern?)
52. Wie funktioniert ein Faraday-Käfig?
53. Wie funktioniert magnetische Abschirmung?

54. Was sind Dirichletsche Randbedingungen? Wo sind sie physikalisch realisiert?
55. Was sind von Neumannsche Randbedingungen? Wo sind sie physikalisch realisiert?
56. Was versteht man unter Spiegelladungen und wann treten sie auf?
57. Erläutern Sie das Konzept der Greenschen Funktion.
58. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Greenschen Funktionen und Spiegelladungen
59. Wie lautet die Greensche Funktion für die Laplace-Gleichung im unbegrenzten Raum?
60. Wie ist das elektrostatische Potential in einem Leiter?
61. Was versteht man in einem System von Leitern unter Kapazitäten und Kapazitätskoeffizienten?
62. Was sind dispergierende und dissipative Medien? Nennen Sie Beispiele.
63. Wie ist der Brechungsindex definiert, was beschreibt er und warum heisst er so?
64. Skizzieren Sie das \vec{E} -Feld und das \vec{B} -Feld einer linear polarisierten Welle mit Ausbreitungsvektor \hat{k}
65. Was versteht man unter Phasengeschwindigkeit?
66. Wie viele unabhängige Polarisationsrichtungen hat eine elektromagnetische Welle?
67. Was versteht man unter einer zirkular polarisierten Welle?
68. Was besagt das Reflexionsgesetz an Grenzflächen?
69. Wie lautet das Snelliussche Gesetz?
70. Was beschreiben die Fresnelschen Formeln?
71. Was ist der Brewster-Winkel?
72. Was versteht man unter Totalreflexion? Wann kann so etwas auftreten? Wozu kann man sie nutzen?
73. Unter welchen Umständen können elektromagnetische Wellen in Leiter eindringen?
74. Was versteht man unter der Skin-Tiefe? Wie hängt sie von der Frequenz einer elektromagnetischen Welle ab?
75. Was ist die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets in einem Medium?
76. Kann ein Signal in einem Medium schneller als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum übertragen werden? Diskutieren Sie Ihre Antwort.
77. Geben Sie die elektromagnetischen Potentiale von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen im unbegrenzten Raum an.
78. Was beschreiben die Liénard-Wiechert Potentiale? Welche Form haben sie?
79. Diskutieren Sie: Woran kann man sehen, dass die Elektrodynamik die Galilei-Invarianz verletzt?

Kapitel 2

Die Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Einführung und Grundprinzipien

2.1.1 Das Relativitätsprinzip in der Newtonschen Mechanik

Laut Theorie 1: Die zentralen Aussagen der Newtonschen Mechanik lauten

- Es existieren Inertialsysteme
 - Die Bewegungsgleichungen haben in Inertialsystemen die Form $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i$ (Newtonsche Bewegungsgleichungen)
- ⇒ Folgerung: Verschiedene Inertialsysteme sind durch Galilei-Transformationen miteinander verknüpft.

(Bei Transformationen von Inertialsystemen $\bar{\Sigma}$ zu Σ ändern sich Koordinaten gemäß $\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_\Sigma = \mathcal{D}\vec{r}_{\bar{\Sigma}} + \vec{v}_0 t_{\bar{\Sigma}} + \vec{d}_0 \\ t_\Sigma = t_{\bar{\Sigma}} + t_0 \end{array} \right\}$ mit $\mathcal{D} \in SO(3)$: Drehung)

Frage: Kann man in einem abgeschlossenen System entscheiden, in welchem Inertialsystem man sich befindet?
(z.B. ob man „in Ruhe“ oder „in Bewegung“ ist?)

Allein aus den Bewegungsgleichungen natürlich nicht,
aber: Die Kräfte \vec{F}_i können ja von Orten und Geschwindigkeiten abhängen:
 $\vec{F}_i(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1 \dots \dot{\vec{r}}_N, t)$

Nun gilt aber zusätzlich Erfahrungstatsache:

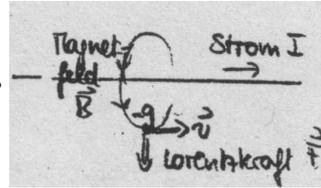
In abgeschlossenen Systemen (keine Einwirkung von außen) hat man:

- Homogenität der Zeit: Kräfte nicht explizit zeitabhängig, $\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial t} = 0$
- Homogenität des Raums: Kräfte hängen nur von relativen Abständen ab (z.B. vom Abstand zum Schwerpunkt)
- Mechanische geschwindigkeitsabhängige Kräfte hängen nur von relativen Geschwindigkeiten ab (z.B. Reibungskräfte)

→ Relativitätsprinzip der Mechanik

|| Alle Inertialsysteme sind bezüglich der mechanischen Gesetze gleichwertig!

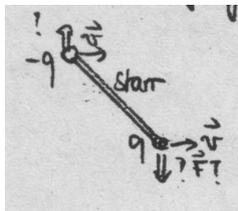
Ausnahme: Lorentzkraft ?



$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
scheint abhängig von der absoluten Geschwindigkeit

Aber: Wäre die Galilei-Transformation der Newtonschen Mechanik exakt richtig, so müsste ein elektrischer Dipol auf sich selbst ein Drehmoment ausüben, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit und Orientierung gegen das Inertialsystem bewegt, in dem die Maxwell'schen Gleichungen für die Elektrodynamik gelten.

Betrachte dazu folgenden Aufbau:



Naiv: $\vec{v} = 0$: Kräfte nur entlang Verbindungsgeraden

$\vec{v} \neq 0$: Lorentzkraft erzeugt Drehmoment.
 \vec{v} könnte z.B. von Erdgeschwindigkeit stammen

De facto: Es wird kein Drehmoment gemessen (Trouton, Noble, 1903)

→ Lorentzkraft zwischen einzelnen bewegten Ladungen lässt sich nicht so einfach herleiten, evtl. doch nur abhängig von der relativen Geschwindigkeit

Vermutung: Es gilt allgemeineres Prinzip:

|| Alle Inertialsysteme sind bezüglich aller Naturgesetze gleichrangig.

→ Generelles Relativitätsprinzip

2.1.2 Schwierigkeiten mit der Newtonschen Mechanik

2.1.2.1 Theoretisch

Relativitätsprinzip scheint inkompatibel mit den Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld zu sein.

z.B. Maxwell-Gleichungen im Vakuum (1864) (Kapitel 1):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

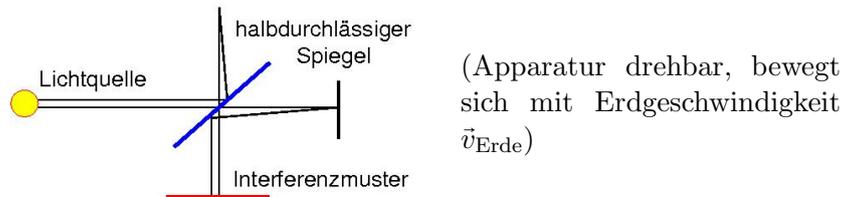
mit c : Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen (Lichtgeschwindigkeit), fest eingebaute Konstante

→ Maxwell-Gleichungen können nicht galilei-invariant sein !

Probleme: Sollen dann die Maxwell-Gleichungen in der obigen (ästhetisch ansprechenden) Form nur in einer verschwindenden Subklasse von Inertialsystemen gültig sein?
 Wenn ja, in welchen?

2.1.2.2 Experimentell

- Michelson-Morley-Experiment (1881)



Würde sich Licht in einem absoluten Raum isotrop ausbreiten
 → Interferenzmuster im Fall (1) und (2) müssten verschieden sein.

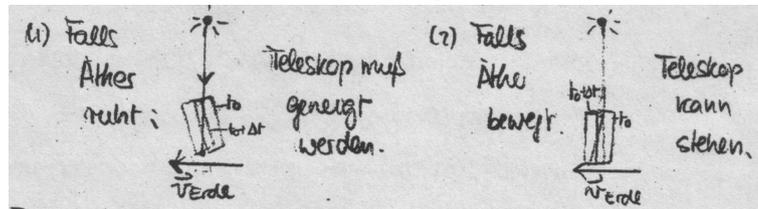
De facto: Immer gleich ! (Auch zu verschiedenen Tages-, Jahreszeiten)

Erklärungsversuche für Ausgang des Michelson-Morley-Experiments:

- Licht bewegt sich relativ zur Lichtquelle mit Geschwindigkeit c .
 Aber: Als Lichtquelle kann auch die Sonne (Miller) oder ein Fixstern (Tomaschek) benutzt werden.
- Licht schwingt in einem „Äther“, der von der Atmosphäre der Erde mitgeführt wird.

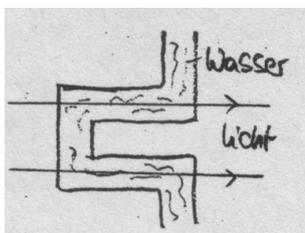
Aber: Stellare Aberration widerlegt diese Hypothese

Betrachte Fixstern durch Teleskop auf Erde



Beobachtung: Fall (1) trifft zu → Beobachter muss Teleskop im Jahresrhythmus im Kreis drehen.

- Fizeau-Experiment (1851)



Möglichkeiten:

- (1) Äther ruht: $c' = c/n$
 (n =Brechungsindex)
- (2) Äther bewegt sich mit Wasser mit:
 $c' = c/n + v$

Experimentell: $c' = c/n + v(1 - 1/n^2)$ (!)

Fazit: Experimente zur Lichtausbreitung lassen sich nur schwer mit der Newtonschen Mechanik in Einklang bringen

- selbst bei Verzicht auf das generelle Relativitätsprinzip.

2.1.3 Die Einsteinschen Postulate

Einstein (1905): Zwei Postulate

I: Das generelle Relativitätsprinzip ist gültig: Alle physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.

II: Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen den konstanten Wert c .

Dabei ist ein Inertialsystem: Ein System, in dem sich ein kräftefreier Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. (gemäß dem 1. Newtonschen Axiom)

Das Postulat II ersetzt die Forderung nach Galilei-Invarianz (bzw. das Bewegungsgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$: 2. Newtonsches Axiom)

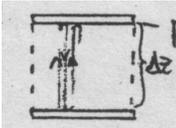
Insbesondere: Absolute Zeit existiert nicht mehr notwendigerweise. Existieren muss nur, was sich praktisch messen/konstruieren lässt. Zum Beispiel kann man Uhren bauen und Synchronisationsvorschriften angeben. Man kann aber nicht zwingend davon ausgehen, dass eine Synchronisationsvorschrift in jedem Inertialsystem zum selben Ergebnis führt.

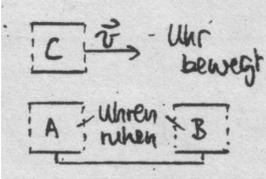
2.1.4 Folgerungen aus den Einsteinschen Postulaten

Gedankenexperimente (Einstein)

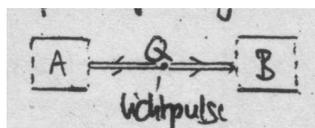
2.1.4.1 Zeitdilatation

Miss Zeit, die eine mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegte Uhr braucht, um von einem Punkt A zu B zu gelangen.

Uhr: „Lichtuhr“  perfekte Spiegel
misst Anzahl n der Reflexionen
Zeit $ct = \Delta z \cdot n$

Aufbau: 

- 1. Schritt: Synchronisiere die Uhren A und B
Beispiel für Synchronisierungsvorschrift:

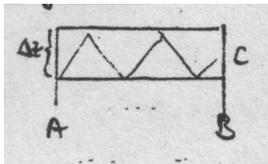


Quelle Q in der Mitte sendet Lichtpulse aus, die an A und B reflektiert werden. Verschiebe Q so lange, bis die reflektierten Pulse gleichzeitig zurückkehren. Sende dann weiteren Puls und setze Uhren A, B auf $t=0$, wenn er ankommt.

• 2. Schritt:

- * Miss Zeit in A, wenn C bei A vorbeikommt: $\rightarrow t_0$
- * Miss Zeit in B, wenn C bei B vorbeikommt: $\rightarrow t_0 + \Delta t$
- Lies jeweils auch Zeit in C ab: $\rightarrow \Delta \bar{t}$

Ergebnis:



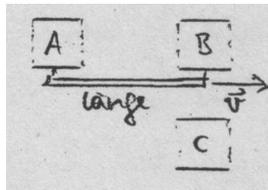
- Uhr C misst: $c\Delta \bar{t} = \Delta z \cdot n$
 - Uhren A, B messen: $(c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + (\Delta z \cdot n)^2$
- $$\Rightarrow \Delta \bar{t} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Bewegte Uhr geht langsamer: Zeitdilatation

2.1.4.2 Lorentzkontraktion

Nutze Zeitmessung zur Längenmessung.

Aufbau



Uhren A, B an beiden Enden des Körpers befestigt, gleichförmige Geschwindigkeit \vec{v}
Uhr C in Ruhe

- 1. Schritt: Synchronisiere Uhren A, B wie gehabt (innerhalb des bewegten Bezugssystems)
- 2. Schritt: Längenmessung: Stoppe Zeit, die es dauert, bis der Körper an der Uhr vorbeigeflogen ist.

Ergebnis:

- Uhren A, B messen: $\bar{l} = v \cdot \Delta \bar{t}$
- Uhr C misst: $l = v \cdot \Delta t$

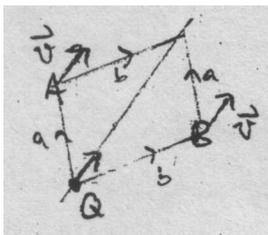
Beachte: Aufbau äquivalent zu dem in 2.1.4.1, wenn man sich in das Ruhesystem des Körpers und damit der Uhren A, B begibt (Uhr C wäre dann bewegt).

\sim Messergebnis ist analog: $\Delta t = \Delta \bar{t} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow l = \bar{l} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Bewegter Körper erscheint verkürzt: Lorentzkontraktion

2.1.4.3 Gleichzeitigkeit



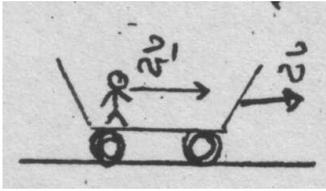
Beobachte von außen die Synchronisation bewegter Uhren.

Für „ruhenden“ Beobachter erscheinen Strecken a und b verschieden lang.

\sim Uhren sind nach der Prozedur nicht synchron.

Im Bezugssystem der Uhren sind sie synchron.

2.1.4.4 Addition von Geschwindigkeiten



Beobachte laufende Person in Eisenbahnwaggon.
 Person hat im Bezugssystem der
 Eisenbahn Geschwindigkeit \vec{v}
 Frage: Welche Geschwindigkeit hat sie
 für „ruhenden“ Beobachter (Schienen?)

Newton: $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}'$

Einstein: Einfache Addition scheitert spätestens im Grenzfall $v' \rightarrow c$.
 De facto (siehe 2.2.2): $v' = (v + \vec{v}') / (1 + v\vec{v}'/c^2)$

2.2 Die Lorentz-Transformation

In Abschnitt 2.1: Einführung der grundlegenden Postulate der speziellen Relativitätstheorie → neues Bild von Raum und Zeit.

Einige Folgerungen, aber: unsystematisch, reich an „Fallen“ (man denkt leicht falsch, da neues Weltbild unanschaulich)

Vor allem ist noch nicht klar, wie man auf dieser Basis Naturgesetze formulieren soll.

Nun: Systematischer Zugang → Rahmen, der einem eine im Einsteinschen Sinne relativistische Beschreibung der Welt ermöglicht.

Bisheriger Rahmen („Weltstruktur“ der Newtonschen Mechanik)

- a) Vierdimensionale Raum-Zeit
 Inertialsysteme, (mechanisches) Relativitätsprinzip
- b) Galilei-Transformation

Nun in der speziellen Relativitätstheorie:

- a) bleibt
- b) wird durch neue Transformation ersetzt: Lorentztransformation

2.2.1 Herleitung der „speziellen“ Lorentz-Transformation

2.2.1.0 Voraussetzungen

Basis: Einsteinsche Postulate

- (I) Relativitätsprinzip: Verschiedene Inertialsysteme, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind äquivalent.
- (II) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Erste Forderung ist älter und scheint „fundamentaler“ als die zweite. Wir werden versuchen, so lange wie möglich nur mit I) auszukommen.

Zusätzlich brauchen wir allerdings:

- (i) Raum hat Euklidische Struktur
(Parallelen schneiden sich nie, Winkelsumme im Dreieck)
- (ii) Homogenität von Raum und Zeit, Isotropie des Raums
- (iii) Kausalität: Zeitpfeil darf durch Transformation nicht genau umgedreht werden.

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst den speziellen Fall einer reinen Geschwindigkeitstransformation \rightarrow spezielle Lorentztransformation

- Die beiden Inertialsysteme Σ , $\bar{\Sigma}$ bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit V in x -Richtung gegeneinander
- Ursprung zur Zeit $t = 0$, $\bar{t} = 0$ sei identisch
($x = y = z = t = 0$ liegt auf $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \bar{t} = 0$).

\leadsto Koordinaten in Σ : (t, x, y, z) ; Koordinaten in $\bar{\Sigma}$: $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Frage: Transformation $\left\{ \begin{array}{l} \bar{t} = \bar{t}(x, y, z, t) \\ \bar{x} = \bar{x}(x, y, z, t) \\ \bar{y} = \bar{y}(x, y, z, t) \\ \bar{z} = \bar{z}(x, y, z, t) \end{array} \right\} ?$

2.2.1.1 Schritt 1: Die Transformation ist linear

Aus (I) (Relativitätsprinzip) folgt:

Eine gleichförmige Bewegung \vec{v} in Σ (kräftefreie Bewegung) muss in eine gleichförmige Bewegung \vec{v} in $\bar{\Sigma}$ übergehen

Aus (i) (Euklidische Struktur des Raums) folgt:

- Zwei kräftefreie Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit \vec{v} laufen auf parallelen Bahnen. Der Abstandvektor $\Delta\vec{r}$ zwischen ihnen ist zeitlich konstant.
- Bezugssysteme Σ , $\bar{\Sigma}$ können räumlich und zeitlich parallelverschoben werden, ohne dass sich die Koordinaten von Abstandsvektoren $\Delta\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$ verändern.

Betrachte zwei infinitesimal benachbarte kräftefreie Teilchen gleicher Geschwindigkeit \vec{v}

Im System Σ seien bekannte Koordinaten:

Teilchen 1: (t, \vec{r}) , Teilchen 2: $(t + \delta t, \vec{r} + \delta \vec{r})$

\leadsto Transformieren ins System $\bar{\Sigma}$ gemäß:

Teilchen 1: $(\bar{t}, \bar{\vec{r}})$, Teilchen 2: $(\bar{t} + \delta \bar{t}, \bar{\vec{r}} + \delta \bar{\vec{r}})$

mit $\delta \bar{t} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})} \delta t + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})} \delta x + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right)_{(t, \vec{r})} \delta y + \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial z}\right)_{(t, \vec{r})} \delta z$ (*)

analog $\delta \bar{x}$, $\delta \bar{y}$, $\delta \bar{z}$

Verschiebe nun $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, $\bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}'$ räumlich und zeitlich so, dass Ursprung zur Zeit $t = 0$, $\bar{t} = 0$ bei Teilchen 1.

Dabei bleiben δt , $\Delta \vec{r} = \delta \vec{r} - \vec{v} \delta t$ und damit $\delta \vec{r}$ unverändert; analog auch $\delta \bar{t}$, $\delta \bar{\vec{r}}$

\leadsto In verschobenen Systemen gilt:

$\delta \bar{t} = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 \delta t + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial y'}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial z'}\right)_0 \delta z$ usw.

Da δt , $\delta \bar{t}$ beliebig, folgt aus dem Vergleich mit (*):

$\left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})}$, $\left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})}$, ...

Aus (ii) (Homogenität von Raum und Zeit) folgt:

$\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)$, ... unabhängig von der Lage des Ursprungs (bzgl. Raum und Zeit)

$\leadsto \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial t'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)_{(t, \vec{r})}$; $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}'}{\partial x'}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)_{(t, \vec{r})}$; ... für alle \vec{r} , t

\leadsto Partielle Ableitungen $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\right)$, ... sind Konstanten!

\Rightarrow Transformation ist linear: $\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

mit $L = L(V) \equiv \begin{pmatrix} L_{\bar{t}t} & L_{\bar{t}x} & L_{\bar{t}y} & L_{\bar{t}z} \\ L_{\bar{x}t} & L_{\bar{x}x} & L_{\bar{x}y} & L_{\bar{x}z} \\ L_{\bar{y}t} & L_{\bar{y}x} & L_{\bar{y}y} & L_{\bar{y}z} \\ L_{\bar{z}t} & L_{\bar{z}x} & L_{\bar{z}y} & L_{\bar{z}z} \end{pmatrix}$

Laut Voraussetzung: Ursprung in Σ , $\bar{\Sigma}$ bei $t = 0$, $\bar{t} = 0$ identisch

$\Rightarrow (t_0, x_0, y_0, z_0) = 0$

2.2.1.2 Schritt 2: y und z bleiben von Transformation unberührt

d.h. Transformation hat die Form $L = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

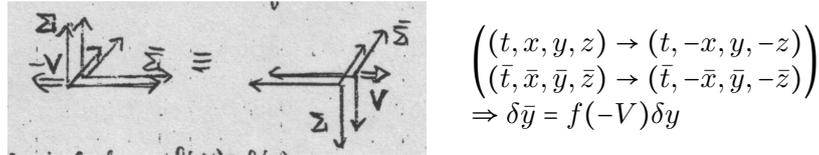
Folgt aus (ii): Isotropie des Raums

- Betrachte Verschiebung $(\delta t, \delta x, \delta y, \delta z) = (0, 0, \delta y, 0)$ im System Σ

\leadsto Verschiebung transformiert gemäß $(\delta \bar{t}, \delta \bar{x}, \delta \bar{y}, \delta \bar{z}) = (L_{\bar{t}y}, L_{\bar{x}y}, L_{\bar{y}y}, L_{\bar{z}y}) \delta y$

- δy zeichnet keine Richtung $\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}$ aus \Rightarrow Es gibt keinen Grund, warum $\delta\bar{x}, \delta\bar{z}, \delta\bar{t}$ Vorzeichen "+" oder "-" haben sollte $\Rightarrow \delta\bar{x} = \delta\bar{z} = \delta\bar{t} = 0$
 $\Rightarrow L_{\bar{t}y} = L_{\bar{x}y} = L_{\bar{z}y} = 0$
- Bleibt $\delta\bar{y} = L_{\bar{y}y}\delta y$; $L_{\bar{y}y}$ hängt von V ab: $L_{\bar{y}y} = f(V)$.
 Umgekehrt gilt $\delta y = L_{y\bar{y}}\delta\bar{y}$ mit $L_{y\bar{y}} = f(-V)$ (Σ bewegt sich mit $-V$ relativ zu $\bar{\Sigma}$).

Aber: Transformation von ruhendem $\bar{\Sigma}$ zu mit Geschwindigkeit $(-V)$ bewegtem Σ ist äquivalent zu einer Transformation von ruhendem Σ zu mit Geschwindigkeit V bewegtem $\bar{\Sigma}$, wenn man beide um π (180 Grad) um y -Achse dreht:



Vergleich liefert: $f(-V) = f(V) \Rightarrow \delta\bar{y} = f(V)\delta y = f(V)^2\delta\bar{y}$
 $\Rightarrow f(V)^2 = 1 \Rightarrow f(V) = \pm 1 \Rightarrow L_{\bar{y}y} = \pm 1$

Weiterhin soll $f(V)$ stetig sein. Es gilt $L_{\bar{y}y}|_{V=0} = 1 \Rightarrow L_{\bar{y}y} \equiv 1$

- Betrachte nun Verschiebung $(\delta t, \delta x, \delta y, \delta z)$ mit $\delta y = 0$ im System Σ

$\leadsto \delta y$ transformiert gemäß $\delta\bar{y} = L_{\bar{y}t}\delta t + L_{\bar{y}x}\delta x + L_{\bar{y}z}\delta z$

Es gibt keine ausgezeichnete \bar{y} -Richtung \Rightarrow kein Grund, warum $\delta\bar{y}$ Vorzeichen "+" oder "-" haben sollte $\Rightarrow \delta\bar{y} = 0$ für alle $\delta t, \delta x, \delta z$
 $\Rightarrow L_{\bar{y}t} = L_{\bar{y}x} = L_{\bar{y}z} = 0$

- Analoge Überlegungen für z -Richtung liefern: $L_{\bar{t}z} = L_{\bar{x}z} = L_{\bar{z}t} = L_{\bar{z}x} = 0$,
 $L_{\bar{z}z} = 1$

2.2.1.3 Schritt 3: Leite allgemeine Form der Transformation L aus dem Relativitätsprinzip her (noch ohne II. Einsteinsches Postulat)

- Betrachte Geschwindigkeit eines in x -Richtung bewegten kräftefreien Teilchens.

Im System Σ ist die Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$, im System $\bar{\Sigma}$: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$.

Zusammenhang folgt aus:
$$\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\bar{t}t} & L_{\bar{t}x} \\ L_{\bar{x}t} & L_{\bar{x}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{L_{\bar{x}t}dt + L_{\bar{x}x}dx}{L_{\bar{t}t}dt + L_{\bar{t}x}dx} = \frac{(L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}dx/dt)dt}{(L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}dx/dt)dt} = \frac{L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}v}{L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}v}$$

Spezielle Wahl:

- $v = 0 \Rightarrow \bar{v} = -V \leadsto -V = \frac{L_{\bar{x}t}}{L_{\bar{t}t}} \Rightarrow L_{\bar{t}t} = -\frac{1}{V}L_{\bar{x}t}$
- $\bar{v} = 0 \Rightarrow v = V \leadsto 0 = \frac{L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}V}{L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}V} \leadsto L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}V = 0$
 $\Rightarrow L_{\bar{x}x} = -\frac{1}{V}L_{\bar{x}t} (= L_{\bar{t}t})$

- Notation: Setze $\gamma(V) := L_{\bar{t}t} = L_{\bar{x}x}$, $\kappa(V) := -\frac{L_{\bar{t}x}}{\gamma} \cdot V$

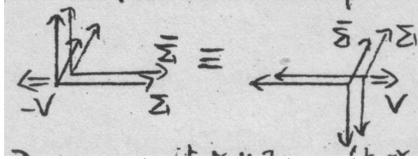
$$\leadsto \text{Transf. hat die Form: } \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & -\kappa(V)/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (**)$$

- Symmetrieüberlegungen:

- Rücktransformation $\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ entspricht Transformation mit Geschwindigkeit $-V$

$$\leadsto \text{hat die Form: } \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma(-V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(-V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (***)$$

- Rücktransformation ist äquivalent zu Transformation $\Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$ mit



Geschwindigkeit V , wenn Σ , $\bar{\Sigma}$ um 180 Grad (π) um y -Achse gedreht und dann vertauscht werden.

$$\text{Drehung: } \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t & -x & y & -z \\ \bar{t} & -\bar{x} & \bar{y} & -\bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (***)$$

$$\text{Vertauschung: } \begin{pmatrix} t & x & y & z \\ \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{t} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ t & x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 1 & \kappa(V)/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (***)$$

\leadsto Vergleich von (***) mit (***) liefert: $\gamma(-V) = \gamma(V)$, $\kappa(-V) = \kappa(V)$

- Fasse (*) und (***) zusammen:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \stackrel{(***)}{=} \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \kappa/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & -\kappa/V \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \kappa/V \\ V & 1 \end{pmatrix} \equiv \gamma^2 \begin{pmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\text{bzw. } \gamma^2 = 1/(1-\kappa) \Rightarrow \kappa < 1$$

$$\Rightarrow \text{Fazit: } L = \begin{pmatrix} \gamma & -\kappa\gamma/V & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit Bedingung } \gamma^2 = \frac{1}{1-\kappa}$$

2.2.1.4 Schritt 4: Folgerung aus Kausalität

Kausalität bedeutet: Zeitpfeil darf sich nicht umdrehen

$$\Rightarrow \gamma = L_{\bar{t}t} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \right) > 0 \text{ für alle Transformationen}$$

Daraus folgt: $\kappa \geq 0$ bzw. $\gamma \geq 1$:

Anderenfalls kann man Winkel $0 < \phi < \pi/2$ definieren über $\tan \phi := \sqrt{-\kappa}$

$$\leadsto \gamma = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \cos \phi, \quad \sin \phi = \gamma\sqrt{-\kappa}$$

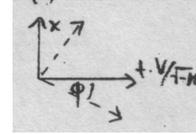
$$\leadsto -V\gamma = -\sin \phi \cdot (V/\sqrt{-\kappa}), \quad -\frac{\kappa}{V}\gamma = \sin \phi \cdot (\sqrt{-\kappa}/V)$$

~> Transformation hätte die Form:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cdot (\sqrt{-\kappa}/V) \\ -\sin \phi \cdot (V/\sqrt{-\kappa}) & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

oder $\begin{pmatrix} \bar{t} \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}} \\ x \end{pmatrix}$

entspricht Drehung in der $(t \cdot \frac{V}{\sqrt{-\kappa}}, x)$ -Ebene



=> Diese Transformation kann im Prinzip mehrmals hintereinander ausgeführt werden ~> Drehung um Winkel $n\phi$

Aber: Irgendwann ist Gesamtwinkel $n \cdot \phi$ so groß, dass $\cos(n\phi)$ negativ wird ~> dann wäre für die kombinierte Transformation $\gamma < 0$ Widerspruch!

Notation: $\kappa = \beta^2 \quad (\in [0, 1]) \Rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

Zusammenfassung von Schritt 1 bis 4

Wir haben ohne Ausnutzung des II. Einsteinschen Postulates (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) hergeleitet, dass die Transformation die folgende Form haben muss:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\beta^2}{V}\gamma & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit einem freien Parameter}$$

$\beta(V) < 1$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$

=> Allgemeine relativistische Transformation für Geschwindigkeitstransformation in x-Richtung

Beinhaltet sowohl Galileitransformation als auch Lorentztransformation

2.2.1.5 Schritt 5: Ausnutzen des II. Einsteinschen Postulats ~> Spezielle Lorentztransformation

Vorbemerkung: Form der Transformation steht weitgehend fest.

Es bleibt nur noch ein freier Parameter: β
Setzt man z.B. $\beta = 0$, so folgt $\gamma = 1$ und die

Spezielle Galilei-Transformation: $\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

~> konsistent, da Galilei-Transformation ja auch relativistisch ist.

Nun aber: Verwendung des II. Postulats:

Für Teilchen (Photonen) mit Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt} = c$ in einem Inertialsystem Σ muss $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = c$ in allen Inertialsystemen $\bar{\Sigma}$ sein.

Erinnerung: In Schritt 3 haben wir gezeigt: $\bar{v} = \frac{L_{\bar{x}t} + L_{\bar{x}x}v}{L_{\bar{t}t} + L_{\bar{t}x}v}$

$$\Rightarrow \bar{v} = \frac{-V\gamma + \gamma v}{\gamma - \frac{\beta^2}{V}\gamma v} = \frac{v-V}{1 - \frac{v}{V}\beta^2}$$

Wähle speziell $v = c \Rightarrow \bar{v} = c \Rightarrow c \stackrel{!}{=} \frac{c-V}{1 - \frac{c}{V}\beta^2} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{V}{c}}$

2.2.1.6 Zusammenfassung von Schritt 1-5

Spezielle Lorentztransformation ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\beta^2}{V}\gamma & 0 \\ -V\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

oder, alternativ

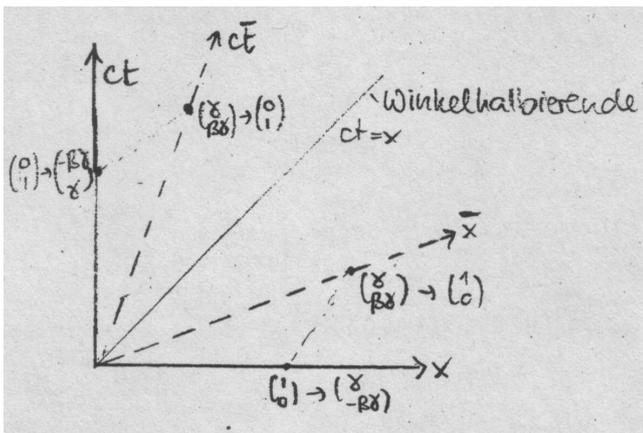
$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dabei gilt: $\beta = \frac{V}{c} \in]-1; 1[$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \geq 1$

Sie beschreibt die Koordinatentransformation $\Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$ von zwei Inertialsystemen, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit V in x -Richtung gegeneinander bewegt sind und zur Zeit $t = 0$, $\bar{t} = 0$ den gleichen Ursprung haben.

2.2.2 Veranschaulichung und Anwendungsbeispiele

2.2.2.1 Graphische Darstellung in der $(ct - x)$ -Ebene



~> Symmetrische, affine Transformation
 Achsen rücken bei großen Geschwindigkeiten V an die Winkelhalbierende heran, erreichen sie jedoch nie (asymptotisch im Grenzwert $V \rightarrow c$)

2.2.2.2 Form der Transformation

Mit der Definition $\beta =: \tanh \phi$ ($\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \phi}} = \cosh \phi$, $\beta\gamma = \sinh \phi$) kann Transformation auch umgeschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\leadsto Formale Ähnlichkeit zur Drehung $\begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

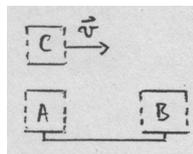
Noch deutlicher: Setze Zeitvariable auf imaginäre Achse und berücksichtige: $\cosh \phi = \cos(i\phi)$, $\sinh \phi = -i \cdot \sin(i\phi)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ict\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\phi) & \sin(i\phi) & & 0 \\ -\sin(i\phi) & \cos(i\phi) & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

\leadsto Spezielle Lorentztransformation entspricht Drehung in der (ict, x) -Ebene um einen imaginären Winkel $i\phi$.

2.2.2.3 Beispiele

(i) Zeitdilatation



Systeme: $\bar{\Sigma}$: Ursprung bei C, mitbewegt
 Σ : Ursprung bei A, in Ruhe
 $\leadsto t = \bar{t} = 0 \hat{=} C$ bei A

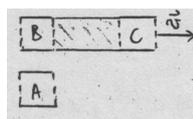
Zeitmessung, wenn C bei B vorbeikommt $\rightarrow t, \bar{t}$
 Ort der Messung: x bzw. \bar{x} mit $\bar{x} = 0$ (Uhr C)

Umrechnung: $\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} ct - \beta x \\ -\beta ct + x \end{pmatrix}$ mit $\bar{x} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = \beta ct, \bar{t} = \frac{\gamma}{c}(ct - \beta x) = \gamma t(1 - \beta^2) \Rightarrow \boxed{\bar{t} = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}$ wie 2.1.4.1

NB: Zeit in einer bewegten Uhr vergeht immer langsamer als für außenstehenden Beobachter (Eigenzeit)

(ii) Lorentzkontraktion



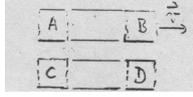
Systeme: $\bar{\Sigma}$: Ursprung bei B, mitbewegt
 Σ : Ursprung bei A, in Ruhe
 $\leadsto t = \bar{t} = 0 \hat{=} B$ bei A am selben Ort.

Ortskoordinaten von C zur Zeit $t = \bar{t} = 0$: x bzw. \bar{x} .

Umrechnung: $\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ mit $t = \bar{t} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \gamma x$

$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1 - \beta^2} \bar{x}}$ wie gehabt (siehe 2.1.4.2)

NB: Zur Längenmessung sind zwei Ortsmessungen nötig.
Müssen im jeweiligen Bezugssystem gleichzeitig durchgeführt werden.

(iii) Gleichzeitigkeit

Systeme: $\bar{\Sigma}$: Ursprung bei A, bewegt
 Σ : Ursprung bei C, ruhend
 $\leadsto t = \bar{t} = 0 \hat{=} A$ bei C am selben Ort.

Betrachte zwei Ereignisse:

1. Ereignis: A bei C

\rightarrow Koordinaten $t = \bar{t} = 0, x = \bar{x} = 0$

2. Ereignis: B bei D

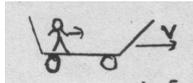
\rightarrow Koordinaten $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} (x \neq 0)$

Falls 2. Ereignis mit 1. Ereignis im System Σ gleichzeitig:

$\leadsto t = 0 \leadsto \bar{t} = -\frac{1}{c}\beta\gamma x \neq 0 \leadsto$ nicht gleichzeitig in $\bar{\Sigma}$

Umgekehrt falls Ereignisse gleichzeitig in $\bar{\Sigma}$:

$\leadsto \bar{t} = 0 \leadsto t = -\frac{1}{c}\beta\gamma\bar{x} \neq 0 \leadsto$ nicht gleichzeitig in Σ

(iv) Addition von Geschwindigkeiten

Systeme: $\bar{\Sigma}$: bewegt mit Wagen; Σ : ruhend

\Rightarrow Geschwindigkeit der Person in $\bar{\Sigma}$: $\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$; in Σ : $v = \frac{dx}{dt}$

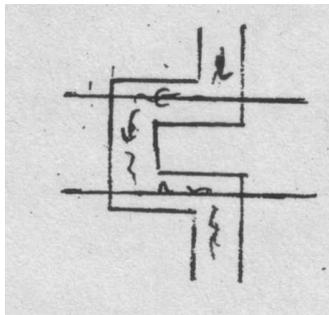
Umrechnung: $\begin{pmatrix} c d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c d\bar{t} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dx}{c dt} = \frac{\beta c d\bar{t} + d\bar{x}}{c d\bar{t} + \beta d\bar{x}} = \frac{\beta c + \bar{v}}{c + \beta \bar{v}}$

\Rightarrow (mit $\beta = V/c$) $v = \frac{\bar{v} + V}{1 + \bar{v}V/c^2}$ Geschwindigkeitsadditions-Theorem

Speziell $\bar{v} = c$ oder $V = c$: $v = (\bar{v} + c)/(1 + \bar{v}/c) = c$

Anwendung: Deutung des Fizeau-Experiments



Lichtgeschwindigkeit im Medium: $\bar{v} = \frac{c}{n} < c$
(n =Brechungsindex)

Medium bewegt sich mit Geschwindigkeit V

\rightarrow Lichtgeschwindigkeit im fließenden

Medium für ruhenden Beobachter:

$$v = \frac{\bar{v} + V}{1 + \bar{v}V/c^2} = \frac{c/n + V}{1 + V/cn}$$

Grenzfall $\frac{V}{c} \rightarrow 0$ (Taylorreihe):

$$v \approx c/n + V(1 - \frac{1}{n^2}) + \dots \quad \checkmark$$

2.2.3 Allgemeine Lorentz-Transformationen

Bisher: Spezieller Fall von Lorentztransformationen zwischen Inertialsystemen $\Sigma, \bar{\Sigma}$, die sich relativ zueinander mit gleichförmiger Geschwindigkeit V in x -Richtung bewegen - ansonsten gemeinsamer Ursprung bei $t = \bar{t} = 0$, nicht verdreht.

Nun allgemeiner: Transformationen, die im Einklang sind mit den Einsteinschen Postulaten, setzen sich zusammen aus:

(i) Spezielle Transformationen in x -Richtung wie gehabt ("Boosts")

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathcal{B}_x \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{B}_x(V) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\beta = \frac{V}{c} = \tanh \phi, \gamma = \sqrt{1 - \beta^2})$$

(ii) Raumdrehungen (Rotationen)

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{R}(\mathcal{D}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{D}^T & \\ 0 & & & \end{array} \right);$$

$\mathcal{D} \in SO(3)$: Gewöhnliche Drehung (3x3-Matrix)

(iii) Translationen in Raum und Zeit

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

(iv) Spiegelungen in Raum und Zeit

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(NB: „Zeitspiegelung“ $c\bar{t} = -ct$ wäre bisher nicht erlaubt gewesen, da sich Kausalität dann „umdreht“. Soll aber jetzt gestattet sein.)

Diese bilden zusammen die allgemeinen Lorentztransformationen

Beispiel für zusammengesetzte Transformation:

Transformation zwischen Inertialsystemen $\Sigma, \bar{\Sigma}$, die gegeneinander in beliebiger Richtung mit Geschwindigkeit \vec{V} gleichförmig bewegt sind.

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \mathcal{B}(\vec{V}) \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{B}(\vec{V}) = \mathcal{R} \mathcal{B}_x(V) \mathcal{R}^T = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & & & -\frac{\gamma}{c} \vec{V}^T \\ \hline -\frac{\gamma}{c} \vec{V} & \mathcal{D}^T \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{D} & & \end{array} \right)$$

mit $\mathcal{R}(\mathcal{D})$: Rotation, die x -Achse in Richtung \vec{V} dreht.

2.2.3.1 Notation

- Definiere Vierdimensionalen Vektor $\boxed{\{x^\mu\} = (ct, \vec{r})}$ $\boxed{\{x_\mu\} = (ct, -\vec{r})}$

Index läuft von 0 bis 3: $x^0 = ct$, $(x^1, x^2, x^3) = \vec{r}$ etc.

Index oben: „kontravariant“
 Index unten: „kovariant“ } tieferer Sinn: siehe Kapitel 2.3.2

- Transformationsmatrix für Lorentztransformation ohne Translation

4 × 4 - Matrix $\boxed{\Lambda^\mu_\sigma}$

- Einsteinsche Summenkonvention

Über ein Paar gleichlautender hochgestellter und tiefgestellter Indizes wird automatisch summiert: $a_\mu b^\mu \hat{=} \sum_\mu a_\mu b^\mu$

→ Allgemeine Transformation wird geschrieben als:

$$\bar{x}^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu_\sigma x^\sigma}_{\substack{\text{gleichförmige Bewegung,} \\ \text{Rotationen, Spiegelungen}}} - \underbrace{a^\mu}_{\text{Translationen}}$$

- Definiere „metrischen Tensor“

$$\{g^{\mu\nu}\} = \{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\boxed{g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu}$ (Kronecker-Symbol); $\boxed{x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu}$

(Vorteil der Notation mit Indizes oben/unten (u.a.): erleichtert Buchhaltung)

2.2.3.2 Lorentztransformation und Linienelement

Definiere Linienelement: $\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$

Für Lichtausbreitung gilt $ds^2 = 0$ in allen Inertialsystemen
 bzw. allgemeiner:

- (a) Linienelemente sind invariant unter allen Lorentztransformationen

(Beweis: Gilt für

(i) Spezielle Lorentztransformationen $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 &= (\Lambda dx)_\mu (\Lambda dx)^\mu = (\gamma dx^0 - \beta\gamma dx^1)^2 - (-\beta\gamma dx^0 + \gamma dx^1)^2 - dx^2^2 - dx^3^2 \\ &= \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_1 (dx^0^2 - dx^1^2) - dx^2^2 - dx^3^2 = ds^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii) Rotationen: $d\vec{x}^0 = dx^0$, $d\vec{r} = d\vec{r} \Rightarrow d\bar{s}^2 = ds^2 \quad \checkmark$

(iii), (iv): Translationen, Spiegelungen: klar! \checkmark

⇒ Gilt damit auch für alle Kombinationen von (i)-(iv) \checkmark

Folgerung: Die Transformationsmatrix erfüllt

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\beta} \quad \text{bzw.} \quad g = \Lambda^T g \Lambda$$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } d\bar{s}^2 = d\bar{x}^{\alpha} g_{\alpha\beta} d\bar{x}^{\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} dx^{\mu} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\beta} dx^{\nu} &\stackrel{!}{=} dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu} \quad \forall dx \\ \Rightarrow \Lambda_{\mu}^{\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\beta} = g_{\mu\nu} \quad) \end{aligned}$$

Damit gilt: * $\det \Lambda = \pm 1$

$$(g = \Lambda^T g \Lambda \Rightarrow \det g = \det \Lambda^T g \Lambda = (\det \Lambda)^2 \cdot \det g \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1)$$

$$* \Lambda_0^0 \geq 1$$

$$((\Lambda^T g \Lambda)_0^0 = \Lambda_0^0{}^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_i^0)^2 = 1 \Rightarrow \Lambda_0^0{}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_i^0)^2 \geq 1)$$

(b) Umgekehrt gilt der folgende wichtige Satz:

Die Lorentztransformationen sind genau die Transformationen $x^{\mu} \rightarrow \bar{x}^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu})$, die alle Linienelemente ds^2 invariant lassen.

Bemerkung: Häufig werden Lorentztransformationen über diese Forderung eingeführt: „Drehungen“ in einer vierdimensionalen Raumzeit mit Metrik

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{„Metrik“: Abstandsdefinition} \\ \|x - y\| = (x^{\mu} - y^{\mu}) g_{\mu\nu} (x^{\nu} - y^{\nu}))$$

Beweis des Satzes:

Notwendig: Bereits in (a) gezeigt (Lorentztransformationen lassen ds^2 invariant.)

Hinreichend: Beweis in drei Schritten.

Betrachte eine Transformation, die alle ds^2 invariant lässt. Dann gilt:

(i) Die Transformation ist linear

$$\begin{aligned} ds^2 = d\bar{s}^2 &\Rightarrow dx^{\mu} dx^{\nu} g_{\mu\nu} = d\bar{x}^{\alpha} d\bar{x}^{\beta} g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) dx^{\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) dx^{\nu} g_{\alpha\beta} \quad \forall dx \\ \Rightarrow g_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) \left(\frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) \quad \text{überall} \\ \Rightarrow \det \left\{ \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) \right\} &= \pm 1 \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left[\left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) \left(\frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) g_{\alpha\beta} \right] = 0 \quad \forall \mu, \nu, \sigma \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} &\equiv 0 \Rightarrow (\text{da } \det \left\{ \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right) \right\} \neq 0): \frac{\partial^2 \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \equiv 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} &= \text{const.} \quad \checkmark \end{aligned}$$

\Rightarrow Transformation hat die Form: $\bar{x} = \Lambda x - a$ und

analog zu (a) muss gelten: $\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1, \Lambda_0^0 \geq 1$

(ii) Annahmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

- $\det \Lambda = +1$ (andernfalls schreibe $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda'$,

betrachte fortan Λ')

- $\Lambda_0^0 \geq 1$ (andernfalls schreibe $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda'$,

betrachte fortan Λ')

- Vektor $(\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3) \neq 0$ (andernfalls wäre Λ einfach eine Rotation:

$$\Lambda \text{ hätte dann die Form } \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ M \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda^T g \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0{}^2 & \Lambda_0^0 \Lambda_1^0 & \Lambda_0^0 \Lambda_2^0 & \Lambda_0^0 \Lambda_3^0 \\ \hline \Lambda_0^0 \Lambda_1^0 & & & \\ \Lambda_0^0 \Lambda_2^0 & & & \\ \Lambda_0^0 \Lambda_3^0 & & & \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ -M^T M \end{matrix} \stackrel{!}{=} g$$

$$\Rightarrow (\Lambda_0^0, \Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0) = (1, 0, 0, 0) \quad \text{und} \quad M^T M = \mathbb{1} \quad)$$

(iii) Zerlegung der Transformationsmatrix Λ in: $\Lambda = \mathcal{R}_1 \mathcal{B}_x(V) \mathcal{R}_2^T$,
wobei \mathcal{R}_i : Rotationen und $\mathcal{B}_x(V)$: Boosts in x-Richtung

▷ Zunächst: Zerlege Λ in $\Lambda = \mathcal{R}_1 \tilde{\Lambda} \mathcal{R}_2^T$
mit \mathcal{R}_1 : Rotation, dreht x-Achse in den Vektor $(\Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \Lambda_0^3)$
 \mathcal{R}_2 : Rotation, dreht x-Achse in den Vektor $(\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0)$

$$\Rightarrow \tilde{\Lambda} \text{ hat die Form } \tilde{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0 & \tilde{\Lambda}_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & & & \\ \Lambda_0^2 & & & \\ \Lambda_0^3 & & & \\ \hline & & \tilde{M} & \end{array} \right)$$

mit $\tilde{\Lambda}_1^0 \neq 0$ laut Voraussetzung (ii) und \tilde{M} : 3×3 -Matrix

▷ Auch für $\tilde{\Lambda}$ gilt: $\tilde{M}^T g \tilde{M} = g$, $\det \tilde{\Lambda} = \det \Lambda = 1$, $\tilde{\Lambda}_0^0 = \Lambda_0^0 \geq 1$

Daraus folgt: \tilde{M} ist orthogonal und hat die Form $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\text{(denn: } \tilde{\Lambda}^T g \tilde{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda_0^0{}^2 - \Lambda_0^1{}^2 & a^T \\ \hline & A \end{array} \right) \stackrel{!}{=} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit: } a = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^0 - \tilde{M}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\tilde{\Lambda}_1^0 \quad 0 \quad 0) - \tilde{M}^T \tilde{M}$$

$$a \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \tilde{M}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_0^0 \begin{pmatrix} \Lambda_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{M}^T = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ mit } \tilde{\Lambda}_1^1 = \tilde{\Lambda}_0^0 \frac{\tilde{\Lambda}_1^0}{\tilde{\Lambda}_1^0}$$

$$A \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{M}^T \tilde{M} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 - (\tilde{\Lambda}_1^0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{M} \text{ orthogonal und hat die Form } \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \checkmark$$

▷ Dann: Definiere Rotation $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

\Rightarrow Neue Zerlegung $\Lambda = \mathcal{R}_1 \mathcal{B} \mathcal{R}_2^T$

$$\text{mit } \mathcal{B} = \tilde{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_0^0 & \tilde{\Lambda}_1^0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Lambda}_1^0 & \tilde{\Lambda}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wieder gilt: $\mathcal{B}^T g \mathcal{B} = g$, $\det \mathcal{B} = \det \Lambda = 1$, $\mathcal{B}_0^0 = \Lambda_0^0 \geq 1$

▷ Zeige: \mathcal{B} ist eine spezielle Transformation in x-Richtung

(denn:

$$\mathcal{B}^T g \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_0^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 & \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 & \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^1 \mathcal{B}_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^0 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_1^1 = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1^0 / \mathcal{B}_1^0 = \mathcal{B}_1^1 / \mathcal{B}_0^0$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0{}^2 - \mathcal{B}_1^0{}^2 = \mathcal{B}_1^1{}^2 - \mathcal{B}_0^0{}^2 = 1$$

$$\det \mathcal{B} = \mathcal{B}_0^0 \mathcal{B}_1^1 - \mathcal{B}_1^0 \mathcal{B}_0^0 = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_0^0 = \mathcal{B}_1^1; \mathcal{B}_1^0 = \mathcal{B}_0^1; \mathcal{B}_0^0 = \sqrt{1 + \mathcal{B}_1^0{}^2} (\geq 1 \text{ lt Voraussetzung})$$

$$\text{Definiere: } \gamma := \mathcal{B}_0^0; \beta := -\mathcal{B}_1^0 / \mathcal{B}_0^0 \Rightarrow \gamma = \dots = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\leadsto \mathcal{B} \text{ hat die Form } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \checkmark$$

2.2.3.3 Analyse und Klassifizierung von allgemeinen Lorentztransformationen

(a) Allgemeine Lorentztransformationen und Poincaré-Gruppe

Allgemeine Form von Lorentztransformationen

$$\boxed{\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\sigma x^\sigma - a^\mu} \text{ mit Bedingung } \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

Eigenschaften:

- gemäß 2.2.3.2(a):

- $\det \Lambda = \pm 1$
- $\Lambda_0^0 \geq 1$

- Und: Lorentztransformationen bilden eine Gruppe

- Abgeschlossen:

(Λ, a) bezeichne Transformation $\bar{x} = \Lambda x - a$

Verknüpfung $(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda' \Lambda, \Lambda' a - a')$

\leadsto definiert wieder eine Lorentztransformation

$$\text{denn } (\Lambda' \Lambda)^T g (\Lambda' \Lambda) = \Lambda^T \Lambda'^T g \Lambda' \Lambda = g$$

- Assoziativ:

$$[(\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2, a_2)](\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_3, a_3)[(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)]$$

$$\text{denn: } [(\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2, a_2)](\Lambda_1, a_1)$$

$$= (\Lambda_3 \Lambda_2, \Lambda_3 a_2 - a_3)(\Lambda_1, a_1)$$

$$= (\Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_3 \Lambda_2 a_1 - \Lambda_3 a_2 - a_3)$$

$$(\Lambda_3, a_3)[(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)]$$

$$= (\Lambda_3, a_3)(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 - a_2)$$

$$= (\Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_3 \Lambda_2 a_1 - \Lambda_3 a_2 - a_3)$$

- Einselement:

$$\text{Identität: } (\Lambda, a) = (\mathbf{1}, 0) \quad (\text{entspricht } \bar{x}^\mu = x^\mu)$$

- Inverses:

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \text{ mit } \boxed{\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g}$$

$$\text{denn: } (g \Lambda^T g) \Lambda = g g = \mathbf{1};$$

$$\Lambda (g \Lambda^T g) = (\Lambda^T g^T g)^T g = g^T g = \mathbf{1}$$

\leadsto Poincaré-Gruppe oder Inhomogene Lorentzgruppe

(b) Untergruppen der Poincaré-GruppePoincaré-Gruppe (Λ, a)

↳ Homogene Lorentzgruppe $O(3,1)$: $a = 0$ (keine Raum-Zeit-Translationen)

≅ Gruppe der Matrizen Λ mit $\Lambda^T g \Lambda = g$

(Untergruppe von $\{(\Lambda, a)\}$): - abgeschlossen ✓

- enthält Identität $\Lambda = \mathbb{1}$ ✓

- enthält mit Λ auch $\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$ ✓)

↳ Eigentliche Lorentzgruppe: $\det \Lambda = 1$

(- abgeschlossen: $\det \Lambda = 1$ und $\det \Lambda' = 1 \Rightarrow \det(\Lambda \Lambda') = 1$ ✓

- enthält Identität ✓

- enthält mit Λ auch Λ^{-1} : $\det(\Lambda^{-1}) \equiv 1/\det(\Lambda) = 1$ ✓)

↳ Eigentlich orthochrone Lorentzgruppe $SO_0(3,1)$: $\det \Lambda = 1$ & $\Lambda_0^0 \geq 1$

≅ homogene Lorentztransformationen ohne Spiegelungen

(- abgeschlossen: Sei Λ, Λ' mit $\Lambda_0^0 \geq 1, \Lambda_0^0 \geq 1$

Definiere $\vec{l} = (\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0), \vec{l}' = (\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_3^0)$

Aus $(\Lambda g \Lambda^T) = g^T = g$ folgt $(\Lambda g \Lambda^T)_{00} = \Lambda_0^0{}^2 - \vec{l}^2 = g_{00} = 1$

$$\Rightarrow \Lambda_0^0 = \sqrt{1 + \vec{l}^2}$$

Aus $(\Lambda'^T g \Lambda') = g$ folgt $(\Lambda'^T g \Lambda')_{00} = \Lambda_0^0{}^2 - \vec{l}'^2 = g_{00} = 1$

$$\Rightarrow \Lambda_0^0 = \sqrt{1 + \vec{l}'^2}$$

$$\Rightarrow (\Lambda \Lambda')_0^0 = \Lambda_0^0 \Lambda_0^0 + \vec{l} \vec{l}' = \sqrt{1 + \vec{l}^2} \sqrt{1 + \vec{l}'^2} + \vec{l} \vec{l}' \geq 0$$

Wegen $(\Lambda \Lambda')_0^0 \geq 1$ folgt automatisch $(\Lambda \Lambda')_0^0 \geq 1$ ✓)

- enthält $\mathbb{1}$ ✓

- enthält mit Λ auch $\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$, da $(g \Lambda^T g)_0^0 = \Lambda_0^0$ ✓)

↳ Rotationen: $\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{D}^T & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ mit $\mathcal{D} \in SO(3)$

(Raumdrehungen)

↳ Boosts: Spezielle Lorentztransformationen in feste Richtung

$$\text{z.B. x-Boost: } \mathcal{B}_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & & \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Struktur und Parameter der Lorentzgruppe

Es gilt:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Beliebige eigentlich orthochrone Lorentztransformationen } \Lambda \\ \text{lassen sich zerlegen in: } \boxed{\Lambda = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{B}_x(v) \cdot \mathcal{R}_2^T} \\ \text{mit: } \mathcal{B}_x(v): \text{ Boost in x-Richtung} \\ \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2: \text{ Rotationen} \end{array} \right.$$

(Beweis: In 2.2.3.2(b) bereits geführt unter (iii))

Alternative Zerlegung

$$\boxed{\Lambda = \mathcal{R} \cdot \mathcal{B}(\vec{v})}$$

mit: \mathcal{R} : Rotation $(\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2^T)$
 $\mathcal{B}(\vec{v})$: Boost in Richtung \vec{v} $(\mathcal{B}(\vec{v}) = \mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{B}_x(v) \cdot \mathcal{R}_2^T)$

Folgerungen

- Die eigentlich orthochrone Lorentzgruppe ist zusammenhängend und hat sechs kontinuierliche Parameter (3 für \vec{v} , 3 für Rotationen. Es lässt sich immer eine stetige Verbindung zum Einsoperator finden.)
- Die Poincaré-Gruppe (Λ, a) hat zehn kontinuierliche Parameter. (3 für \vec{v} , 3 für Rotationen, 4 für Raumzeittranslationen.) Sie ist nicht zusammenhängend (siehe unten).
- Die homogene Lorentzgruppe enthält vier unzusammenhängende Komponenten:

– L_+^\uparrow : eigentlich orthochrone Lorentzgruppe mit $\det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1$

– L_-^\uparrow : $\det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \geq 1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

– L_+^\downarrow : $\det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \leq -1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

– L_-^\downarrow : $\det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \leq -1$:

$$\text{Matrizen } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\Lambda} \text{ mit } \tilde{\Lambda} \in L_+^\uparrow$$

Komponenten sind unzusammenhängend, da ein stetiges Überführen von $\det \Lambda = +1$ nach $\det \Lambda = -1$ bzw. von $\Lambda_0^0 \geq 1$ nach $\Lambda_0^0 \leq -1$ offensichtlich nicht möglich ist.

2.3 Raum-Zeit und Lorentzinvarianz

Fazit des vorigen Abschnitts: Herleitung der Lorentztransformation aus dem Relativitätsprinzip und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
 → Transformation, die zwischen Inertialsystemen vermittelt.

Charakteristische Eigenschaft der Lorentztransformation:

Es existiert eine „Metrik“, vermittelt vom metrischen Tensor $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, die unter der Transformation invariant ist.

(Metrik: „Abstand“ zwischen zwei Punkten x, y ist definiert als $\|x - y\| = (x^\mu - y^\mu)g_{\mu\nu}(x^\nu - y^\nu)$)

Alternativer möglicher Zugang:

Festlegung der Metrik g auf der vierdimensionalen Raumzeit.

→ „Lorentz-Metrik“: Lorentztransformationen sind genau diejenigen Transformationen, die die Metrik erhalten.

→ Metrik definiert eine Raum-Zeit-Struktur.

Diese charakterisiert die spezielle Relativitätstheorie.

Fragen in diesem Abschnitt

1. Wie sieht diese Raum-Zeit-Struktur aus? (→ 2.3.1)
2. Wie müssen sinnvolle physikalische Größen in dieser Struktur beschaffen sein? (→ 2.3.2)
3. Wie müssen physikalische Gesetze in dieser Struktur formuliert werden? (→ 2.3.3)
 (vgl. Relativitätsprinzip: Inertialsysteme sollen bzgl. aller Naturgesetze äquivalent sein.)

2.3.1 Minkowski-Diagramm und Lichtkegel

Zur ersten Frage:

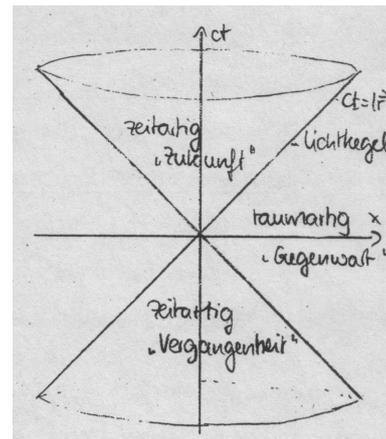
Wie sieht Raum-Zeit-Struktur aus?

→ Geometrische Veranschaulichung

- Weltpunkt: $x = (ct, \vec{r}) \hat{=} \text{Ereignis}$
- Abstand zwischen Ereignissen x, y
 $s^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu) = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2$
 unabhängig vom Bezugssystem

Mögliche Fälle:

- (i) $s^2 > 0$: Abstand zeitartig
- (ii) $s^2 = 0$: Abstand lichtartig
- (iii) $s^2 < 0$: Abstand raumartig



Fall (i):

Im Prinzip kann ein Massenpunkt hintereinander bei beiden Ereignissen anwesend sein (z.B. ein Massenpunkt mit der gleichförmigen

$$\text{Geschwindigkeit } v = \sqrt{\frac{(\Delta\vec{r})^2}{(\Delta t)^2}} = \sqrt{c^2 - s^2}/(\Delta t) < c$$

→ kausaler Zusammenhang zwischen beiden Ereignissen möglich.

Dagegen: Es kann kein Inertialsystem geben, in dem Ereignisse gleichzeitig sind. (Dann wäre $\Delta t = 0 \leadsto s^2 = -(\Delta\vec{r})^2 < 0$.)

Fall (iii):

Es gibt ein Inertialsystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind.

Dagegen: Kausaler Zusammenhang nicht möglich

(zumindest nicht, wenn durch Teilchen oder Lichtsignal vermittelt.)

Fall (ii):

„Lichtkegel“: Separiert zeitartige und raumartige Bereiche.

Trennt zwei streng getrennte zeitartige Bereiche ab:

„Zukunft“ und „Vergangenheit“

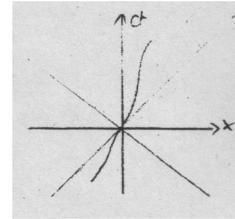
→ kausale Reihenfolge eindeutig: Wenn Ereignis x Ereignis y beeinflussen kann, dann nicht umgekehrt!

• Weltlinie:

Bahnkurve eines materiellen Körpers

bzw. Verlauf eines Signals in der Raumzeit.

$(ct, \vec{r}) \hat{=} \text{muss lokal zeitartig sein, d.h. } ds^2 > 0$
entlang der Kurve.



Charakterisierung einer Weltlinie:

- Eigenzeit: „Bogenlänge“ s bzw. Zeit τ in einer Uhr, die dem Massenpunkt bzw. Signal genau folgt: $d\tau = ds/c$

(In einem Inertialsystem, das genau die momentane Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ des Massenpunkts hätte, wäre $d\vec{r} = 0 \Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 \equiv c^2 d\tau^2$)

NB: Gegenüber einem äußeren, „ruhenden“ Beobachter gilt stets:
Die Zeit des Beobachters vergeht schneller als die Eigenzeit:

Die Eigenzeit geht nach: $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$

→ Parametrisierung der Weltlinie: $x(\tau)$

- Weltgeschwindigkeit: $u(\tau) = \frac{dx}{d\tau} = (c \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau})$.

Mit $dt = d\tau / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma d\tau$ folgt:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \quad \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \vec{v} \quad \Rightarrow \quad u(\tau) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

2.3.2 Viererskalare, Vierervektoren, Vierertensoren

Zur zweiten Frage: Wie sehen in der Raum-Zeit-Struktur der speziellen Relativitätstheorie sinnvolle physikalische Größen aus?

2.3.2.1 Klassifizierung

Wie in der Newtonschen Mechanik (Theorie 1) über Transformationsverhalten bei Wechsel des Inertialsystems. Betrachte dabei nur homogene Lorentztransformationen, also keine Translationen. Transformationsmatrix sei $\{\Lambda^\mu_\sigma\}$

- Viererskalar oder Weltskalar: Einkomponentige Größe
Unter Lorentztransformationen invariant
Beispiele: Abstandsquadrat s^2 ; Eigenzeit τ
- Vierervektor oder Weltvektor: Vierkomponentige Größe, zwei Typen

- kontravariante Vektoren: $\{a^\mu\} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$

$$\text{Transformieren gemäß } \bar{a}^\mu = \Lambda^\mu_\sigma a^\sigma$$

Beispiele: Ortsvektor $\{x^\mu\}$, Weltgeschwindigkeit $\{u^\mu\} = \left\{\frac{dx^\mu}{d\tau}\right\}$

- kovariante Vektoren: $\{b_\mu\} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$

$$\text{Transformieren gemäß } \bar{b}_\mu = b_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

(Folgt aus Transformationsverhalten für kovariante Vektoren mit $b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu$
Denn: $\bar{b}_\mu = g_{\mu\nu} \bar{b}^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\tau b^\tau = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\tau b^\tau = [g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\tau g^{\tau\sigma}] b_\sigma = [(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu] b_\sigma$
Zum letzten Schritt: In Matrixschreibweise ist $[\] = g\Lambda g$
Wegen (2.2.3.3) $\Lambda^T g \Lambda = g$ und $g = g^T = g^{-1}$ gilt
 $\Lambda^T g = g \Lambda^{-1} \Rightarrow g \Lambda^T g = \Lambda^{-1} \Rightarrow g \Lambda g = (\Lambda^{-1})^T \quad \checkmark$)

Beispiele:

- $\{x_\mu\}$ mit $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

- Gradient $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\partial_\mu \rightarrow \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \underbrace{\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\mu}\right)}_{(\Lambda^{-1})^\sigma_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu \partial_\sigma)$

d.h. falls $\phi(x)$ Skalar $\rightarrow \partial_\mu \phi(x)$ kovarianter Vierervektor,
falls $A^\mu(x)$ Vierervektor $\rightarrow \partial_\mu A^\mu(x)$ Skalar, etc.

(NB: Gilt so nur, wenn Λ unabhängig von x ,
also nicht mehr in allgemeiner Relativitätstheorie)

- Vierertensor n-ter Stufe: 4^n komponentige Größe

- kontravariant: $\bar{t}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\sigma_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\sigma_n} t^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$

- kovariant: $\bar{t}_{\mu_1 \dots \mu_n} = t_{\sigma_1 \dots \sigma_n} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\mu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\mu_n}$

- gemischt ($p + l = n$): $\bar{t}^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_p} = \Lambda^{\mu_1}_{\sigma_1} \dots \Lambda^{\mu_l}_{\sigma_l} t^{\sigma_1 \dots \sigma_l}_{\rho_1 \dots \rho_p} (\Lambda^{-1})^{\rho_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\rho_p}_{\nu_p}$

Beispiele:

- Gemischter Tensor 2. Stufe $A^\mu_\nu \rightarrow \bar{A}^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\sigma A^\sigma_\tau (\Lambda^{-1})^\tau_\nu$
entspricht $\bar{A} = \Lambda A \Lambda^{-1}$ (übliche Transformation für Matrizen.)

- Rein kontravarianter Tensor $A^{\mu\nu} \rightarrow \bar{A}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau A^{\sigma\tau}$
entspricht $\bar{A} = \Lambda A \Lambda^T$

2.3.2.2 Rechenregeln

(ohne Beweis)

- Skalarprodukt: $a_\mu b^\mu \rightarrow$ macht aus zwei Vektoren einen Skalar

Beispiele:

$x_\mu x^\mu$: Längenquadrat

$\partial_\mu \partial^\mu$: d'Alembert-Operator $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta =: \square$

Skalarer Operator, d.h. wenn $\phi(x)$ skalar $\Rightarrow \square \phi$ skalar.

- Tensorprodukt:

$a_\mu b^\nu \rightarrow$ macht aus zwei Vierervektoren einen Vierertensor

Verallgemeinerung:

$A^{\mu_1 \dots \mu_l} B^{\rho_1 \dots \rho_q} C_{\tau_1 \dots \tau_r} \rightarrow$ Tensor $(l + p + q + r)$ ten Grades

- Produkt: A^μ_ν Vierertensor, b^ν Vierervektor $\Rightarrow A^\mu_\nu b^\nu$ Vierervektor

- Herauf- und Herunterziehen eines Index:

$T^{\dots \alpha \dots} = g^{\alpha\beta} T^{\dots \beta \dots}$ bzw. $T^{\dots \alpha \dots} = g_{\alpha\beta} T^{\dots \beta \dots}$

- Verjüngung:

$T^{\mu_1 \dots \alpha \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_p} \rightarrow$ macht aus Tensor n-ter Stufe Tensor (n-2)-ter Stufe (Summe über α !)

- Spezielle Tensoren:

$$- g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} :$$

gleiche Form in allen Bezugssystemen

- $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$: vollständig antisymmetrischer Tensor mit $\varepsilon_{0123} = 1$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & : \text{gerade Permutationen } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ von } (0123) \\ -1 & : \text{ungerade Permutationen } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ von } (0123) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

\leadsto ebenfalls gleiche Form in allen Bezugssystemen

2.3.3 Kovarianz-Forderung an Naturgesetze

Zur dritten Frage: Wie müssen Naturgesetze beschaffen sein, um in Einklang mit dem Relativitätsprinzip zu sein?

Folgerung: Naturgesetz muss unter Lorentztransformationen forminvariant sein (\leftrightarrow „kovariant“)

\leadsto Ist genau dann erfüllt, wenn es nur „physikalisch sinnvolle Größen“ mit bekanntem Transformationsverhalten im Sinne von 2.3.2 enthält, und wenn alle Terme der Gleichung für das Naturgesetz Welt-Tensoren gleicher Stufe sind.

2.4 Relativistische Mechanik

Wir wissen nun, wie Naturgesetze aufgebaut sein müssen, damit sie kovariant sind und dem Relativitätsprinzip genügen.

Nun: Suche nach mechanischen Gesetzen, die kovariant sind

Nicht so einfach - Zum Beispiel ist das Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ nicht kovariant.

Frage: Was tritt an die Stelle?

2.4.1 Relativistisches Kraftgesetz

Gesucht: Kraftgesetz für ein einzelnes Teilchen der Geschwindigkeit \vec{v}

Forderungen: (i) Gesetz soll kovariant sein (\rightarrow Vierervektor-Gleichung)
(ii) Im Grenzfall $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ soll Newtonsches Gesetz herauskommen.
(insbesondere: vektorielle Gleichung)

Ansatz: $K^\mu = m \cdot \frac{d}{d\tau} u^\mu$ mit

m : Masse im mitbewegten System \rightarrow invariant, Viererskalar.

$\{u^\mu\}$: Vierergeschwindigkeit \rightarrow Vierervektor

$\{\frac{d}{d\tau} u^\mu\}$: Viererbeschleunigung, Vierervektor

$\{K^\mu\}$: Noch zu bestimmender Vierervektor: Minkowski-Kraft

\leadsto Kovariante Gleichung \checkmark

Aber: Es muss noch ein Bezug zu physikalisch messbaren Kräften hergestellt werden

Kandidaten: (beide keine kovarianten Größen!)

- „Einsteinkraft“: $\vec{F} = m\vec{a}$ im mitbewegten System

- „Newtonkraft“: $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ mit $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ (mehr siehe 2.4.1.2)

2.4.1.1 Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Einstein-Kraft“

„Einstein-Kraft“:

Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ auf ein Teilchen in einem Inertialsystem $\bar{\Sigma}$, das sich zu einem gegebenen Zeitpunkt mit dem Teilchen mitbewegt (mit dessen momentanen Geschwindigkeit \vec{v}).

Diese Kraft kann lokal gemessen werden.

Im mitbewegten Inertialsystem gilt: $\vec{K} = m(0, \frac{d\vec{v}}{dt}) = (0, \vec{F})$

$$\gamma = 1, d\gamma = d \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

$$\Rightarrow d\bar{t} = \gamma d\tau = d\tau; d\bar{u} = d(\gamma c, \gamma \vec{v}) = (c, \vec{v})d\gamma + \gamma(0, d\vec{v}) = (0, d\vec{v})$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = (0, \frac{d\vec{v}}{dt}) = (0, \vec{a})$$

Im ruhenden System wird Minkowski-Kraft rücktransformiert:

$$K^\mu = \Lambda^\mu_\nu \bar{K}^\nu \text{ mit } \Lambda = \mathcal{B}(-\vec{v}): \text{Boost für Geschwindigkeit } (-\vec{v})$$

Speziell: Boost \vec{v} in x-Richtung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\gamma F_x \\ \gamma F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (*)$$

Verallgemeinerung auf beliebige \vec{v} :

Zerlege $\vec{K} := (K^1, K^2, K^3)$ und \vec{F} in Komponenten parallel (\parallel) und senkrecht (\perp) zu \vec{v}

$$\leadsto \vec{F}_{\parallel} = \frac{1}{v^2} (\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}; \vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}; \text{ analog } \vec{K} = \vec{K}_{\parallel} + \vec{K}_{\perp}$$

Vergleich mit (*) $\Rightarrow K^0 = \beta\gamma F_{\parallel}, \vec{K}_{\parallel} = \gamma \vec{F}_{\parallel}, \vec{K}_{\perp} = \vec{F}_{\perp}$

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{K} &= \vec{K}_{\parallel} + \vec{K}_{\perp} = \gamma \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2} + (\vec{F} - \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2}) = \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{v^2} (\gamma - 1) \\ &= \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \quad (\text{wegen } \frac{\gamma - 1}{\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}) \end{aligned}$$

$$K^0 = \beta\gamma F_{\parallel} = \beta\gamma \frac{(\vec{F}\vec{v})}{v} = \gamma \cdot \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c}$$

\Rightarrow Zusammenhang:
$$K = \left(\gamma \cdot \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c}, \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \right)$$

Bemerkung: Im allgemeinen Fall zeigen $\vec{K} = (K^1, K^2, K^3)$, \vec{F} und die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ in drei verschiedene Richtungen!

(Transformation der Beschleunigung $\vec{a} \rightarrow \vec{a}$: Übungsaufgabe

$$\leadsto m\vec{a}_{\parallel} = \frac{1}{\gamma^3} \vec{F}_{\parallel}, m\vec{a}_{\perp} = \frac{1}{\gamma^2} \vec{F}_{\perp} \quad m\vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma^2} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2}$$

2.4.1.2 Bezug zwischen Minkowski-Kraft und „Newton-Kraft“

„Newton-Kraft“: Zeitliche Änderung einer Größe \vec{p} („Impuls“), die in abgeschlossenen Inertialsystemen erhalten ist: $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

\leadsto in elastischen Prozessen kann Messvorschrift angegeben werden.

(Impulsänderung eines Teilchens \leftrightarrow Kraft auf anderes Teilchen)

Kandidat für die Erhaltungsgröße: Viererimpuls $p = m \cdot u \equiv (p^0, \vec{p})$

(siehe dazu das nächste Kapitel, 2.4.2)

\Rightarrow Newtonkraft
$$\vec{f} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) \quad (\text{wegen } u = (\gamma c, \gamma\vec{v}))$$

Vergleich mit Minkowski-Kraft: $K = m \frac{du}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau} \equiv (K^0, \vec{K})$

$$\Rightarrow \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \vec{K} \cdot \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \vec{K} = \gamma \vec{f}$$

Weiterhin ist aus 2.4.1.1 bekannt:

$$K^0 = \gamma \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \text{ und } \vec{K} = \gamma \vec{f} = \vec{F} + \frac{(\vec{F}\vec{v}) \cdot \vec{v}}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \quad (\vec{F} \text{ Einsteinkraft})$$

$$\Rightarrow K^0 = \gamma \cdot \frac{\vec{f}\vec{v}}{c}$$

$$(\text{Einsetzen: } \gamma \frac{\vec{f}\vec{v}}{c} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} + \frac{(\vec{F}\vec{v})v^2}{c^3} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \underbrace{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta^2\right)}_{\gamma} = \gamma \frac{\vec{F}\vec{v}}{c} \checkmark)$$

\Rightarrow Zusammenhang insgesamt:
$$K = \left(\gamma \frac{\vec{f}\vec{v}}{c}, \gamma \vec{f} \right)$$

2.4.2 Impuls und Energie

2.4.2.1 Viererimpuls

* Definition: $\boxed{\{p^\mu\} = \{mu^\mu\} = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})}$ (siehe 2.4.2.2)
 \leadsto Transformationsverhalten eines Vierervektors

* Eigenschaften:

- Norm: $p_\mu p^\mu = p^{02} - \vec{p}^2 = (m\gamma c)^2 - (m\gamma\vec{v})^2 = (m\gamma c)^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = m^2 c^2$

$\Rightarrow \boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2} > 0$: zeitartig

- Element p^0 : $m\gamma c > 0 \rightarrow$ „zukunft“artig

- Grenzverhalten bei $v/c \rightarrow 0$: (nichtrelativistischer Übergang)

$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow p^\mu = (mc + \frac{m}{2} \frac{v^2}{c}, m\vec{v}) + \dots$

$\Rightarrow \boxed{\{p^\mu\} \underset{v/c \rightarrow 0}{\approx} (\frac{1}{c}(mc^2 + T_{\text{n.r.}}), \vec{p}_{\text{n.r.}}) + \mathcal{O}(v^2/c^2)}$

wobei $T_{\text{n.r.}}$ nichtrelativistische kinetische Energie
 und $\vec{p}_{\text{n.r.}}$ nichtrelativistischer Impuls

* Motiviert Terminologie und Notation

$\boxed{\{p^\mu\} = (\frac{E}{c}, \vec{p})}$ „Energie-Impuls-Vektor“

mit \vec{p} : relativistischer Impuls
 E : relativistische Energie

Zusammenhang: $\boxed{E = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}$

Energie wird weiter zerlegt in:

„Ruheenergie“: $E_0 = mc^2$

„Relativistische kinetische Energie“: $T_r = E - E_0$

Weiterhin wird manchmal eine „bewegte Masse“ eingeführt:

$m(v) = \gamma \cdot m = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

(Dann nennt man $m_0 := m$ auch Ruhmasse“)

Damit kann man schreiben:

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m(v) \cdot \vec{v}$

Relativistische Energie: $E = m(v) \cdot c^2$

Nachteil dieser Schreibweise: $m(v)$ ist kein Welt-Tensor.

Dagegen ist Ruhmasse m ein Lorentz-Skalar.

\rightarrow Benutzung von $m(v)$ erschwert kovariante Schreibweise,
 soll daher hier weitgehend vermieden werden!

* Grenzübergang zu masselosen Teilchen

Übergang $m \rightarrow 0$ im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall ohne weiteres möglich (z.B. Photonen)

Man erhält Vierervektor p mit $\boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = 0}$ lichtartig

→ p hat die Form $p = (|p|, \vec{p})$

Vergleich mit $m\gamma(c, \vec{v}) \rightarrow$ Geschwindigkeit $|\vec{v}| = c$

Energie: $E = |\vec{p}| \cdot c$

2.4.2.2 Energie- und Impulserhaltung

„Plausibilitätsbetrachtungen“

In der nichtrelativistischen Physik folgt aus der Homogenität von Raum und Zeit die Energie- und Impulserhaltung. Wie sieht das hier aus?

Herleitung im Moment noch nicht möglich (erst in Kapitel 3).

(Bislang noch keine allgemeine Aussagen über Wechselwirkungen und „Potentiale“, wie diejenigen, die in Theorie 1 benutzt wurden.)

Aber: Erhaltungssätze in der nichtrelativistischen Physik sehr stark verankert, konform mit allen Erfahrungen!

→ Annahme: Es gibt so etwas ähnliches auch relativistisch.

In abgeschlossenen Inertialsystemen gibt es eine „Energie“ und einen „Impuls“, die Erhaltungsgrößen sind.

Frage: Welche Größen kommen dafür in Frage?

(müssten im nichtrelativistischen Grenzfall zur nichtrelativistischen Energie und nichtrelativistischem Impuls werden)

Vermutung (naheliegenderweise): Energie-Impuls-Vektor $p = mu$

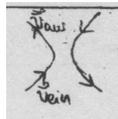
Diese Vermutung soll anhand zweier Modellsituationen getestet werden. Ein Beweis ist, wie oben erwähnt, aktuell noch nicht möglich.

(i) Ein kräftefreies Teilchen

„Kräftefrei“ \rightarrow Einstein-Kraft $\vec{F} = 0 \rightarrow$ Minkowski-Kraft $K = 0$

Mit $K = \frac{dp}{d\tau}$ folgt $\frac{dp}{d\tau} = 0 \Rightarrow p = \text{const.}$

(ii) Zwei identische Teilchen, elastischer Stoß



Wähle als Bezugssystem dasjenige Inertialsystem, in dem die Teilchen vor dem Stoß mit entgegengesetzter Geschwindigkeit $\pm \vec{v}_{\text{ein}}$ aufeinander zufliegen.

Falls „Energie“- und „Impuls“-erhaltung gilt, müssen sie nach dem Stoß entgegengesetzt auseinanderfliegen mit $\pm \vec{v}_{\text{aus}}$, wobei die absolute Geschwindigkeit dieselbe sein muss wie vor dem Stoß: $|\vec{v}_{\text{ein}}| = |\vec{v}_{\text{aus}}|$

→ Gesamtviererimpuls $p = m(u_1 + u_2) = (2\gamma(v)mc, \vec{0}) = \text{const.}$

→ Bleibt auch in jedem anderen Inertialsystem konstant!

Fazit: Viererimpuls ist in unseren Modellsituationen tatsächlich erhalten.

Folgerung: Energie- und Impulserhaltung sind eng verknüpft.

Ein Erhaltungssatz kann nicht ohne den anderen gelten.

(Denn: Energie und Impuls gehen in verschiedenen Inertialsystemen ineinander über.)

Im Kapitel 3: Allgemeine Herleitung der Energie-/Impulserhaltung aus Homogenität von Raum und Zeit analog der Mechanik aus Noether-Theorem für Felder und Lagrange-Dichten.

2.4.2.3 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Betrachte inelastischen Stoß oder Explosion

Nichtrelativistische Mechanik: Impulserhaltung,
aber keine Energieerhaltung

Relativistisch: Ein Erhaltungssatz kann nicht alleine gelten

Einsteins Forderung: Viererimpuls in solchen Fällen ganz erhalten!

→ Gesamtenergie $E = \text{const.}$

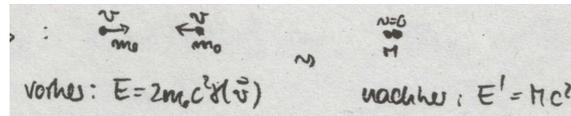
→ Geht nur, wenn kinetische Energie in Ruheenergie übergehen kann und umgekehrt ⇒ Ruhmasse muss sich ändern.

Anders formuliert: Äquivalenz von "bewegter Masse" und Energie

Zusammenhang $E = m(v)c^2$ mit $m(v) = m\gamma$ (bekannt aus 2.4.2.1)
gilt allgemein, bei allen Formen der Energieumwandlung!

Folgerungen und Beispiele:

- Inelastischer Stoß:



$$E = E' \Rightarrow M = 2m_0 \gamma(v) > 2m_0$$

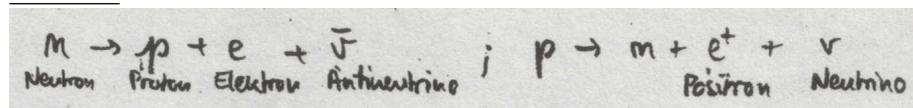
→ Kinetische Energie geht in Ruheenergie über.

(hier: effektive „Ruheenergie“: erhöhte Wärmebewegung im Körper)

- Massenzuwachs, wenn 100 kg um 1 km gehoben werden:

$$\Delta m = 10^{-12} \text{ kg}$$

- β -Zerfall:



Es gilt: $m_n = 1.0087 \text{ u}$; $m_p = 1.0073 \text{ u}$; $m_e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ u}$; $m_\nu \approx 0$

→ Freies Neutron kann zerfallen, freies Proton nicht (nur im Kern)

- Atombombe: Kraftwirkung durch Massenverlust von $\sim 0.1\%$
- Sonne: Massenverlust $\frac{\Delta m}{\Delta t} \sim 4 \cdot 10^{12} \text{ kg/s}$

2.4.3 Relativistische Lagrange-Mechanik

2.4.3.1 Schwierigkeiten bei der Übertragung der Lagrange-Mechanik auf die spezielle Relativitätstheorie

* Potentiale und Potentialkräfte kann man nicht relativistisch verallgemeinern

Grund: Betrachte Potential $U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t) \rightarrow$ Kraft $\vec{F}_i = \partial_i U(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_N, t)$
 \leadsto Bewegung von Teilchen j wirkt sich instantan aus
 auf die Kraft \vec{F}_i auf Teilchen i

\Rightarrow Probleme: (i) „instantan“ nicht mehr klar definiert
 (ii) Wäre instantane Fernwirkung in einem Inertialsystem möglich, gäbe es Probleme mit der Kausalität.

Heutiges Bild: Kräfte werden durch Wellen/Teilchen vermittelt,
 die maximal Lichtgeschwindigkeit haben können
 (z.B. Coulombkraft \leadsto elektromagnetische Wellen/Photonen)

* Zwangsbedingungen und Zwangskräfte können nur selten kovariant formuliert werden

* Transformation in beschleunigte, z.B. rotierende Bezugssysteme ist vorerst nicht vorgesehen

\Rightarrow Voraussetzungen der klassischen Lagrange-Theorie ergeben größtenteils keinen Sinn in der speziellen Relativitätstheorie. Als Werkzeug kann sie nicht ohne weiteres übernommen werden.

Aber: Der Formalismus (Lagrange-Funktion/Lagrange-Dichte) spielt eine zentrale Rolle in fast allen modernen - relativistischen - Theorien.

2.4.3.2 Vorweg: Lagrange-Mechanik „Quick and dirty“

Trotz der Vorbehalte aus 2.4.3.1: Gelegentlich liegen Situationen vor, in denen man dynamische Effekte bei dem Austausch von Kraftwirkungen vernachlässigen kann (typischerweise dann, wenn man nur an „relativistischen Korrekturen“ interessiert ist, z.B. in Spektren oder bei chemischen Reaktionsraten)

\leadsto Beschreibe Wechselwirkungen näherungsweise durch Potentialtöpfe

Annahme: Kraftgleichung mit Newton-Kraft $\vec{f} = \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} \approx -\vec{\nabla}U$ (*)
 (U =Potential)

Gesucht: Lagrange-Funktion $L(\vec{r}, \vec{v}, t)$ so, dass die Gleichung (*) von Lagrange-Gleichungen 2. Art ($\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha}$) reproduziert wird.

Lösung:
$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - U$$

 (Check: $\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial r_\alpha} = f_\alpha$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} = \frac{dL}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{r}_\alpha} = \frac{m\dot{r}_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma v_\alpha \Rightarrow \vec{f} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) \checkmark$)

NB: Grenzfall $v/c \rightarrow 0 \Rightarrow L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - U$

Vorteile dieses Formalismus:

- Verallgemeinerung auf viele Teilchen ohne weiteres möglich
- Generalisierte Koordinaten können eingeführt werden
- ~ Ähnlich mächtig wie der nichtrelativistische Formalismus

Nachteil: Falsch !!! (nur als Näherung zu gebrauchen!)

2.4.3.3 Kovariante Lagrange-Funktion eines Teilchens

Gesucht nun: Kovarianer Lagrange-Formalismus für ein Punktteilchen

Vorab: Rekapitulation der kinematischen Eigenschaften

- Trajektorie charakterisiert durch Weltlinie $x(\lambda)$ (λ : Parametrisierung)
- Eigenzeit entlang der Weltlinie: $\tau = \frac{1}{c} \int ds$ mit $(ds)^2 = dx_\mu dx^\mu$

Zugang über kovariantes Hamilton-Prinzip: Wirkung I extremal

* Erinnerung: Nichtrelativistische Mechanik eines Teilchens

→ Trajektorie $\vec{r}(t)$ zwischen $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$ minimiert Wirkung $I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
mit L : Lagrange-Funktion

Minimierung liefert Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}$

* Relativistischer Ansatz: Trajektorie ↔ Weltlinie

Allgemeine Parametrisierung: $x(\lambda)$ (λ : Laufparameter)

Ansatz für die Wirkung: $I = \int_{x_1}^{x_2} d\lambda L(x, \frac{dx}{d\lambda}) = \int_{x_1}^{x_2} dI$

Bedingungen:

- (i) Wirkung sollte Viererskalar sein $\Rightarrow dI = d\lambda L$ Viererskalar
- (ii) Wirkung sollte nicht von der Parametrisierung λ abhängen
 $\Rightarrow dI - d\lambda L(x, \frac{dx}{d\lambda})$ unabhängig von λ
 \Rightarrow Für neue Parametrisierung λ' mit $\kappa = \frac{d\lambda}{d\lambda'}$ muss gelten:
$$d\lambda' L(x, \frac{dx}{d\lambda'}) = \kappa^{-1} d\lambda L(x, \frac{dx}{d\lambda} \kappa) \stackrel{!}{=} d\lambda L(x, \frac{dx}{d\lambda})$$

 $\Rightarrow L$ muss in $\frac{dx}{d\lambda}$ homogen sein: $L(x, \kappa \frac{dx}{d\lambda}) = \kappa L(x, \frac{dx}{d\lambda})$
- (iii) Freie Teilchen: dI hängt nicht vom Absolutwert von x ab
(Homogenität der Raumzeit)

Konstruktion der Lagrange-Funktion

- (iii) → dI darf nur von dx^μ abhängen
- (i) → dI Viererskalar, hängt von dx^μ ab
 \Rightarrow der einzig mögliche Viererskalar, den man daraus bilden kann,
ist $dx_\mu dx^\mu$
- (ii) → $dI = d\lambda L$, L homogene Funktion von $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$
 \Rightarrow die einzige mit (i) und (iii) kompatible Möglichkeit
ist $L \propto \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}}$

Vorfaktor: So gewählt, dass der nichtrelativistische Grenzfall reproduziert wird: $I_{\text{nichtrel.}} = \int dt \frac{1}{2} m v^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= K \int d\lambda \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}} = K \int \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = K \int \sqrt{c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2} \\ &= K c \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \xrightarrow{v/c \rightarrow 0} \text{const.} - \frac{K}{2c} \int dt v^2 \stackrel{!}{=} \text{const.} + \frac{m}{2} \int dt v^2 \\ \Rightarrow \text{Vorfaktor } K &= -mc ! \end{aligned}$$

* Zusammenfassung:

Herleitung der Form von L aus allgemeinen Symmetrieprinzipien!

$$\boxed{L = -mc \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}}} \quad \boxed{I = \int_{x_1}^{x_2} d\lambda L = -m c^2 \int_{x_1}^{x_2} d\tau}$$

\Rightarrow Die Trajektorie des freien Teilchens maximiert die Eigenzeit!

Konkret: Bewegungsgleichung $\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-mc g_{\mu\nu} (dx^\nu/d\lambda)}{\sqrt{g_{\gamma\nu} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \right) = -m \frac{d}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dx_\nu}{d\tau} = u_\nu = \text{const.}$$

\Rightarrow Freie Teilchen bewegen sich mit konstanter Weltgeschwindigkeit (wie zu erwarten)

2.4.3.4 Kanonischer Impuls und Hamiltonfunktion

Nichtrelativistisch: Kanonischer Impuls $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$

Hamiltonfunktion: $\mathcal{H} = -L + \vec{P} \cdot \dot{\vec{r}}$ ($\hat{=}$ Energie)

\rightarrow Hamiltonmechanik: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \dot{r}_i, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = -\dot{P}_i$

Relativistisch:

– Kanonischer Viererimpuls $P^\mu = -\frac{\partial L}{\partial(dx_\mu/d\lambda)}$

(Minuszeichen: Eingeführt, um kompatibel mit nichtrelativistischem kanonisch Impuls zu sein, wegen $x_\mu = (ct, -\vec{r})$)

Speziell freies Teilchen: $P^\mu = mc \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}}} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m u^\mu$

\rightarrow Energie-Impulsvektor $P^\mu = p^\mu$

– Kanonische Hamiltonfunktion? ($L - P^\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$?)

Problematisch, da L als Funktion von $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ nicht notwendig konvex (z.B. für $\lambda \equiv \tau$ gilt $L = \text{const.}$)

\Rightarrow Voraussetzung für Legendre-Transformation nicht erfüllt.

Man kann trotzdem eine Hamiltonfunktion konstruieren, die als Hamiltongleichungen die richtigen Bewegungsgleichungen liefert (siehe z.B. Jackson), aber Formalismus ist ein anderer als üblich.

Hamiltonformalismus hat in der Relativitätstheorie nicht den gleichen Stellenwert wie in der nichtrelativistischen Mechanik. Zentral ist hier üblicherweise der Lagrange-Formalismus!

– Einordnung der nichtrelativistischen Hamiltonfunktion

Wähle dafür $\lambda = t$; $\mathcal{H}_{\text{nichtrel.}} = -\sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{d\lambda} P^i - L$

Da $L(\frac{dx^\mu}{d\tau})$ homogen ist, gilt $L = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial(dx_\mu/d\tau)} = -P^\mu \frac{dx_\mu}{d\tau}$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{\text{nichtrel.}} = \frac{dx^0}{d\lambda} P^0 \Big|_{\lambda=t} = cp^0$

$\Rightarrow \mathcal{H}_{\text{nichtrel.}}$ ist de facto die Nullte Komponente des Viererimpulses.

2.5 Ausblick: Das starke Äquivalenzprinzip

Wir haben gesehen: Die spezielle Relativitätstheorie, basierend auf den Einsteinschen Postulaten, löst alle eingangs angesprochenen theoretischen und experimentellen Fragen. Sie ist experimentell gut überprüft.

Allerdings wirft sie neue Fragen auf: Die Maxwell-Theorie kann man zwar gut mit dem Relativitätsprinzip in Einklang bringen (mehr dazu siehe nächstes Kapitel), aber das Gravitationsgesetz passt nun nicht mehr hinein.

Problem: Newtons Gravitationsgesetz wirkt instantan. In einer Theorie ohne absolute Gleichzeitigkeit ist das nicht möglich

→ Frage: Gibt es also doch wieder ein bevorzugtes Inertialsystem, in dem das Gravitationsgesetz gilt? Hat man die Gültigkeit des Relativitätsprinzips bzgl. eines Naturgesetzes (Maxwellsche Gleichungen) auf Kosten der Relativität eines anderen Naturgesetzes (Gravitationsgesetz) erkauft? (Beachte: Gravitationsgesetz ist Galilei-invariant)
Wo soll da der Fortschritt sein?

Einsteins Ausweg: Man braucht eine neue Gravitationstheorie.

Ausgangspunkt: Verschärftes Relativitätsprinzip

Betrachte Beobachter in einem abgeschlossenen Aufzug.

Beobachter fühlt sich kräftefrei: Dann gibt es für ihn keine Möglichkeit festzustellen, ob der Aufzug sich gerade im freien Fall befindet oder im Weltall im intergalaktischen Raum schwebt (fern jeder Materie).

Beobachter spürt eine Kraft: Er kann nicht entscheiden, ob die Kraft die Gravitationskraft zu einer schweren Masse außerhalb des Aufzugs ist, oder ob der Aufzug beschleunigt ist.

(Voraussetzung: Aufzug klein genug. Sonst könnte man Gravitationskraft daran erkennen, dass sie inhomogen ist.)

⇒ Äquivalenzprinzip

Das schwache Äquivalenzprinzip besagt: In Weltgebieten, die so klein sind, dass man die örtliche und zeitliche Änderung des Gravitationsfeldes vernachlässigen kann, lässt sich stets ein Bezugssystem wählen, in dem die Gravitation keinen Einfluss auf die Bewegung makroskopischer Teilchen ausübt. Es ist eine Folge der mit einer Genauigkeit von 10^{-11} experimentell bestätigten Äquivalenz von träger und schwerer Masse. Diese Äquivalenz bedeutet, dass alle Körper in einem äußeren Gravitationsfeld gleich schnell fallen.

Das starke Äquivalenzprinzip besagt: In Weltgebieten, die so klein sind, dass man die örtliche und zeitliche Änderung des Gravitationsfeldes vernachlässigen kann, lässt sich stets ein Bezugssystem wählen, in dem die Gravitation keinen Einfluss auf irgendwelche physikalische

Vorgänge ausübt. Die allgemeine Relativitätstheorie erfüllt nicht nur das schwache, sondern auch das starke Äquivalenzprinzip.

Als Inertialsysteme gelten nun Systeme, in denen Teilchen auch unter Einfluss von Gravitation kräftefrei erscheinen.

Vorteil: Inertialsysteme sind nun physikalisch realisierbar

Nachteil: Inertialsysteme können nur noch lokal existieren.

(„Koordinatenachsen dürfen nicht zu lang sein“)

Unendlich ausgedehnte Inertialsysteme kann es nicht geben.

↪ Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie

2.6 Wissensfragen

80. Wie lautet das Relativitätsprinzip in der klassischen Newtonschen Mechanik? Worin unterscheidet sich davon das Einsteinsche Relativitätsprinzip?
81. Formulieren Sie die Einsteinschen Postulate.
82. Wie lautet das Äquivalenzprinzip?
83. Wie lautet die Lorentz-Transformation für zwei Inertialsysteme, die gleichförmig in x -Richtung gegeneinander bewegt sind (Raumkoordinaten nicht verdreht)?
84. Wie lautet die entsprechende Galilei-Transformation? Wie hängt sie mit der Lorentz-Transformation zusammen?
85. Beschreiben Sie die Phänomene der Zeitdilatation und der Lorentzkontraktion.
86. Fallen Ihnen noch weitere relativistische Phänomene ein?
87. Erläutern Sie den Begriff der Gleichzeitigkeit in der speziellen Relativitätstheorie. Wie kann man in einem vorgegebenen Inertialsystem Gleichzeitigkeit feststellen? Warum kann es keine absolute Gleichzeitigkeit geben?
88. Skizzieren Sie die spezielle Lorentz-Transformation in der (x, ct) -Ebene.
89. Wie addieren sich Relativgeschwindigkeiten in der Newtonschen Mechanik, wie in der speziellen Relativitätstheorie? (Sie können sich auf den Fall beschränken, daß beide Relativgeschwindigkeiten in dieselbe Richtung zeigen.)
90. Was ist der metrische Tensor?
91. Was versteht man unter einem Linienelement? Wie transformieren sich Linienelemente unter Lorentz-Transformationen?
92. Welche Form haben allgemeine Lorentz-Transformationen? Welche Bedingung muß die Transformationsmatrix erfüllen?
93. Welche Transformationen umfaßt die Poincaré-Gruppe, die homogene Lorentz-Gruppe, die eigentlich orthochrone Lorentz-Gruppe?
94. Erläutern Sie die zehn freien Parameter einer allgemeinen Lorentz-Transformation.

95. Wie lautet die Einsteinsche Summenkonvention?
96. Was versteht man unter einem Minkowski-Diagramm? Wo liegt darin der Lichtkegel und was stellt er dar?
97. Was sind raumartige, zeitartige, lichtartige Vierervektoren?
98. Wann kann ein Ereignis ein anderes kausal beeinflussen?
99. Wann kann es ein Inertialsystem geben, in denen zwei Ereignisse gleichzeitig sind?
100. Was versteht man unter einem Weltpunkt? Einer Weltlinie? Welche wichtige Eigenschaft muss eine Weltlinie haben?
101. Wie ist die Eigenzeit einer Weltlinie definiert?
102. Was ist die Weltgeschwindigkeit?
103. Welche Eigenschaft definiert einen kontravarianten Vierervektor? Einen kovarianten Vierervektor? Nennen Sie Beispiele.
104. Was versteht man unter einem Vierertensor?
105. Wie sieht die "kovariante Formulierung" eines physikalischen Gesetzes aus? Was ist der Nutzen einer solchen Formulierung?
106. Wie lautet die relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Kraftgesetzes?
107. Was versteht man unter der Minkowski-Kraft? Wie hängt sie mit physikalisch meßbaren Kräften zusammen?
108. Wie ist der Viererimpuls definiert?
109. Welche physikalische Bedeutung haben die nullte Komponente p^0 und die Norm $p_\mu p^\mu$ des Viererimpulses?
110. Wie hängen in der speziellen Relativitätstheorie Impuls- und Energieerhaltung miteinander zusammen?
111. Erklären Sie das berühmte Gesetz $E = mc^2$.
112. Was versteht man unter der Ruhmasse und der Ruhenergie eines Massenpunktes?
113. Warum müssen Teilchen ohne Ruhmasse Lichtgeschwindigkeit haben?
114. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion für ein kräftefreies Teilchen in kovarianter Form.
115. Welche Größe wird von der Trajektorie eines freien Teilchens minimiert?

Kapitel 3

Die Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Aus Kapitel 2.4.3 bekannt: Kovariante Lagrangefunktion für freie Teilchen

Nun: Erweiterung des Formalismus für Teilchen in elektromagnetischem Feld in mehreren Schritten:

- Erweiterung der Lagrangefunktion für Punktteilchen so, dass auch Teilchen in elektromagnetischen Feldern beschrieben werden.
- Erweiterung des Lagrangeformalismus derart, dass man damit auch die Rückwirkung der Teilchen auf die Felder und die Eigendynamik der Felder beschreiben kann (→ Lagrangedichte)
- Liefert u. a.: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen,

3.1 Erweiterte Lagrangefunktion für Punktteilchen

3.1.1 Eichinvarianz und Viererpotential

(a) Erinnerung: Eichinvarianz der Lagrange-Funktion

Betrachte zunächst noch freie Teilchen

Aus der nichtrelativistischen Mechanik weiß man:

Wenn man einer Lagrangefunktion eine totale Zeitableitung hinzufügt, $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \rightarrow \tilde{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \frac{d}{dt} D(\vec{r}, t)$, dann ändern sich die Bewegungsgleichungen nicht.

Relativistisch ist das auch möglich:

$L(x, \frac{dx}{d\lambda})$ und $\tilde{L}(x, \frac{dx}{d\lambda}) = L(x, \frac{dx}{d\lambda}) + \frac{d}{d\lambda} D(x)$ sind äquivalent.

$$\text{(Check: } \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial(\frac{dx^\mu}{d\lambda})} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\mu}{d\lambda})} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} + \underbrace{\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial D}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dD}{d\lambda}}_0 \text{)}$$

Konkret für freie Teilchen (2.4.3): $L = -mc\sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}}$

Umeichung: $\tilde{L}(x, \frac{dx}{d\lambda}) = -mc\sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial D}{\partial x^\mu}$

liefert äquivalente Lagrangefunktion (selbe Bewegungsgleichungen)

(b) Einführung des ViererpotentialsNun: VerallgemeinerungStatt $\frac{\partial F}{\partial x^\mu}$ wird beliebige Vektorfunktion von x zugelassen

$$\frac{\partial D}{\partial x^\mu} \rightarrow -\frac{q}{c} A_\mu(x) \quad (\text{Faktor } -\frac{q}{c} \text{ zunächst nur Konvention})$$

$$\rightarrow \text{Lagrangefunktion: } L = -\left[mc \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}} + \frac{q}{c} A^\mu(x) \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right]$$

Vorteil: Lagrange-Funktion wird dadurch forminvariant, d.h. sie ändert auch nach Eichtransformation nicht ihre grundsätzliche Form

Zunächst einmal jedoch nur formale Spielerei, physikalische Bedeutung unklar. Wir wollen das nun noch ein wenig weiterspinnen.

* Kanonischer Impuls

$$P^\mu = -\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right)} = mc \frac{dx^\mu}{\underbrace{d\lambda}_{c d\tau}} + \frac{q}{c} A^\mu = mu^\mu + \frac{q}{c} A^\mu$$

\rightarrow entspricht nicht dem normalen Viererimpuls (anders als 2.4.3.4!)

* Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(-mu^\mu - \frac{q}{c} A^\mu \right) + \frac{q}{c} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu &= 0 \\ | \text{Nutze } \frac{d}{d\lambda} A^\mu(x) &= \frac{dx_\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A^\mu = \frac{dx_\nu}{d\lambda} \partial^\nu A^\mu \\ \Rightarrow m \frac{du^\mu}{d\lambda} &= \frac{q}{c} \frac{dx_\nu}{d\lambda} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ | \text{Ersetze } \frac{d}{d\lambda} \dots &= \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right) \frac{d}{d\tau} \dots \text{ und kürze } \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{c} \frac{dx_\nu}{d\tau} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

Frage: Was könnte diese Bewegungsgleichung beschreiben?

3.1.2 Feldstärketensor und elektromagnetische Felder* Alternative Notation:

Definiere "Feldstärketensor" $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen (mit $u = \frac{dx}{d\tau}$) auch in der Form schreiben:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu$$

* "Komponentenschreibweise"

Da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, kann es in Komponentenschreibweise in der folgenden (suggestiven) Form geschrieben werden:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die Einträge E_i, B_i haben dabei a priori noch keine konkrete Bedeutung.

Betrachte nun die Einzelkomponenten der Bewegungsgleichung mit $u = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ und $m u = (\frac{E}{c}, \vec{p})$, und benutze $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dE}{dt} = -q(\vec{v} \cdot \vec{E}) \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}) \end{cases}$$

\Rightarrow Zweite Gleichung beschreibt Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss einer Lorentzkraft, erzeugt durch elektrisches Feld \vec{E} und Magnetfeld \vec{B}

\Rightarrow Offenbar beschreibt die erweiterte Lagrange-Funktion aus 3.1.1 ein Teilchen im elektromagnetischen Feld!

* Zusammenhang zwischen Viererpotential und Feldern \vec{E} , \vec{B}

Definiere (wieder suggestiv) $A^\mu =: (\Phi, \vec{A})$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow E_i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \frac{1}{c} \partial_t A^i, \\ 2B_i = -\sum_{jk} \epsilon_{ijk} F^{jk} = -\sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\partial^j A^k - \partial^k A^j) = 2 \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j A^k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

\Rightarrow Viererpotential setzt sich aus dem aus Kapitel 1 bekannten skalaren Potential Φ und dem Vektorpotential \vec{A} zusammen!

* Noch einmal: Eichinvarianz und Eichfreiheit

Eichinvarianz bleibt natürlich bestehen.

\Rightarrow Umeichung $L \rightarrow L + \frac{d}{d\lambda} \Lambda(x)$ ändert weiterhin nichts an den Bewegungsgleichungen – aber: Ändert die Potentiale

Konkret: Addition einer totalen Zeitableitung $L \rightarrow L - \frac{q}{c} \frac{d}{d\lambda} \Lambda(x)$ führt zu einer Umeichung der Potentiale $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

Aber: Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ bleibt unverändert.

$$(F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) = \underbrace{\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}_{F^{\mu\nu}} + \underbrace{(\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \Lambda}_0)$$

Folgerungen

- Feldstärketensor ist ein Kandidat für eine "physikalische Größe" (z.B. eine messbare Größe). Viererpotential eher nicht, denn eine physikalische Größe sollte eichunabhängig sein.

- Eichung kann / muss festgelegt werden (siehe 1.1.4.2)

Kovariant formulierbare Eichung: Lorenzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$

3.1.3 Fazit

Verallgemeinerung des Lagrangeformalismus für freie relativistische Teilchen, motiviert durch Eichinvarianz im Lagrangeformalismus.

\rightarrow Neue Lagrange-Funktion, die genau die Bewegung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld beschreibt.

- Neue physikalische Größen: Feldstärketensor bzw. elektromagnetische Felder \vec{E} und \vec{B}
- Man erkennt, wie die bekannten elektromagnetischen Felder und die Lorentzkraft kovariant einzubetten sind. \vec{E} und \vec{B} sind in Wirklichkeit keine Vektoren, sondern Komponenten eines Vierertensors.

3.2 Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes

Nächste Aufgabe; Elektromagnetische Felder in den Lagrange-Formalismus einbeziehen. Notwendig, da Felder nicht "gottgegeben" sind, sondern sich mit den Teilchen mitentwickeln.

- Allgemein: Formalismus notwendig, mit dem man neben Trajektorien x_i von Punktteilchen i (endlich viele Freiheitsgrade) auch Felder $\Phi(x)$ (unendlich viele Freiheitsgrade) behandeln kann
⇒ Lagrangedichte

3.2.1 Der Lagrangedichte-Formalismus

(a) Von der Lagrange-Funktion zur Lagrangedichte

Zentrale Größe ist wie immer die Wirkung

- Nichtrelativistische Lagrangemechanik von Punktteilchen

$I = \int dt L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t)$: endlich viele Freiheitsgrade, Index i

→ • Relativistische Lagrangemechanik von Punktteilchen, 2.4.3

- Nichtrelativistische Lagrangemechanik von Feldern $\Phi_\alpha(\vec{r})$

Unendlich viele Freiheitsgrade (für $\alpha = 1 \dots n$: "n pro Raumpunkt \vec{r} ")

Aber Annahme: Nur Freiheitsgrade in unmittelbarer Nachbarschaft können sich direkt beeinflussen ⇒ Lokalität

→ Ansatz: $I = \int dt \underbrace{\int d^3r \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \nabla \Phi_\alpha, \partial_t \Phi_\alpha)}_{\text{Lagrange-Funktion}}$ mit \mathcal{L} : Lagrangedichte

Erläuterungen:

Lokalität heisst: Lagrangefunktion lässt sich durch Integral über eine Dichte ausdrücken, enthält keine Doppelintegrale wie z.B. $\int d^3r d^3r' \Phi_\alpha(\vec{r}) \Phi_\beta(\vec{r}')$. Solche Terme würden in den Euler-Lagrange-Gleichungen zu nichtlokalen Beiträgen führen, d.h. statt partieller Differentialgleichungen erhält man Integro-Differentialgleichungen.

Ableitungen höherer Ordnung (z.B. $\nabla^2 \Phi_\alpha$) sollen hier ebenfalls nicht berücksichtigt werden, da ja auch keine höheren Zeitableitungen eingehen.

NB: Im allgemeineren Kontext (Vielteilchentheorie, Materialwissenschaften) gibt es durchaus Lagrangetheorien für Felder, die sowohl nichtlokale Terme als auch Ableitungen höherer Ordnung enthalten.

Die lassen sich dann aber nicht relativistisch verallgemeinern. In einer relativistischen Formulierung muss man Lokalität fordern, da man für nichtlokale Theorien einen Gleichzeitigkeitsbegriff braucht, und Raum und Zeit gehen in gleicher Weise ein.

• Relativistische Lagrangemechanik von Feldern $\Phi_\alpha(x)$

Relativistische Verallgemeinerung diesmal ganz natürlich:

$$I = \underbrace{\frac{1}{c} \int d^4x}_{\int dt \int d^3r} \mathcal{L}(\Phi_\alpha(x), \partial_\mu \Phi_\alpha(x))$$

(b) Dynamische Gleichungen

Ergeben sich wie üblich daraus der Minimierung der Wirkung I

• Nichtrelativistische Punktteilchen (Erinnerung)

$$\begin{aligned} I[q_i] &= \int_{t_0}^{t_1} dt L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) \text{ minimal} \\ (I[q_i] \text{ ist ein } \underline{\text{Funktional}} \text{ der Funktionen } q_i(t)) \\ \Rightarrow \delta I &= I[q_i(t) + \delta q_i(t)] - I[q_i(t)] = 0 + \mathcal{O}(\delta q^2) \\ &\text{für alle Variationen } \delta q_i(t) \text{ mit } \delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0 \\ \Rightarrow \cdot &\Rightarrow \underline{\text{Lagrangegleichungen 2. Art:}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \end{aligned}$$

• Felder (gleich relativistisch)

$$\begin{aligned} I[\Phi_\alpha(x)] &= \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha) \text{ minimal} \\ \Rightarrow \delta I &= I[\Phi_\alpha(x) + \delta \Phi_\alpha(x)] - I[\Phi_\alpha(x)] = 0 + \mathcal{O}(\delta \Phi^2) \text{ für alle Variationen } \\ &\delta \Phi_\alpha(x), \text{ die am Rand des Integrationsgebietes verschwinden.} \\ \Rightarrow \delta I &= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\mathcal{L}(\Phi_\alpha + \delta \Phi_\alpha, \partial_\mu (\Phi_\alpha + \delta \Phi_\alpha)) - \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} \delta \Phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \partial_\mu (\delta \Phi_\alpha) \right\} \quad \left| \begin{array}{l} \text{partielle Integration} \\ \text{Gaußscher Satz} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \right) \right\} \delta \Phi_\alpha \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow &\underline{\text{Euler-Lagrange-Gleichungen:}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} = 0}$$

NB: Ergebnis für Felder völlig analog dem der Punktmechanik mit Korrespondenz $q_i \leftrightarrow \Phi_\alpha(x)$, $\frac{d}{dt} \cdot \leftrightarrow \partial_\mu \cdot$ (also $\dot{q}_i \leftrightarrow \partial_\mu \Phi_\alpha$ etc.)

(c) Kanonischer Impuls, Hamiltondichte, und Energie-Impuls-Tensor

• Nichtrelativistisches Punktteilchen

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \mathcal{H} = \sum_i P_i \dot{q}_i - L$$

• Verallgemeinerung für Felder

$$\text{Kanonische konjugiertes Impulsfeld: } \Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi_\alpha)}$$

$$\text{Hamiltondichte: } \mathcal{H} = \sum_\alpha \Pi^\alpha (\partial_0 \Phi_\alpha) - \mathcal{L} \quad \Rightarrow \text{keine Vierergröße!}$$

- Einbettung: Kanonischer Energie-Impuls-Tensor

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Phi_{\alpha})} (\partial^{\nu} \Phi_{\alpha}) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{Vierertensor})$$

Dann ist

- Hamiltondichte $\mathcal{H} = \mathcal{T}^{00}$
- Falls \mathcal{L} nicht explizit von x abhängt, gilt eine Kontinuitätsgleichung $\partial_{\mu} \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ (Übungsaufgabe; mehr dazu siehe 3.4.1)

3.2.2 Lagrangedichte für freie elektromagnetische Felder

Ziel: Konstruktion eines Lagrangeformalismus für (geladene) Teilchen und Felder; nach Möglichkeit wieder wie in 2.4.3.3 aus Symmetrieüberlegungen.

Beginne zunächst mit einfacherem Fall: Leerer Raum ohne Teilchen

→ Konstruiere Lagrange-Dichte nur für Felder A^{μ}

- * Forderungen: Lagrangedichte der Form $\mathcal{L}(A^{\mu}, \partial^{\mu} A^{\nu})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(0) Analytisch im Definitionsbereich

→ nur ganzzahlige Potenzen von A^{μ} , $\partial^{\mu} A^{\nu}$

(da $A = 0, \partial_{\mu} A = 0$ im Definitionsbereich liegt.

Im Fall der Lagrangefunktion für freie Teilchen war die Verwendung der Wurzel $\sqrt{\frac{dx_{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}}$ erlaubt, da wegen $u_{\mu} u^{\mu} = c^2$ im Definitionsbereich von $\frac{dx}{d\lambda}$ der Wert $\frac{dx}{d\lambda} = u \frac{d\tau}{d\lambda} = 0$ nicht enthalten ist!)

(i) Lorentzinvariant

$I = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}$ ist Viererskalar

Volumenelement d^4x invariant unter Lorentztransformationen

(für Lorentztransformationen Λ ist die Jacobi-Matrix $|\det(\Lambda)| = 1$)

⇒ \mathcal{L} muss ein Viererskalar sein!

(ii) Maximal bilinear in A_{μ} , $\partial_{\mu} A_{\nu}$ (→ möglichst einfache Theorie)

\mathcal{L} bilinear in $\partial_{\mu} A_{\nu}$ ⇒ Bewegungsgleichung ist lineare Gleichung

(iii) Eichinvarianz

Euler-Lagrange-Gleichungen invariant unter $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \Lambda(x)$

- * Folgerungen aus (0-ii): Mögliche Viererskalare sind:

$$A_{\mu} A^{\mu}, \partial_{\mu} A^{\mu}, (\partial_{\mu} A^{\mu})^2, (\partial_{\mu} A_{\nu})(\partial^{\mu} A^{\nu}), (\partial_{\mu} A_{\nu})(\partial^{\nu} A^{\mu})$$

Aber: Viele Terme fallen weg wegen der Forderung nach Eichinvarianz

- $A_{\mu} A^{\mu}$ ist nicht eichinvariant, denn:

Beitrag zu \mathcal{L} hätte die Form $\mathcal{L}_A = \frac{b}{2} A_{\mu} A^{\mu}$

⇒ Beitrag zu den Bewegungsgleichungen hätte die Form

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})} - \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_{\nu}} = -b A^{\nu}$$

Eichtransformation: $-b A^{\nu} \rightarrow -b(A^{\nu} + \partial^{\nu} \Lambda) \neq -b A^{\nu} \Rightarrow$ verboten!

- Terme $\partial_\mu A^\mu$ und $(\partial_\mu A^\mu)^2$ dürfen für die Bewegungsgleichungen keine Rolle spielen, da sie in der Lorenzgleichung verschwinden
→ können weggelassen werden.
- Übrig bleiben Terme $(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$, $(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$
Allgemeinste Form von \mathcal{L} wäre: $\mathcal{L} = \frac{b_1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{b_2}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)$
→ Bewegungsgleichungen dazu (Übungsaufgabe)
 $0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \dots = b_1 \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu) + b_2 \partial_\mu(\partial^\nu A^\mu)$
Eichtransformation: Nach Transformation $A_\tau \rightarrow A_\tau + \partial_\tau \Lambda$
erhält man $0 = b_1 \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu) + b_2 \partial_\mu(\partial^\nu A^\mu) + (b_1 + b_2) \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu \Lambda$
→ nur eichinvariant, wenn $b_1 + b_2 = 0$ bzw. $b_1 = -b_2!$
⇒ $\mathcal{L} = \frac{b_1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \partial_\mu A_\nu(\partial^\nu A^\mu)]$
 $= \frac{b_1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{b_1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
⇒ Zusammen erhält man für freie Felder die Lagrangedichte:
 $\mathcal{L} = \frac{b_1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{b_1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$ (letzteres durch Einsetzen)

* Vorfaktor

- Vorzeichen von b_1 : Negativ, damit Energie nach unten beschränkt ist.
Dazu Vorgriff auf 3.4.3: Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch die Komponente \mathcal{T}_M^{00} , des Maxwellischen Tensorfeldes \mathcal{T}_M (eichinvarianter Anteil des Energie-Impuls Tensors $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ aus 3.2.1 c))
Berechnung (nach 3.4.2) ergibt $\mathcal{T}_M^{00} = -\frac{b_1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$
⇒ $u = \mathcal{T}_M^{00}$ ist nur für $b_1 < 0$ nach unten beschränkt.
- Zahlenwert: Beliebig, wird Einheit der Ladung festlegen.
Konkret im Gaußschen Maßsystem: $b_1 = -\frac{1}{4\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)}$$

3.2.3 Erweiterung: Wechselwirkung mit Materie

Nächster Schritt: Lagrangedichte so erweitern, dass auch der Einfluss von Ladungen auf Felder beschrieben wird.

Dazu: Zurück zu 3.1: Falls die Ladung auf einem Punktteilchen sitzt (mit Trajektorie $\bar{x}(\lambda)$), ist die Wirkung der Kopplung zwischen Teilchen und Feldern schon bekannt: $I_{\text{Kopplung}} = \int d\lambda \left[-\frac{q}{c} A^\mu(\bar{x}) \frac{d\bar{x}_\mu}{d\lambda} \right]$

Umschreiben dieses Ausdrucks als Integral über eine Dichte:

$$I_{\text{Kopplung}} = -\frac{1}{c} \int d^4x A^\mu(x) \underbrace{\left\{ q \int d\lambda \frac{d\bar{x}_\mu}{d\lambda} \delta^{(4)}(x - \bar{x}(\lambda)) \right\}}_{\text{unabhängig von Parametrisierung } \lambda} =: -\frac{1}{c^2} \int d^4x A^\mu(x) J_\mu(x)$$

⇒ Kopplung des Viererpotentials an einen Viererstrom J_μ

Konkret: Wähle z.B. Parametrisierung $\lambda \equiv ct'$ und notiere $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\Rightarrow J^\mu(x) = qc \int dt' \frac{d}{dt'} \left(\frac{ct'}{r} \right) \delta^{(4)}(x - \bar{x}(t'))$$

$$= qc \int dt' \left(\frac{c}{\vec{v}(t')} \right) \delta(ct - ct') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}(t')) = q \left(\frac{c}{\vec{v}(t)} \right) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}(t))$$

Verallgemeinerung für beliebige Ladungs- und Stromverteilung

$$\boxed{J^\mu(x) = \begin{pmatrix} c\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) \end{pmatrix}} \quad \begin{array}{l} \text{Ladungsdichte} \\ \text{Stromdichte} \end{array}$$

wobei sich $(c\rho, \vec{j})$ wie ein Vierervektor transformieren muss.

Fazit: Gesamte Lagrangedichte für Feld mit Ladungen

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{Materie}}},$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{Materie}}$ unabhängig von den Feldern $A^\mu(x)$ ist.

Beispiel: Punktladung, Trajektorie $\bar{x}(\lambda)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{Materie}} = -mc^3 \int d\lambda \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}} \delta^{(4)}(x - \bar{x}(\lambda))$$

Freiheitsgrade insgesamt wären dann $\bar{x}(\lambda), A^\mu(x)$

Diese Kombination der Beschreibung von Materie und Feldern über Punktteilchen- und Feld-Freiheitsgrade ist noch etwas unbefriedigend. Lösung in der Quantenfeldtheorie: Einheitliche Beschreibung aller Freiheitsgrade, – auch der Materie – durch Felder

3.2.4 Dynamische Gleichungen

Leite nun aus Lagrangedichte dynamische Gleichungen für die Felder A_μ her.

(Gleichungen für Materie: Für Punktteilchen in 3.1.1 erledigt.)

Für Materiefelder: Brauche expliziten Ausdruck für $\mathcal{L}_{\text{Materie}}$)

Euler-Lagrange-Gleichungen (nach 3.2.1 b))

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Materie}}}_{\text{unabhängig von } A}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 2((\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)) \\ &= 2(\partial_\mu A_\nu)(g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\nu\sigma} g^{\mu\tau})(\partial_\sigma A_\tau) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] &= 2 \left\{ \underbrace{(g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} - g^{\beta\sigma} g^{\alpha\tau})}_{\text{Beitrag } \mu=\alpha, \nu=\beta} \partial_\sigma A_\tau + \partial_\mu A_\nu \underbrace{(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta})}_{\text{Beitrag } \sigma=\alpha, \tau=\beta} \right\} \\ &= 4(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) = 4F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\text{Weiterhin gilt: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} J^\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta}$$

Anmerkung: Kanonische Impulsdichte (nach 3.2.1 c))

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0$$

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} = \frac{1}{4\pi} E_i$$

→ keine direkt ersichtliche physikalische Bedeutung

Allerdings hat der kanonische Energie-Impuls-Tensor eine Bedeutung, mehr dazu siehe 3.4.

3.2.5 Zusammenfassung und Diskussion

- * "Herleitung" der Lagrangedichte für Felder im Wesentlichen aus den beiden Forderungen Lorentzkovarianz und Eichinvarianz, und der Forderung, dass Terme maximal zweiter Ordnung in A und ∂A sein sollen.

Daraus ergab sich bis auf Vorfaktoren die Form der Lagrange-Dichte. Die Vorfaktoren legen im Wesentlichen Einheiten fest. Im Gaußschen Maßsystem folgt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{Materie}}$$

- * In der Notation von 1.1.1 erhält man für andere Maßsysteme die Gleichungen

$$\mathcal{L} = -\frac{k_1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{Materie}} \quad \text{mit dem Feldstärketensor}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -k_2 B_z & k_2 B_y \\ E_y & k_2 B_z & 0 & -k_2 B_x \\ E_z & -k_2 B_y & k_2 B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } k_1, k_2 \text{ vom Maßsystem abhängen} \\ (k_1 = k_2 = 1 \text{ im Gaußschen Maßsystem})$$

- * Ohne die Forderung nach Eichinvarianz wären zusätzliche Terme möglich:

- Ein Term $\sim A_\mu A^\mu$: Masseterm

→ Photonen sind masselos als Folge der Eichinvarianz.

Direkte Konsequenz: Elektromagnetische Potentiale fallen wie $1/r$ ab. Wenn Photonen eine Masse hätten, würden sie exponentiell abfallen (Übungsaufgabe)

Begründung, warum m etwas mit Masse zu tun hat, ist an dieser Stelle leider noch nicht möglich → Verweis auf Quantenmechanik bzw. Quantenfeldtheorie.

- Zusätzliche Terme in Ableitungen von A , z.B. $\sim (\partial_\mu A^\mu)^2$

Die Tatsache, dass diese fehlen, hängt damit zusammen, dass das Feld A_μ Teilchen mit Spin 1 beschreibt. Die zusätzlichen Terme würden de facto ein zusätzliches skalares Feld $\Phi = (\partial_\mu A^\mu)$ (mit Spin 0) einführen.

Auch hier muss für die Begründung dieser Behauptung wieder auf die Quantenfeldtheorie verwiesen werden.

- Wenn die Ladung erhalten sein soll, können jedoch nicht beide Arten Zusatztermen gleichzeitig auftreten: Falls eine Kontinuitätsgleichung für die Ladung gilt ($\partial_\mu J^\mu = 0$), wäre in einer Theorie für massive Photonen automatisch $\partial_\mu A^\mu = 0$ (Übungsaufgabe).

- * Zur Frage nach potentiellen Zusatztermen höherer Ordnung in ∂A :

→ Dann wäre die Bewegungsgleichung für A nicht mehr linear, entspricht einer Kopplung zwischen Feldern: Die Lösung lässt sich nicht mehr als Superposition von linear unabhängigen Basislösungen zusammensetzen.

Im Prinzip möglich, dann würde man allerdings nicht mehr von freien, sondern von wechselwirkenden Feldern sprechen.

3.3 Die Maxwell-Gleichungen

Aus den Ergebnissen des vorigen Kapitels ergeben sich dynamische Gleichungen für die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} : Die Maxwell-Gleichungen.

Sollen wegen ihrer zentralen Bedeutung für die Elektrodynamik und diese Vorlesung noch einmal gründlicher diskutiert werden.

Man kann zwischen zwei Kategorien von Gleichungen unterscheiden

- (i) Gleichungen, die sicherstellen, dass $F_{\mu\nu}$ sich aus einem Viererpotential gemäß $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ableiten lässt: → homogene Maxwell-Gleichungen
- (ii) Euler-Lagrange-Gleichungen: → inhomogene Maxwell-Gleichungen

Sollen nun in verschiedenen Notationen zusammengestellt werden

(a) Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen über Feldstärketensor

(i) Homogene Gleichungen

Die Bedingung dafür, dass es ein Feld A_μ gibt mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

lautet $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$ Jacobi-Identität

(notwendig: klar; hinreichend: am einfachsten komponentenweise später bei c)

(ii) Inhomogene Gleichungen gemäß 3.2.4 $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$

(b) Kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen über Viererpotential

(i) Homogene Gleichungen: Automatisch erfüllt

(ii) Inhomogene Gleichungen: Einsetzen von $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ in (a ii):

$$\Rightarrow \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (\square = \partial_\mu \partial^\mu)$$

Speziell Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \square A = \frac{4\pi}{c} J$

(c) Maxwell-Gleichungen in Komponentenschreibweise

Überprüfe noch, dass die oben angegebenen Gleichungen tatsächlich die bekannten Maxwell-Gleichungen aus Kapitel 1 sind

(i) Homogene Gleichungen

Forderung $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ lautet in Komponentenschreibweise:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\Leftrightarrow 0 = \nabla \cdot \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \nabla \Phi \quad (\Leftrightarrow -\nabla \Phi = (\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}) \Leftrightarrow \nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}) = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \nabla \cdot \vec{B} \\ 0 = \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \end{cases} \rightarrow \text{homogene Maxwell-Gleichungen gemäß 1.1.1}$$

Diese Gleichungen entsprechen genau der Jacobi-Identität aus (a) (check durch Einsetzen)

(ii) Inhomogene Gleichungen

Ergeben sich aus (a) mittels $\partial_\alpha = (\frac{1}{c}\partial_t, \nabla)$, $J^\alpha = (c\rho, \vec{j})$ und der Komponentenschreibweise für $F^{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 4\pi\rho = \nabla \cdot \vec{E} \\ \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} \end{array}} \rightarrow \text{inhomogene Maxwell-Gleichungen} \\ \text{gemäß 1.1.1}$$

Dazu kommt noch für Materie (Punktteilchen) die Lorentzkraft (vgl. 3.1.2)

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}))}$$

3.4 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Aus der Vorlesung "Analytische Mechanik" wissen wir, dass Symmetrien eng mit Erhaltungsgrößen verknüpft sind. Ein Vorteil des Lagrange-Formalismus liegt darin, dass er solche Zusammenhänge sichtbar macht.

In diesem Kapitel sollen diese Zusammenhänge für den Lagrangedichte-Formalismus und speziell für die Elektrodynamik genauer untersucht werden.

3.4.1 Noether-Theorem in der Feldtheorie

* Erinnerung: Klassische Punktmechanik:

Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ sei quasi-invariant unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation $q_i \rightarrow \tilde{q}_i[a_\beta]$ mit $\tilde{q}_i[a_\beta]|_{a=0} = q_i$, d.h. sie sei invariant bis auf eine totale Zeitableitung: $L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}D(q, t)$

→ Es gibt eine Erhaltungsgröße $J_\beta = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\tilde{q}_i}{da_\beta} \right) - \frac{\partial D}{\partial a_\beta} \right]_{a=0}$ ($a=0$ entspricht $a_\alpha=0 \forall \alpha$)

* Noether-Theorem der Feldtheorie:

Erhaltungssatz wird ersetzt durch Kontinuitätsgleichung.

Konkret: Gegeben sei eine kontinuierliche Symmetrietransformation (mit kontinuierlichen Parametern a_β), die auf die Felder Φ oder auf die Viererkoordinaten x , evtl. auch auf beide wirkt.

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}[a_\beta] \text{ mit } \tilde{\Phi}[a_\beta]|_{a=0} = \Phi, \quad x \rightarrow \tilde{x}[a_\beta] \text{ mit } \tilde{x}[a_\beta]|_{a=0} = x.$$

Unter dieser Transformation sei $\boxed{d^4x \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha)}$ invariant.

Dann gibt es einen lokal erhaltenen "Noether-Strom" $J^{\mu\beta}$

$$\boxed{J^{\mu\beta} = \left[\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} (\partial^\nu \Phi_\alpha) - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right] \left(\frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial a_\beta} \right)_{a=0} - \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_\alpha}{\partial a_\beta} \right)_{a=0}}$$

Lokal erhalten heißt: Es gilt eine Kontinuitätsgleichung $\boxed{\partial_\mu J^{\mu\beta} = 0}$.

Beweis-Skizze

Variiere a_β , so dass $a_\beta = \delta a_\beta \rightarrow 0$, alle anderen Komponenten $a_\gamma = 0$

$$\rightarrow \bullet \delta x_\nu = \frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial a_\beta} \delta a_\beta, \quad \delta \Phi_\alpha = \frac{\partial \tilde{\Phi}_\alpha}{\partial a_\beta} \delta a_\beta$$

Definiere $\delta' \Phi_\alpha = \tilde{\Phi}_\alpha(x) - \Phi_\alpha(x)$, $\delta' \partial_\mu \Phi_\alpha = \partial_\mu \tilde{\Phi}_\alpha(x) - \partial_\mu \Phi_\alpha(x) = \partial_\mu \delta' \Phi_\alpha$

$$\Rightarrow \delta \Phi_\alpha = [\tilde{\Phi}_\alpha(\tilde{x}) - \tilde{\Phi}_\alpha(x)] + [\tilde{\Phi}_\alpha(x) - \Phi_\alpha(x)] = (\partial_\nu \tilde{\Phi}_\alpha) \delta x^\nu + \delta' \Phi_\alpha$$

$$\approx (\partial_\nu \tilde{\Phi}_\alpha) \delta x^\nu + \delta' \Phi_\alpha \quad (\text{in linearer Ordnung von } \delta a)$$

$$\bullet \delta \mathcal{L} = \underbrace{[\mathcal{L}(\tilde{\Phi}(\tilde{x}), \partial_\mu \tilde{\Phi}(\tilde{x})) - \mathcal{L}(\tilde{\Phi}(x), \partial_\mu \tilde{\Phi}(x))]}_{(\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu} + \underbrace{[\mathcal{L}(\tilde{\Phi}(x), \partial_\mu \tilde{\Phi}(x)) - \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))]}_{\sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} \delta' \Phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \delta' (\partial_\mu \Phi_\alpha) \right)}$$

$$= (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + \sum_\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \delta' \Phi_\alpha \right) + \sum_\alpha \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \right)}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange)}} \delta' \Phi_\alpha$$

$$\bullet d^4 \tilde{x} = d^4 x \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| = d^4 x \left| \det (\partial_\nu (x^\mu + \delta x^\mu)) \right| = d^4 x \left| \det (\mathbb{1} + \partial_\nu \delta x^\mu) \right|$$

$$\approx d^4 x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) \quad (\text{ausschreiben und lineare Terme in } \delta x \text{ sammeln})$$

Invarianzforderung: $d^4 x \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha) = d^4 \tilde{x} \mathcal{L}(\tilde{\Phi}_\alpha, \partial_\mu \tilde{\Phi}_\alpha)$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{!}{=} d^4 x \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha) - d^4 \tilde{x} \mathcal{L}(\tilde{\Phi}_\alpha, \partial_\mu \tilde{\Phi}_\alpha) = d^4 x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}) - d^4 x \mathcal{L}$$

$$= d^4 x \left[\mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) + \delta \mathcal{L} \right] = d^4 x \left[\mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu + \sum_\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \delta' \Phi_\alpha \right) \right]$$

$$= d^4 x \left[\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu + \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \delta' \Phi_\alpha) \right]$$

$$\left| \begin{array}{l} \delta' \Phi_\alpha = \delta \Phi_\alpha - (\partial^\nu \Phi_\alpha) \delta x_\nu \\ \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_\alpha, \partial_\mu \Phi_\alpha) - \mathcal{L}(\tilde{\Phi}_\alpha, \partial_\mu \tilde{\Phi}_\alpha) \end{array} \right.$$

$$= d^4 x \left[\partial_\mu \left(\mathcal{L} g^{\mu\nu} - \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} (\partial^\nu \Phi_\alpha) \right) \delta x_\nu + \partial_\mu \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \delta \Phi_\alpha \right]$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \text{ f\u00fcr alle } \delta a \text{ und daraus folgende } \delta x, \delta \Phi$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left\{ \left[\mathcal{L} g^{\mu\nu} - \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} (\partial^\nu \Phi_\alpha) \right] \left(\frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial a_\beta} \right)_{a=0} + \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_\alpha}{\partial a_\beta} \right)_{a=0} \right\} = 0 \checkmark$$

Folgerung:

Wenn $J^{i\beta}$ ($i = 1, 2, 3$) im Unendlichen verschwindet, gibt es eine "zeitliche" Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe: $P^\beta := \int d^3 r J^{0\beta} = \int d\Sigma_\mu J^{\mu\beta} = \text{const.}$

Hier ist $\int d\Sigma_\mu$ ein Integral \u00fcber beliebige raumartige Hyperfl\u00e4che.

(Denn: (i) Erhaltungsgr\u00f6\u00dfe: $\partial_t P^\beta = \partial_t \int d^3 r J^{0\beta} = - \int d^3 r \partial_i J^{i\beta} = - \int dA_i J^{i\beta} = 0 \checkmark$

(ii) P^β unabh\u00e4ngig von der Wahl der Hyperfl\u00e4che: W\u00e4hle Integrationsvolumen Ω so, dass es auf einer Seite von der Hyperfl\u00e4che, auf der anderen Seite von einer Fl\u00e4che $t \equiv t_0$, und seitlich von zeitartigen Hyperfl\u00e4chen mit $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ begrenzt wird. Wende vierdimensionalen Gau\u00df'schen Satz an

$$\Rightarrow 0 = \int_\Omega d^4 x (\partial_\mu J^{\mu\beta}) = \int d\Sigma_\mu J^{\mu\beta} - \int d^3 r J^{0\beta}(t_0, \vec{r}) = \int d\Sigma_\mu J^{\mu\beta} - P^\beta \checkmark$$

NB: Konkret sei parametrisierte Hyperfl\u00e4che gegeben als $x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Dann ist $\int d\Sigma_\mu \dots = \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \left| \det \left(n, \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \right) \right| n_\mu \dots$

wobei n : Normalenvektor ($n_\mu n^\mu = 1$ und $(n_\mu \frac{\partial x}{\partial \xi_i} = 0 \forall i)$)

Beispiel: Translationsinvarianz

Symmetrietransformation: $x \rightarrow \tilde{x} = x + a \Rightarrow \left(\frac{\partial \tilde{x}_\nu}{\partial a_\beta} \right) = \delta_{\nu\beta}$, $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_\alpha}{\partial a_\beta} \right) = 0$

\Rightarrow Noether-Strom entspricht dem Energie-Impuls-Tensor (vgl. 3.2.1)

$$J^{\mu\beta} = \left[\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_\alpha)} (\partial^\beta \Phi_\alpha) - g^{\mu\beta} \mathcal{L} \right] = \mathcal{T}^{\mu\beta}$$

\Rightarrow Nachtr\u00e4gliche Rechtfertigung des Namens "Energie-Impuls-Tensor"

(NB: Herleitung der Kontinuit\u00e4tsgleichung ist auch direkt, ohne Noethertheorem m\u00f6glich \rightarrow \u00dcbungsaufgabe)

3.4.2 Eichinvarianz

Spezielle Symmetrie in der Elektrodynamik

* Direkter Zugang ohne Noether-Theorem

Lagrangedichte kann Eichtransformation unterzogen werden

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, ohne dass sich Bewegungsgleichungen ändern

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{c} J^\mu \partial_\mu \Lambda$$

Folge für Wirkung $I = \int d^4x \mathcal{L}$

$$I \rightarrow I' = I - \frac{1}{c^2} \int d^4x J^\mu \partial_\mu \Lambda = I - \frac{1}{c^2} \int d^4x \Lambda \partial_\mu J^\mu + \underbrace{\frac{1}{c^2} \int d\Sigma_\mu (\Lambda J^\mu)}_{\text{Oberflächenterm}}$$

Oberflächenterme haben keinen Einfluss auf Euler-Lagrange-Gleichungen

⇒ Damit Bewegungsgleichungen für alle Λ invariant bleiben, muss für den an A koppelnden Viererstrom gelten: $\partial_\mu J^\mu = 0$

Fazit: Eichinvarianz ist nur dann gegeben, wenn die Ladung erhalten ist bzw. der Viererstrom eine Kontinuitätsgleichung erfüllt.

* Zugang über Noether-Theorem

Dazu muss auch Materie über Materiefelder $\psi(x)$ beschrieben werden

⇒ Vorgriff auf Quantenmechanik bzw. Quantenfeldtheorie nötig

Ausgangspunkt: Lagrangedichte für komplexe Materiefelder ψ, ψ^*

$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*)$ (ψ, ψ^* sind unabhängige Freiheitsgrade):

Beispiel: Schrödingergleichung (evtl. bereits bekannt)

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi \text{ bzw. } -i\hbar \partial_t \psi^* = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi^*$$

läßt sich als Feldtheorie auffassen mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 (\partial_i \psi)^* (\partial_i \psi) + i\hbar c \psi^* \partial_0 \psi - V \psi^* \psi$$

(nicht kovariant, da nichtrelativistische Theorie)

Relativistische Theorien: Klein-Gordon-Gleichung, Dirac-Gleichung

Symmetrietransformation: "globale Eichtransformation"

Globaler Phasenfaktor $\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi e^{\frac{i}{\hbar} a}$, $\psi^* \rightarrow \tilde{\psi}^* = \psi^* e^{-\frac{i}{\hbar} a}$,

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} = \frac{i}{\hbar} \psi, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial a} = -\frac{i}{\hbar} \psi^*, \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial a} = 0$$

Noetherstrom: $J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}^*}{\partial a} \right) = -\frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} + c.c.$

Beispiel: Schrödingergleichung: $J = (J^0, \vec{j})$ mit

$$J^0 = -\frac{1}{\hbar} \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} + \frac{1}{\hbar} \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} = -\frac{i}{\hbar} \psi (i\hbar c \psi^*) = c|\psi|^2$$

$$\vec{j} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi)^* - \frac{i}{\hbar} \psi^* \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi) = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*)]$$

$$\Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \text{ bzw. } \partial_t |\psi|^2 = -\nabla \cdot \vec{j}$$

Erweiterung: "Lokale Eichtransformation" $\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \psi(x) e^{\frac{ie}{\hbar c} \Lambda(x)}$

muss mit einer Umwicklung $\partial_\mu \psi \rightarrow (\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} (\partial_\mu \Lambda)) \tilde{\psi}$ einhergehen.

⇒ Motiviert Definition einer verallgemeinerten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \text{ mit "Eichfeldern" } A_\mu(x)$$

→ Alternativer Weg, Eichfelder A_μ einzuführen (vgl. 3.1.1)

3.4.3 Maxwell'sches Tensorfeld

Komme wieder auf Energie-Impuls Tensor zurück (vgl. 3.2.1 c und 3.4.1)

* Freies Feld

Berechnung des Energie-Impuls Tensors gibt (Übungsaufgabe)

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\tau)} (\partial^\nu A^\tau) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \dots = -\frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\tau (\partial^\nu A^\tau) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Es gilt Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ (3.4.1)

Aber: $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ ist nicht eichinvariant!

Abhilfe: Extrahieren des eichinvarianten Beitrags: $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}_M^{\mu\nu} + \mathcal{T}_D^{\mu\nu}$

$$\text{mit } \mathcal{T}_D^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\tau \partial^\tau A^\nu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\tau} \partial_\tau A^\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\tau\mu} \partial_\tau A^\nu \stackrel{\partial_\tau F^{\tau\mu}=0}{=} \frac{1}{4\pi} \partial_\tau (F^{\tau\mu} A^\nu)$$

$$\text{und } \boxed{\mathcal{T}_M^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F^\mu{}_\tau F^{\tau\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau})} \quad \text{Maxwell'sches Tensorfeld}$$

Für $\mathcal{T}_D^{\mu\nu}$ gilt $\partial_\mu \mathcal{T}_D^{\mu\nu} = 0$

$$(\partial_\mu \partial_\tau (F^{\tau\mu} A^\nu)) \stackrel{\partial_\tau F^{\tau\mu}=0}{=} \partial_\mu F^{\tau\mu} \partial_\tau A^\nu = 0, \text{ da } F^{\mu\nu} \text{ antisymmetrisch:}$$

$$F^{\tau\mu} \partial_\mu \partial_\tau A^\nu = F^{\tau\mu} \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\tau + \partial_\tau \partial_\mu) A^\nu = \frac{1}{2} (F^{\tau\mu} + F^{\mu\tau}) \partial_\mu \partial_\tau A^\nu = 0$$

Damit gilt auch für den eichinvarianten Beitrag $\mathcal{T}_M^{\mu\nu}$, dass $\partial_\mu \mathcal{T}_M^{\mu\nu} = 0$

* Feld bei Anwesenheit von Ladungen

Kontinuitätsgleichung für $\mathcal{T}_M^{\mu\nu}$ gilt nicht mehr, aber

$$\boxed{\partial_\mu \mathcal{T}_M^{\mu\nu} + \frac{1}{c} F^{\nu\tau} J_\tau = 0}$$

Zweiter Term beschreibt Austausch von Energie/Impuls mit Materie

$$\begin{aligned} (\text{Rechnung: } \partial_\mu \mathcal{T}_M^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \{ \partial_\mu g_{\sigma\tau} (F^{\mu\sigma} F^{\tau\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\mu g^{\mu\nu} (F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau}) \} \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ g_{\sigma\tau} (F^{\tau\nu} \partial_\mu F^{\mu\sigma} + F^{\mu\sigma} \partial_\mu F^{\tau\nu}) + \frac{1}{2} (F_{\sigma\tau} \partial^\nu F^{\sigma\tau}) \} \\ &\quad | \quad \text{Inhomogene Maxwellgleichung} \\ &= \frac{1}{c} g_{\sigma\tau} F^{\tau\nu} J^\sigma + \frac{1}{4\pi} \{ F_{\mu\tau} \partial^\mu F^{\tau\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\tau} \partial^\nu F^{\mu\tau} \} \\ &\quad | \quad \text{Homogene Maxwellgleichung } \partial^\nu F^{\mu\tau} = -\partial^\mu F^{\tau\nu} - \partial^\tau F^{\nu\mu} \\ &= \frac{1}{c} F^{\tau\nu} J_\tau + \frac{1}{8\pi} \underbrace{F_{\mu\tau} \partial^\mu F^{\tau\nu} - F_{\tau\mu} \partial^\mu F^{\nu\tau}}_{=0} = -\frac{1}{c} F^{\nu\tau} J_\tau \quad \checkmark \end{aligned}$$

* Konkret: Komponentenschreibweise

Zusammenstellung aller Elemente des Maxwell'schen Feldtensors ($i = 1-3$)

$$\mathcal{T}_M^0{}_0 = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) =: u(\vec{r}, t)$$

$$\mathcal{T}_M^0{}_i = -\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i =: -cg_i(\vec{r}, t)$$

$$\mathcal{T}_M^i{}_0 = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i =: \frac{1}{c} S_i(\vec{r}, t)$$

$$\mathcal{T}_M^k{}_i = \frac{1}{4\pi} (E_k E_i + B_k B_i - \frac{1}{2} \delta_{ki} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)) =: \vec{T}$$

Energiedichte

Impulsdichte

Poynting-Vektor, Energiefluss

Maxwell'scher Spannungstensor

⇒ Erhalte wieder die aus 1.1.3 bekannten Größen

Bilanzgleichungen (vgl. wieder 1.1.3)

Aus $\partial_\mu \mathcal{T}_M^{\mu\nu} + \frac{1}{c} F^{\nu\tau} J_\tau = 0$ folgert man komponentenweise:

$$\partial_t u + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{Poyntingsches Theorem (vgl. 1.1.3.1)}$$

Interpretation: Betrachte dazu Integrale über Volumenelemente

$$\int d^3r \partial_t u = \frac{d}{dt} \int d^3r u = \frac{dE_{\text{Feld}}}{dt}: \text{Änderung der Feldenergie}$$

$$\int d^3r \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{d}{dt} W_{\text{mech}}: \text{Mechanische Arbeit gegen das Feld}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (E_{\text{Feld}} + W_{\text{mech}}) = - \int d^3r \nabla \cdot \vec{S} = - \int d\vec{A} \cdot \vec{S}$$

$\leadsto \vec{S}$ entspricht einem Energiefluss

$$\rho \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{T} = 0 \quad \text{Impulsbilanzgleichung (vgl. 1.1.3.2)}$$

$\underbrace{\rho \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B})}_{\text{Kraftdichte der Lorentzkraft}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}}_{\text{Änderung des Feldimpulses}} - \nabla \cdot \vec{T} = 0$

Interpretation: $\vec{T} \hat{=} \text{Strahlungsdruck}$

$$\int \sum_i dA_i T^{ij} = - \frac{d}{dt} [\text{Gesamtimpuls Teilchen und Felder}]$$

3.5 Lösen der Wellengleichung

Zum Abschluss: Schließe den Bogen zu 1.6 und finde allgemeine Lösung der Maxwellgleichung für feste Viererstrom-Verteilung

→ Kovariante Form der Greenschen Funktion aus 1.6.1

(NB: Richtig spannend wird es natürlich, wenn gleichzeitig für A^μ und Materiefreiheitsgrade gelöst wird)

3.5.1 Kovariante Greensche Funktion

Ausgangspunkt: Maxwellgleichungen in kovarianter Form gemäß 3.3 b) und in

$$\text{Lorentz-Eichung: } \square A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} J^\mu(x) \text{ mit } \partial_\mu A^\mu = 0$$

→ Komponentenweise entkoppelte Gleichungen der Form $\square \psi(x) = 4\pi F(x)$

Lösungsverfahren

* Lösung setzt sich zusammen aus Lösungen der homogenen Wellengleichung $\square \psi = 0 \rightarrow \psi(x) \sim e^{\pm i k x}$ mit $k_\mu k^\mu = 0$ (vgl. 1.5.1) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung $\square \psi(x) = 4\pi F(x)$

* Um inhomogene Lösung zu ermitteln, löse zunächst die Gleichung $\square G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$

* Aus $G(x, x')$ kann eine Lösung der inhomogenen Gleichung konstruiert werden:

$$\psi(x) = 4\pi \int d^4 x' G(x, x') F(x')$$

$$\text{bzw. } A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4 x' G(x, x') J^\mu(x')$$

Greensche Funktion im unendlich ausgedehnten Raum

- Wegen Translationssymmetrie gilt $G(x, x') = G(x - x')$
- Fouriertransformation $x \rightarrow k : f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k f(k) e^{-ikx}$
- Gleichung $\square G(x) = \delta^{(4)}(x)$ geht über in $-k_\mu k^\mu G(k) = 1$
 $\Rightarrow G(k) = -1/k^2$ (mit $k^2 := k_\mu k^\mu$)
- Rücktransformation: $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k G(k) e^{-ikx}$
- Zwei mögliche Lösungen:

retardiert:	$G_{\text{ret.}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0) \delta(x^2)$
avanciert	$G_{\text{av.}}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(-x_0) \delta(x^2)$

Kovarianter Ausdruck, da $\theta(x_0)$ lorentzinvariant ist

(Rechnung zur Rücktransformation: $x = (x_0, \vec{r}), k = (k_0, \vec{k})$)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2} e^{-ikx} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2}$$

- Integral $\int dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2}$ hat Pole bei $k_0^* = \pm |\vec{k}|$
- Schiebe Pole um $\epsilon \rightarrow 0$ aus der reellen Achse
 → Zwei Möglichkeiten: $k_0^{*,+} = \pm |\vec{k}| + i\epsilon$ und $k_0^{*,-} = \pm |\vec{k}| - i\epsilon$
- Schliesse Integrationsweg $\int dk_0$ in der komplexen Ebene über Halbkreis in der oberen oder unteren Halbebene so, dass der Halbkreis zum Integral nicht beiträgt.
 → Falls $x_0 < 0$, muss über untere Halbebene geschlossen werden
 ($e^{-ik_0 x_0} \rightarrow 0$ bei $k_0 \rightarrow -i\infty$),
 Falls $x_0 > 0$, muss über obere Halbebene geschlossen werden
 ($e^{-ik_0 x_0} \rightarrow 0$ bei $k_0 \rightarrow i\infty$),
- Integral ist Null, wenn keine Pole eingeschlossen sind.
 → Für $k_0^{*,\pm}$: Pole liegen bei $\text{Im}(k) \geq 0$
 ⇒ Integral verschwindet für $x_0 \lesssim 0 \rightarrow$ Globaler Vorfaktor $\theta(\pm x_0)$
- Wert des Integrals, falls Pole eingeschlossen sind
 (OBdA betrachte den Fall $k_0^{*,+}$)

$$\int dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{(k_0 - i\epsilon)^2 - \vec{k}^2} \underset{\text{Residuen-}}{=} -2\pi i \sum_{\text{Pole } k_0 \rightarrow \pm k_0^{*,+}} \lim_{k_0 \rightarrow \pm k_0^{*,+}} \frac{e^{-ik_0 x_0}}{(k_0 - i\epsilon)^2 - \vec{k}^2} (k_0 - i\epsilon \mp |\vec{k}|)$$

$$= -2\pi i \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|x_0}}{2|\vec{k}|} - \frac{e^{i|\vec{k}|x_0}}{2|\vec{k}|} \right) = -\frac{2\pi}{|\vec{k}|} \sin(|\vec{k}|x_0)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(\pm x_0) \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\sin(|\vec{k}|x_0)}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(\pm x_0) \int_0^\infty dk k \underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta}}_{\sin kr/r} \sin(kx_0) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \theta(\pm x_0) \int_0^\infty dk \underbrace{\sin(kr) \sin(kx_0)}_{\frac{1}{2}(\cos k(x_0-r) + \cos k(x_0+r))} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \frac{1}{2} \theta(\pm x_0) (\delta(x_0 + r) + \delta(x_0 - r)) \\ &\quad \left| \text{Nutze aus: } \delta(x^2) = \delta(x_0^2 - r^2) = \frac{1}{2r} (\delta(x_0 + r) + \delta(x_0 - r)) \right. \\ G(x) &= \frac{1}{2\pi} \theta(\pm x_0) \delta(x^2) \checkmark \end{aligned}$$

NB: In Komponentenschreibweise ist mit $x = (ct, \vec{r})$ und wegen

$$\begin{aligned} \delta(x^2) &= \delta(c^2 t^2 - r^2) = \frac{1}{2rc} (\delta(t - \frac{r}{c}) + \delta(t + \frac{r}{c})) \\ \Rightarrow G_{\text{ret}}(x) &= \frac{1}{4\pi r c} \delta(t - \frac{r}{c}) \theta(t), \quad G_{\text{av}}(x) = \frac{1}{4\pi r c} \delta(t + \frac{r}{c}) \theta(-t), \\ \Rightarrow \text{Übereinstimmung mit 1.6.1 bis auf Faktor } 1/c \end{aligned}$$

(Bis auf Faktor $1/c$: In 1.6.1 löst $G(\vec{r}, t)$ die Gleichung $\square G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$.)

Hier löst $G(x)$ die Gleichung $\square G = \delta^{(4)}(x - x') = \frac{1}{c} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$.)

3.5.2 Feld einer einzelnen Punktladung

Betrachte Punktteilchen, Trajektorie $\bar{x}(\tau)$

- Stromdichte nach 3.2.3: $J^\mu = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - \bar{x}(\tau))$

- Einsetzen mit retardierter Greenschen Funktion ($\tau_0 < \tau$)

$$\begin{aligned}
 A^{\mu(x)} &= \frac{4\pi}{c} \int d^4x' G(x-x') J^\mu(x') \\
 &= \frac{2q}{c} \int d\tau \int d^4x' \theta(x_0 - x'_0) \delta((x-x')^2) \delta^{(4)}(x' - \bar{x}(\tau)) u^\mu(\tau) \\
 &= \frac{2q}{c} \int d\tau u^\mu(\tau) \theta(x_0 - \bar{x}_0(\tau)) \delta((x - \bar{x}(\tau))^2)
 \end{aligned}$$

$\delta((x - \bar{x}(\tau))^2) \rightarrow$ legt τ fest: $\tau \rightarrow \tau_0$
 x und $\bar{x}(\tau)$ haben lichtartigen Abstand
 $\theta(x_0 - \bar{x}_0(\tau)) \rightarrow \bar{x}(\tau_0)$ liegt in der Vergangenheit von x
 (Kausalität)
 Weiterhin: Wegen $\delta(g(\tau)) = \sum_{\text{Nullstellen } \tau_i} \delta(\tau - \tau_i) \frac{1}{|g'(\tau_i)|}$
 folgt $\delta((x - \bar{x}(\tau))^2) = \delta(\tau - \tau_0) / 2(x_\mu - \bar{x}_\mu(\tau)) u^\mu(\tau)$
 $(g(\tau) = (x - \bar{x}(\tau))^2 \Rightarrow \frac{dg}{d\tau} = 2(x_\mu - \bar{x}_\mu(\tau)) u^\mu)$

$$\Rightarrow \boxed{A^\mu(x) = q \frac{u^\mu(\tau_0)}{u_\nu(\tau_0)(x^\nu - \bar{x}^\nu(\tau_0))}} \quad \text{mit } \tau_0: \text{definiert über } (\bar{x}(\tau_0) - x)^2 = 0$$

\rightarrow kovariante Form der Liénard-Wiechert-Potentiale aus 1.6.2

Ableitung: Feldtensor

$$F^{\mu\nu} = \dots = \frac{q}{u_\gamma(\tau_0)(x^\gamma - \bar{x}^\gamma(\tau_0))} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(x^\mu - \bar{x}^\mu(\tau))u^\nu(\tau) - (x^\nu - \bar{x}^\nu(\tau))u^\mu(\tau)}{u_\delta(\tau)(x^\delta - \bar{x}^\delta(\tau))} \right) \Big|_{\tau=\tau_0}$$

Komponentenweise

Definiere $\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}(\tau)}{|\vec{r} - \vec{r}(\tau)|} \Big|_{\tau=\tau_0}$ und $R = |\vec{r} - \vec{r}(\tau_0)|$

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{\text{stat}} + \vec{E}_{\text{acc}}$ und $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$

mit $\vec{E}_{\text{stat}} = \frac{q}{R^2} \frac{\vec{n} - \vec{v}/c}{\gamma^2(1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{n})^3}$ statisches Feld

$\vec{E}_{\text{acc}} = \frac{q}{R^2} \frac{\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}})}{c^2(1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{n})^3}$ Beschleunigungsfeld
tritt nur bei beschleunigten Ladungen auf.

Folgerung: Abstrahlung von bewegten Ladungen

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})$

Leistung, die abgestrahlt wird (integriert über alle Raumwinkel)

$$P = \int d\vec{A} \cdot \vec{S} = \dots = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 (\dot{\vec{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \dot{\vec{v}})^2)$$

\rightsquigarrow Nur beschleunigte Teilchen strahlen Energie ab.
Gleichförmig bewegte Teilchen strahlen nicht.

3.6 Wissensfragen

116. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion für ein kräftefreies Teilchen in kovarianter Form.
117. Welche Größe wird von der Trajektorie eines freien Teilchens minimiert?
118. Wie lautet die Lagrange-Funktion eines Punkt-Teilchens im elektromagnetischen Feld? Welche Bewegungsgleichung ergibt sich daraus?
119. Erläutern Sie die Begriffe des elektromagnetischen Viererpotentials und des Feldstärketensors. Wie hängen die beiden zusammen?
120. Wie gehen die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} in den Feldstärketensor ein?
121. Was ist die Lorentzkraft?
122. Was versteht man unter Eichinvarianz?
123. Worin besteht die Lorentz- und die Coulomb-Beziehung?
124. Was versteht man unter einer Lagrangedichte?
125. Aus welchem allgemeinen Prinzip ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen, und wie lauten sie?
126. Wie ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor definiert?
127. Wie lautet die Lagrangedichte für ein freies elektromagnetisches Feld?
128. Mit welchen allgemeinen Prinzipien kann man begründen, dass die Lagrangedichte genau diese Form hat und keine andere?
129. Wie lautet die Lagrangedichte für ein elektromagnetisches Feld, das mit Materie wechselwirkt?
130. Was versteht man unter dem Viererstrom?
131. Wie lauten die Maxwellgleichungen (i) ausgedrückt in \vec{E} und \vec{B} , (ii) ausgedrückt in $F^{\mu\nu}$, (iii) ausgedrückt in A^μ , in Lorentz-Eichung?
132. Warum haben Photonen keine Masse?
133. Was ist eine Kontinuitätsgleichung? Was haben Kontinuitätsgleichungen mit Erhaltungsgrößen zu tun?
134. Wie kann man aus einer Symmetrie der Lagrangedichte auf eine Kontinuitätsgleichung bzw. eine Erhaltungsgröße schließen?
135. Welche Kontinuitätsgleichung folgt aus der Eichinvarianz? Welche Größe ist deswegen erhalten?
136. Welche Kontinuitätsgleichungen folgen aus Invarianz bzgl. Raum-Zeit-Translationen?
137. Was ist das Maxwellsche Tensorfeld?
138. Wann erfüllt das Maxwellsche Tensorfeld eine Kontinuitätsgleichung?
139. Wodurch wird die Kontinuitätsgleichung ersetzt, wenn sie nicht erfüllt ist?
140. Was ist der Poynting-Vektor? Welche Interpretation hat er?
141. Was ist der Maxwellsche Spannungstensor? Welche Interpretation hat er?
142. Erläutern Sie die Bilanzgleichungen für Energie und Impuls für das Strahlungsfeld mit Materie.
143. Wie lautet die kovariante Form der Liénard-Wiechert Potentiale?
144. Wann strahlt eine Punktladung netto Energie ab?