

Mathematische Rechenmethoden

Version vom WS 2019*

Universität Mainz

Fachbereich 08

Theorie der kondensierten Materie

Prof. Dr. Friederike Schmid[†]

Mathematische Rechenmethoden für Physiker

**Inhalt der Vorlesung (MRM für BSc bzw. MRM1/2 für BEd)
mit weiterführendem Stoff (mit * markiert)**

Grundlegendes

Zahlen

Reelle Funktionen

Komplexe Zahlen

Vektoren und Matrizen

Infinitesimalrechnung

Differentialrechnung

Folgen, Reihen, Taylorentwicklung

Integralrechnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vektoranalysis

Nabla-Operator: Gradient, Divergenz, Rotation

Krummlinige Koordinaten

Die Integralsätze von Gauss und Stokes

Die Diracsche Delta-Funktion

Die Fouriertransformation

* Partielle Differentialgleichungen

Beispiele aus der Physik und Lösungsverfahren (Auswahl)

* Orthogonale Funktionen

Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme

Konkret: Legendre-Polynome

Fehlerrechnung und Statistik

Wahrscheinlichkeitstheorie

Stichproben und Beobachtungsfehler

Parameter-Fitting

Anhang

Analytische Funktionen

*Elektronisch: Letzte Änderung am 26.01.2020

[†]03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

Literatur

K. Hefft Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/>)

W. Nolting Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

S. Großmann Mathematischer Einführungskurs für die Physik

K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz Mathematik für Physiker 1

C. Lang, N. Pucker Mathematische Methoden in der Physik

M. L. Boas Mathematical Methods in the Physical Sciences

WolframAlpha <http://www.wolframalpha.com/examples>

G. Cowan Statistical Data Analysis

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes	1
1.1	Die Sprache der Physik	1
1.1.1	Zeichen für physikalische Größen	2
1.1.2	Zeichen für Verknüpfungen	3
1.1.3	Einheiten	4
1.2	Zahlen	6
1.2.1	Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper	6
1.2.2	Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	7
1.2.3	Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	8
1.2.4	Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	9
1.2.5	Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	9
1.2.6	Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	10
1.2.7	Zusammenfassung	11
1.3	Reelle Funktionen	12
1.3.1	Elementare Funktionen	12
1.3.1.1	Polynome und rationale Funktionen	12
1.3.1.2	Algebraische Funktionen	13
1.3.1.3	Exponentialfunktion	14
1.3.1.4	Logarithmus	15
1.3.1.5	Trigonometrische Funktionen	16
1.3.1.6	Hyperbolische Funktionen	16
1.3.1.7	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	17
1.3.1.8	Weitere wichtige abgeleitete Funktionen	17
1.3.2	Eigenschaften von Funktionen	18
1.3.2.1	Spiegelsymmetrie	18
1.3.2.2	Beschränktheit	18
1.3.2.3	Monotonie	18
1.3.2.4	Eindeindeutigkeit	18
1.3.2.5	Stetigkeit	19
1.3.2.6	Grenzwerte	19

1.4	Komplexe Zahlen	21
1.4.1	Die imaginäre Einheit	21
1.4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	22
1.4.2.1	Rechnen mit der imaginären Einheit	22
1.4.2.2	Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:	22
1.4.2.3	Euler-Formel	23
1.4.2.4	Rechenregeln	23
1.4.2.5	Spezielle Transformationen	24
1.4.3	Funktionen einer komplexen Variablen	24
1.4.3.1	Potenzen	25
1.4.3.2	Wurzeln	25
1.4.3.3	Exponentialfunktion (natürlich)	26
1.4.3.4	Logarithmus (natürlich)	26
1.4.3.5	Trigonometrische Funktionen	27
2	Vektoren und Matrizen	29
2.1	Vektoren	29
2.1.1	Definition bzw. Begriffsklärung	29
2.1.2	Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung	30
2.1.3	Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume	31
2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	33
2.2.1	Definition und mathematische Struktur	33
2.2.2	Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol	33
2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	34
2.3.1	Definition und mathematische Struktur	34
2.3.2	Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol	35
2.3.3	Höhere Vektorprodukte	36
2.4	Matrizen	37
2.4.1	Beispiele von Matrizen	37
2.4.2	Elementare Begriffe	38
2.4.3	Rechnen mit Matrizen	39
2.4.4	Determinanten	42
2.4.5	Drehungen und Drehmatrizen	45
2.4.6	Das Eigenwertproblem	46
2.4.7	Funktionen von Matrizen	48
3	Infinitesimalrechnung	49
3.1	Differentialrechnung	49
3.1.1	Die Ableitung	49

3.1.2	Elementare Beispiele	52
3.1.3	Differentiationsregeln	53
3.1.4	Anwendungen der Differentiationsregeln	54
3.1.5	Tabelle wichtiger Ableitungen	55
3.1.6	Vektorwertige Funktionen	56
3.1.6.1	Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen	56
3.1.6.2	Speziell Raumkurven	57
3.1.7	Extremwertaufgaben	58
3.2	Taylor-Entwicklung	62
3.2.1	Allgemein: Folgen und Reihen	62
3.2.1.1	Folgen	62
3.2.1.2	Reihen	63
3.2.2	Kurzer Abriss über Potenzreihen	65
3.2.3	Konstruktion der Taylor-Reihe	67
3.2.4	Anwendungen	69
3.3	Integralrechnung	71
3.3.1	Das Riemannsche Integral	71
3.3.2	Hauptsatz und Stammfunktion	72
3.3.3	Integrationsmethoden	74
3.3.4	Uneigentliche Integrale	77
3.3.5	Mehrfachintegrale	79
3.3.5.1	Beispiele	79
3.3.5.2	Polarkoordinaten	80
3.3.5.3	Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante	82
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	85
4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	86
4.1.1	Separable Differentialgleichungen	86
4.1.2	Exakte Differentialgleichungen	87
4.1.3	Lineare Differentialgleichungen	88
4.2	Systeme von Differentialgleichungen	90
4.2.1	Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	90
4.2.2	Lineare Differentialgleichungssysteme	90
4.2.3	Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	91
4.2.4	Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten	94

5	Vektoranalysis	95
5.1	Vorbemerkungen und Erinnerung	95
5.1.1	Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren	95
5.1.2	Felder	96
5.1.3	Kurvenintegral bzw. Linienintegral	96
5.1.4	Flächenintegral	97
5.2	Der Nabla-Operator	98
5.2.1	Skalare Felder und Gradient	98
5.2.2	Vektorfelder: Divergenz und Rotation	99
5.2.3	Der Laplace-Operator	99
5.2.4	Wichtige Zusammenhänge	100
5.3	Krummlinige Koordinaten	100
5.3.1	Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme	100
5.3.2	Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen	102
5.3.3	Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme	104
5.4	Integralsätze	105
5.4.1	der Gaußsche Integralsatz	105
5.4.1.1	Der Satz	105
5.4.1.2	Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz	106
5.4.2	Der Greensche Satz in der Ebene	107
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	108
6	Die Diracsche Delta-Funktion	111
6.1	Motivation und Einführung	111
6.2	Definition	112
6.3	Darstellungen der Delta-Funktion	112
6.3.1	Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen	112
6.3.2	Darstellung als Integral	114
6.4	Rechenregeln mit der Delta-Funktion	114
6.5	Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen	115
7	Die Fouriertransformation	117
7.1	Diskrete Fouriertransformation	118
7.1.1	Definition	118
7.1.2	Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation	119
7.2	Fourierintegral	120
7.2.1	Definition	120
7.2.2	Eigenschaften und Rechenregeln	121
7.2.3	Paare von Fourier-Transformierten	122

7.2.4	Anwendungsbeispiele	124
7.2.4.1	Wellengleichung	124
7.2.4.2	Diffusionsgleichung	124
7.2.4.3	Greensche Funktion	124
7.3	Fourierreihe	126
7.3.1	Definition	126
7.3.2	Darstellung in trigonometrischen Funktionen	127
8	Partielle Differentialgleichungen	129
8.1	Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik	129
8.1.1	Elliptischer Typ	130
8.1.2	Hyperbolischer Typ	130
8.1.3	Parabolischer Typ	131
8.2	Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen	131
8.2.1	Laplace-Gleichung	132
8.2.1.1	Numerische Lösung	132
8.2.1.2	Lösung mit Separation der Variablen	132
8.2.2	Wellengleichung	134
8.2.2.1	Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation	134
8.2.2.2	Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz	135
8.2.3	Diffusionsgleichung	136
8.2.3.1	Separationsansatz und asymptotisches Verhalten	136
8.2.3.2	Propagatordarstellung	137
8.2.4	Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion	137
9	Orthogonale Funktionen	139
9.1	Allgemeiner Rahmen	139
9.1.1	Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme	139
9.1.2	Das Sturm-Liouville-Problem	140
9.1.3	Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen	141
9.2	Legendre-Polynome	142
9.2.1	Die einfache Legendresche Differentialgleichung	142
9.2.2	Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome	143
9.2.3	Zugeordnete Legendre-Polynome	144
9.2.4	Kugelflächenfunktionen	145
9.3	Die Besselsche Differentialgleichung	147
10	Fehlerrechnung und Statistik	149

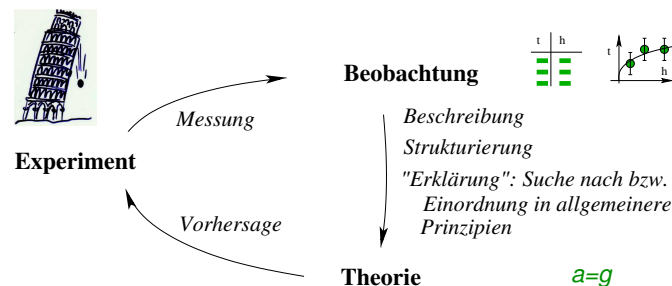
10.1	Motivation und Einführung	149
10.2	Wahrscheinlichkeitstheorie	151
10.2.1	Konzept und Interpretation von Wahrscheinlichkeit	151
10.2.2	Der Wahrscheinlichkeitsraum	152
10.2.3	Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen	153
10.3	Verteilungen	154
10.3.1	Definitionen	154
10.3.2	Wichtige Verteilungen	155
10.3.3	Charakterisierung von Verteilungen	155
10.3.4	Beispiele: Verteilungen aus 10.3.2	157
10.3.5	Umrechnung von Verteilungen	157
10.3.6	Der zentrale Grenzwertsatz	158
10.4	Stichproben und Beobachtungsfehler	159
10.4.1	Charakterisierung von Stichproben	159
10.4.2	Schätzung von Erwartungswert und Varianz	160
10.4.3	Fehlerabschätzung und Verteilung des Mittelwertes	161
10.4.4	Fehlerfortpflanzung	161
10.5	Parameter-Fitting	163
10.5.1	Bayes-Schätzer und Maximum Likelihood (ML)	164
10.5.2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	165
10.5.3	Lineare Regression	166
A	Anhang: Analytische Funktionen	169
A.1	Definitionen	169
A.2	Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	170
A.3	Integralsätze	171
A.4	Taylor-Reihe und Laurent-Reihe	172

Kapitel 1

Grundlegendes

1.1 Die Sprache der Physik

Kreislauf der empirischen Wissenschaften:



In der Physik (und großen Teilen der Chemie, zunehmend Biologie, Volkswirtschaft ...) spielt Mathematik als Sprache in diesem Kreislauf eine zentrale Rolle.

(NB: Nicht einfach nur als Hilfsmittel: Sprache bestimmt das Denken).

Historisch: Physik und Mathematik

Bis Mitte des 19. Jahrhundert (~ 1830)

- Mathematik im Wesentlichen zur Beschreibung von Experimenten (Funktionaler Zusammenhang zwischen Messwerten)
- Spekulationen über allgemeine Zusammenhänge i.A. umgangssprachlich (nicht-technisch) ("experimentelle Philosophie")

Beschäftigung mit der Physik war i. A. Nebenbeschäftigung.

Seit ~ 1870

- Mathematik ist die Sprache der Theorie.
 - Interpretation der Natur wird von Mathematik geleitet.
 - Wichtige Rolle dabei: Entwicklung der Infinitesimalrechnung
- Physik wird zum Beruf (Universitäten)

Beispiel: Christiaan Huygens: "Horologium Olscillatorium", 1673
(frühe Mechanik, 14 Jahre vor Newtons "Principia")

über fallende Körper:

"Zu gleichen Zeiten werden einem fallenden Körper gleiche Mengen Geschwindigkeit hinzugefügt, und zu gleichen Zeiten erhöhen sich die von einem Körper durchquerten Abstände sukzessive um den gleichen Betrag."

Übersetzung in die heutige Sprache:

$$\frac{dv}{dt} = \text{const. oder } \dot{v} = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \text{const. oder } \ddot{x} = \text{const.}$$

Zutaten zu einer mathematischen Formulierung physikalischer Sachverhalte:

- Zahlen (2, -3.5, π)
- Einheiten (m, km, s, EUR)
- Zeichen für

Physikalische Größen

Manipulationen und Verknüpfungen

Im Einzelnen:

1.1.1 Zeichen für physikalische Größen

Lateinisches Alphabet

$a, b, c, \dots$

$A, B, C, \dots$

Griechisches Alphabet

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$

$A, B, \Gamma, \dots$

Altdeutsches Alphabet, Fraktur oder Sütterlin (heutzutage selten)

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \dots$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \dots$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \dots$

z.B. Newtonsches Kraftgesetz: Kraft = Masse mal Beschleunigung

übersetzt: $F = m \cdot a$ (F = "Force", a = "acceleration")

oder $K = m \cdot b$ (K = "Kraft", b = "Beschleunigung")

Notation wird i. A. nicht einheitlich sein

(von Buch zu Buch, von Dozent zu Dozent, sogar innerhalb eines Kurses)

(Schlimmes Beispiel: $E = mc^2$ könnte die Gleichung für die Beschleunigung auf einer Kreisbahn sein: Radius · Winkelgeschwindigkeit ²)

1.1.2 Zeichen für Verknüpfungen

Einfache mathematische Zeichen:

$+, -, \cdot, /, \pm$
 $=, \neq, \equiv$
 $<, >, \leq, \geq$
 $\approx, \sim, \propto$
 $\ll, \gg$
 ∞

Logische Zeichen:

$\in, \ni, \notin$
 $\subset, \supset, \subseteq, \supseteq$
 $\cup, \cap, \setminus, \emptyset$
 $\exists, \exists!$
 $\forall$
 $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
 $:=$
 Beispiel: $\forall x : \exists! y : x + y = 0$

Kompliziertere Zeichen:

Summenzeichen Σ : $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Beispiele:

Gaußsche Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$$

(denn: $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k))$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1) = \frac{1}{2} n(n+1).$

Geometrische Summe

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n = (x^{n+1} - 1)/(x - 1) \text{ für } x \neq 1$$

(denn: $S_n := \sum_{k=0}^n x^k \Rightarrow xS_n - S_n = x^{n+1} - 1 = S_n(x - 1)$)

Geometrische Reihe

$$\text{Speziell: } \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x) \text{ für } |x| < 1.$$

Produktzeichen $\prod$: $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bedeutung des Binomialkoeffizienten (eine von vielen)

→ Binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Aufgaben

- Berechnen Sie $\sum_{k=1}^4 (-1)^k, \prod_{k=1}^4 (-1)^k, \binom{6}{3}$.
- Berechnen Sie $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{n}$
- Zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Zeigen Sie $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- Zeigen Sie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- Zeigen Sie $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Trick: Ausmultiplizieren von $\sum_{k=1}^n (k+1)^3$.
- Betrachten Sie folgenden "Beweis", dass Wasserstoff=Chlor. Wo steckt der Wurm?
Aus $\text{H}_2 + \text{Cl}_2 = 2 \text{HCl}$
folgt $\text{H H} + \text{Cl Cl} - 2 \text{H Cl} = 0$
 $\Rightarrow (\text{H-Cl})^2 = 0$
 $\Rightarrow \text{H-Cl} = 0$
 $\Rightarrow \text{H} = \text{Cl}$

1.1.3 Einheiten

Vorab: Einheiten $\leftrightarrow$ Maßstäbe

Festlegung von Maßstäben ist eine eigene Wissenschaft.

(Maßstäbe für Zeit, Länge, Masse, Ladung, ...)

Darüberhinaus gibt es aber noch verschiedene Einheitensysteme.

Häufig (nicht immer) benutzt man heute SI-Einheiten

(système international d'unités)

mit Grundgrößen

Länge: Meter (m)

Zeit: Sekunde (s)

Masse: Kilogramm (kg)

Elektrischer Strom: Ampère (A)

Lichtstärke: Candela (cd)

Temperatur: Kelvin (K)

Stoffmenge: Mol (mol)

ebener Winkel: Radian (rd)

Raumwinkel: Steradian (srd)

und vielen abgeleiteten Größen, z.B.

Frequenz: Hertz ($\text{Hz} = 1/\text{s}$)

Kraft: Newton ($\text{N} = \text{kg m/s}^2$)

Energie: Joule ($\text{J} = \text{N m}$)

Andere auch gebräuchliche Einheiten

Winkel: Grad $^\circ = (\pi/180) \text{ rd} = 0.01745 \text{ rd}$,

Minute $' = \frac{1}{60}^\circ$, Sekunde $'' = \frac{1}{60}'$,

Masse: atomare Masse $u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Energie: Elektronenvolt $\text{eV} = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

verschiedene Einheitensysteme im elektromagnetischen Bereich

Größenordnungen

Um Nullen zu vermeiden → international standardisierte Dezimalvorsilben
(z.B. m, km, mm, μm , ..., entsprechend g, kg, mg, μg , ...)

$10^{-1} \equiv \text{d}$ (Dezi-)	$10^1 \equiv \text{D}$ (Deka-)
$10^{-2} \equiv \text{c}$ (Zenti-)	$10^2 \equiv \text{h}$ (Hekto-)
$10^{-3} \equiv \text{m}$ (Milli-)	$10^3 \equiv \text{k}$ (Kilo-)
$10^{-6} \equiv \mu$ (Mikro-)	$10^6 \equiv \text{M}$ (Mega-)
$10^{-9} \equiv \text{n}$ (Nano-)	$10^9 \equiv \text{G}$ (Giga-)
$10^{-12} \equiv \text{p}$ (Pico-)	$10^{12} \equiv \text{T}$ (Tera-)
$10^{-15} \equiv \text{f}$ (Femto-)	$10^{15} \equiv \text{P}$ (Peta-)
$10^{-18} \equiv \text{a}$ (Atto-)	

Aufgaben

- Wie viele Kubikdezimeter Wasser hält ein Kanister mit Länge 80 cm, Breite 40 cm, Höhe 60 cm?
- Wie viele Stunden und Minuten sind 18600 Sekunden?
- Wieviele Platten der Größe $10 \times 20 \text{ cm}$ braucht man, um eine Fläche von 50 m^2 zu pflastern?
- Welchen Längen entsprechen 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde, 1 rad auf der Erdoberfläche (Umfang ist 40.000 kkm).
- Welchen Flächen entspricht auf der Erde 1 Quadratgrad, 1 Quadratminute, 1 Quadratsekunde, 1 Steradian?
- Wieviele Steradian hat eine Kugel?
- Wie lange ist ein Mikrojahrhundert?

1.2 Zahlen

Dieses Kapitel: Rudimentäre Übersicht über verschiedene Arten von Zahlen und deren Eigenschaften.

NB: Obwohl Zahlen uns sehr vertraut sind, sind sie eigentlich höchst abstrakte Gebilde

1.2.1 Vorab: Mengen, Gruppen, Ringe, Körper

- **Mengen:** Verbund von Objekten (Elementen), z.B. $A = \{a, b, c\}$.
Elemente: Objekte in einer Menge ($a \in A$)
leere Menge: Menge ohne Elemente ($\emptyset$)
Teilmenge: z.B. $B = \{b, c\}$ ist Teilmenge von $A = \{a, b, c\}$ ($B \subset A$)
Obermenge: z.B. $D = \{a, b, c, d\}$ ist Obermenge von $A = \{a, b, c\}$ ($D \supset A$)
Vereinigungsmenge, Schnittmenge: z.B. sei $C = \{c, d\}$
 $\Rightarrow A \cup C = \{a, b, c, d\}, A \cap C = \{c\}$
- **Abbildung:** Vorschrift, die jedem Element a einer Menge M ein neues Objekt $\varphi(a)$ zuordnet: $a \rightarrow \varphi(a)$.
 Dann ist $\varphi(a)$ das Bild von a , a das Urbild von $\varphi(a)$
 Falls $\varphi(a) \in N$ für alle $a \in M$: Abbildung von M in N
 Abbildung surjektiv, wenn alle Elemente von N ein Urbild haben.
 Abbildung injektiv oder eindeutig, wenn es jeweils genau ein Urbild gibt.
 Abbildung bijektiv: Injektiv und surjektiv (eineindeutig).
- **Verknüpfung:** Abbildung von der Menge $M \times M$ (der "Produktmenge") aller Paare (a, b) mit $a, b \in M$: $(a, b) \rightarrow \varphi(a, b)$ oder $a \circ b$.
 (z.B. auf Zahlenmengen: Addition, Multiplikation)
- **Gruppe:** Menge G mit einer Verknüpfung mit den Eigenschaften:
 - 1) Abgeschlossenheit: $a \in G, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$
 - 2) Assoziativgesetz: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
 - 3) Neutrales Element: Es existiert eine "Identität" $e \in G$
 mit $e \circ a = a$ für alle $a \in G$.
 - 4) Inverses Element: $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a^{-1} \circ a = e$
- **Abelsche Gruppe:** Gruppe mit der Zusatzeigenschaft
 - 5) Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$
- **Halbgruppe:** Menge mit Verknüpfung, die die Eigenschaften 1) und 2) erfüllt (Abgeschlossenheit und Assoziativgesetz).
- **Ring:** Menge R mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ (Addition, Multiplikation)
 - Abelsche Gruppe bzgl. Addition ($+$)
 - Halbgruppe bzgl. Multiplikation ($\cdot$)
 - Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
 - Identität bzgl. der Addition heißt üblicherweise Null.

- **Körper:** Ein Ring K mit folgenden Eigenschaften:
 - Mindestens ein Element ist von Null verschieden.
 - $K \setminus \{0\}$ (K ohne Null) ist Abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation.

Bemerkung: Diese Strukturen wurden natürlich im Hinblick auf die Zahlenmengen eingeführt, die gleich besprochen werden. Sie sind aber auch von viel allgemeinerer Bedeutung: Zusammenhänge, die man nur aus Gruppen-, Ringen- oder Körpereigenschaften beweist, gelten ganz allgemein in allen derartigen Strukturen.

Aufgaben:

- Zeigen Sie: Für Gruppen folgt aus Gruppeneigenschaften auch $a \circ a^{-1} = e$, $a \circ e = a$.
- Sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß dann die Menge der Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_k \in R$, n eine natürliche Zahl (siehe 1.2.2), x ein Symbol, auch ein Ring ist.

1.2.2 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: "Natürlich", da seit alters her zum Zählen benutzt.

Axiomatische Definition über Peano-Axiome (Giuseppe Peano, 1858-1932)

- I 1 ist eine natürliche Zahl.
- II Jede natürliche Zahl a hat einen Nachfolger a^+ in der Menge der natürlichen Zahlen. ($\forall a \in \mathbb{N} : \exists! a^+ \in \mathbb{N}$)
- III Es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1.
- IV Aus $a^+ = b^+$ folgt $a = b$.
- V Prinzip der vollständigen Induktion: Enthält eine Teilmenge der natürlichen Zahlen die Zahl 1 und zu jeder Zahl a auch deren Nachfolger a^+ , enthält sie alle natürlichen Zahlen.

Aus dem letzten Axiom folgt Beweismethode der vollständigen Induktion.

Ziel: Eine Eigenschaft E für alle natürlichen Zahlen N beweisen.

Weg: – Induktionsanfang: Beweise E für $N = 1$

– Induktionsannahme: Nimm an, E gilt für alle $N \leq n \in \mathbb{N}$.

– Induktionsschritt: Beweise E für $N = n^+$.

$\Rightarrow$ Dann gilt E für alle natürlichen Zahlen.

Beispiel: Beweis von $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$:

– Induktionsanfang: Gilt für $N = 1$ ✓

– Induktionsannahme: Gelte für $N \leq n$

– Induktionsschritt: $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{n(n+1)/2 \text{ laut Annahme}} + (n+1) = (n+2)(n+1)/2$ ✓

Auf natürlichen Zahlen kann man Addition und Multiplikation definieren.

Addition über $x + 1 = x^+$, $x + y^+ = (x + y)^+ \forall x, y \in \mathbb{N}$

Multiplikation über $x \cdot 1 = x$, $x \cdot y^+ = x \cdot y + x \forall x, y \in \mathbb{N}$

Eigenschaften (ohne Beweis)

- Addition $+$: Assoziativ, kommutativ
- Multiplikation $\cdot$: Assoziativ, kommutativ, Identität
- $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist Halbgruppe bzgl Addition und Multiplikation.
- Zusätzlich gelten Distributivgesetze.

Häufig wird noch die Null hinzugenommen: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Dann hat die Addition auch eine Identität

Bemerkung: Die Griechen und Römer hatten keine Null. In China gab es sie schon seit dem 4. Jhdt. vor unserer Zeitrechnung. Wurde im 12. Jhdt. nach unserer Zeitrechnung von Arabern nach Europa gebracht.

Aufgaben zum Induktionsbeweis:

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

- $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$
- $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- $n/2 < \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} \leq n$
- Berechnen Sie $\sum_{k=1}^n (2k-1)$ (erst erraten, dann mit vollständiger Induktion beweisen)

Diskutieren Sie folgende zwei "Beweise", die mit der Methode der vollständigen Induktion geführt wurden. Wo steckt der Wurm?

Beweis, dass alle Zahlen interessant sind:

Die Eins ist interessant (klar, z.B. Identität der Multiplikation).

Nimm an, alle Zahlen kleiner als n sind interessant. Dann ist auch $n+1$ interessant. Anderenfalls wäre es die erste nicht interessante Zahl, und das macht sie auch wieder interessant.

Überraschungstest: Ein Lehrer kündigt für die kommende Woche an, dass er an einem Tag einen Überraschungstest schreiben wird. Die Schüler stellen folgende Überlegung an.

- Am Freitag kann er den Test nicht mehr schreiben,
da wäre es ja dann kein Überraschungstest mehr.
 - Am Donnerstag ist es deshalb auch unmöglich.
 - Ebenso am Mittwoch, Dienstag, Montag.
 - Folglich wird der Test nicht stattfinden.
- (Aber: Dann schreibt der Lehrer dann am Mittwoch völlig überraschend einen Test ...)

1.2.3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Ausgehend von den natürlichen Zahlen

Forderung: Gleichung $\boxed{a+x=b}$ soll für alle $a, b \in \mathbb{N}$ lösbar sein.

$\leadsto$ führt zu negativen Zahlen:

Zu jedem $a \in \mathbb{N}$ gehört ein $(-a)$ mit $a + (-a) = 0$.

(Beispiele: Mathematiker im Aufzug, Schulden, Vorwärts-/Rückwärtsgehen)

Gesamtmenge: Natürliche Zahlen, Null und negative Zahlen bilden zusammen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-a : a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

Eigenschaften:

- In $\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $a + x = b$ immer lösbar ($x = b + (-a)$)
 - $\mathbb{Z}$ bildet bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe (a hat Inverses), bzgl. der Multiplikation nach wie vor eine Halbgruppe.
 - Distributivgesetze gelten
- $\Rightarrow \mathbb{Z}$ ist ein Ring.

1.2.4 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Ausgehend von den ganzen Zahlen

Forderung: Gleichung $\boxed{a \cdot x = b}$ soll lösbar sein für alle $\boxed{a \neq 0}$.

$\leadsto$ führt zu rationalen Zahlen:

Zu jedem $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gehört ein Inverses a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

- Erweiterung von $\mathbb{Z}$ um Kombinationen $a^{-1}b = b/a$
 $\Rightarrow a \cdot x = b$ wird lösbar.
- Bemerkung: De facto steht eine rationale Zahl für eine ganze Klasse von Tupeln $(a, b) = b/a$, da man kürzen kann
 (z.B. löst $2/3 = 4/6$ sowohl die Gleichung $3x=2$ als auch $6x=4$).

Gesamtmenge: Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Eigenschaften:

- In $\mathbb{Q}$ ist die Gleichung $a \cdot x = b$ lösbar.
- $\mathbb{Q}$ ist eine abelsche Gruppe bzgl. $+$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist abelsche Gruppe bzgl. $\cdot$.
- $\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist ein Körper.

Beispiele: Praktisch gesehen alle Zahlen in der Physik
 (Messung liefert immer Dezimalzahl, die irgendwo abbricht.)

1.2.5 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Bei rationalen Zahlen sind immer noch einige wichtige Zahlen, nicht enthalten, z.B.

- Lösung von $x^2 = 2$
 und anderen Polynomgleichungen $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$
 Graphisch: $x^2 - 2 = 0$ sollte Lösung haben.
 (Kurve $y = x^2 - 2$ schneidet die Nulllinie).
 entsprechende Erweiterung um Zahlen, bei denen in einem Plot $p(x)$
 vs. x die Nulllinie geschnitten wird (Nullstellen des Polynoms
 $p(x)$): algebraische Zahlen.

(NB: Unvollständige Erweiterung, da z.B. $x^2 = -1$ nach wie vor keine Lösung hat. Das wird erst mit der Einführung der komplexen Zahlen (s.u.) behoben.)

– Kreiszahl π , Eulersche Zahl e u.a.: Transzendente Zahlen.

Zusammen: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

Bemerkungen

Die Erkenntnis, dass die Lösung von $x^2 = 2$, also $\sqrt{2}$ irrational ist, ist uralte. Das war schon den Pythagoräern bekannt, wurde aber unter den Tisch gekehrt, weil es nicht ins Weltbild passte.

Der Beweis geht so: Nimm an, $\sqrt{2} = p/q$ sei rational.

Dann folgt $\sqrt{2}q = p \Rightarrow 2q^2 = p^2$.

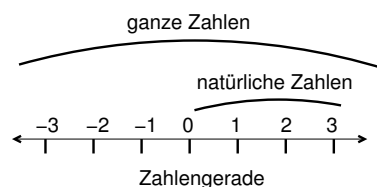
Primfaktorzerlegung von p und q : Links steht eine ungerade Zahl Faktoren, rechts eine gerade Zahl. Es gilt aber, dass die Primfaktorzerlegung eindeutig ist. (ohne Beweis: Folgt aus der Theorie der Ringe). Also kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein.

Konstruktion der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ basiert auf der Infinitesimalrechnung / braucht Begriff des Unendlichen.

(Vorgriff auf Begriff der Folgen): $\mathbb{R}$ enthält mit jeder konvergierenden Folge von rationalen Zahlen auch deren Grenzwert. Rationale Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$, d.h. sie kommen beliebig nahe an jede reelle Zahl heran. (In jeder noch so kleinen " ϵ -Umgebung" einer reellen Zahlen liegt auch eine rationale Zahl: $\forall x \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Q} : |x - y| < \epsilon$).

Anschaulich:

Eindeutige Abbildung
zwischen Zahlen und
Zahlengeraden



1.2.6 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Erweiterung so, dass $x^2 = -1$ auch lösbar wird. Dafür muss man das Bild der Zahlengeraden aufgeben / erweitern. Mehr dazu in Kapitel 1.4

1.2.7 Zusammenfassung

	Symbol	lösbare Gleichungen	zusätzliche Zahlen	Rechenregeln		Abbildung
				Addition	Multiplikation	
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$a + b = x$ $a \cdot b = x$		assoziativ kommutativ	assoziativ kommutativ Identität	Gitterpunkte auf Halbgeraden
	$\mathbb{N}_0$		Null	Identität		
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$a + x = b$	Differenzen $a - b$	abelsche Gruppe	Ring	Gitterpunkte auf Geraden
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$a \cdot x = b$ ($a \neq 0$)	Brüche b/a	abelsche Gruppe	abelsche Gruppe Körper	Dicht auf Geraden
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	$x^2 = a$ ($a \geq 0$)	Irrationale Zahlen	Körper		Vollständige Gerade
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	$x^2 = a$ ($a < 0$)	Imaginäre Zahl	Körper		Zahlen-Ebene

Aufgaben zum Abschluss:

Was ist an folgenden "Beweisen" falsch?

1=0 , denn: Betrachte $x = 1$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x^2 = x \\
 &\Rightarrow x^2 - x = x - 1 \\
 &\Rightarrow (x-1)(x+1) = x-1 \\
 &\Rightarrow x+1 = 1 \\
 &\Rightarrow x = 0 \quad \checkmark?
 \end{aligned}$$

4=5 , denn: Es gilt $16 - 36 = 25 - 45$

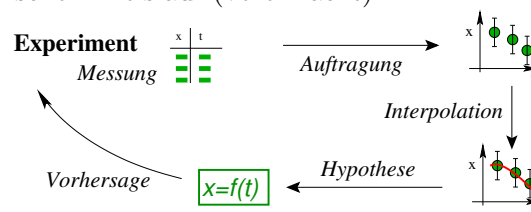
$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4 \\
 &\Rightarrow 42 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\
 &\Rightarrow \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\
 &\Rightarrow 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \\
 &\Rightarrow 4 = 5 \quad \checkmark?
 \end{aligned}$$

1.3 Reelle Funktionen

Bedeutung von Funktionen

- Mathematisch – anderes Word für Abbildung
z.B. reelle Funktion $f(x) = 1/|x|$
charakterisiert durch:
 - Definitionsbereich D_f : Erlaubte Werte von x (hier: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
 - Wertebereich W_f : Menge der Bilder (hier: $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$)
 - Abbildungsvorschrift
- Physikalisch – Hilfsmittel zur Formulierung von Theorien und zur Beschreibung von Experimenten.

Empirischer Kreislauf (vereinfacht)



Dieses Kapitel: Zusammenstellung/Erinnerung an einige wichtige reelle Funktionen und Charakterisierung.

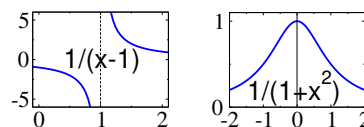
1.3.1 Elementare Funktionen

1.3.1.1 Polynome und rationale Funktionen

- Konstante Funktion: $f(x) = a$ (ebene Linie)
- Lineare Funktion: $f(x) = a + bx$ (Gerade)
- Quadratische Funktion: $f(x) = a + bx + cx^2$ (Parabel)
- Polynome n ten Grades: $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$
- Rationale Funktion: $f(x) = p(x)/q(x)$ wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind.

Beispiele

- $f(x) = 1/(x-1)$
- $f(x) = 1/(1+x^2)$
(Lorentzkurve)



Bemerkungen

- a) Teilen von Polynomen kann man genauso angehen wie Dividieren
z.B. $(x^2 + 2x - 1)/(x + 1) = x + 1 - 2/(x + 1)$
- $$\begin{array}{r} (x^2 + x) \\ (x + 1) \\ \hline -2 \end{array}$$

b) Nullstellen von Polynomen:

– Quadratische Gleichungen: $x^2 + px + q = 0$

→ "pq-Formel" $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

– Gleichungen 3. oder 4. Ordnung: Komplizierte Ausdrücke

– Ab 5. Ordnung: Kein allgemeiner algebraischer Ausdruck mehr möglich!
(Satz von Abel-Ruffini)

Aufgaben zu rationalen Funktionen

– Skizzieren Sie x^3 , x^4 , $1/x^2$, $1/x^3$, $1/(x-2)^2$, $x/(1+x^2)$

– Berechnen Sie $(x^4 - a^4)/(x - a)$

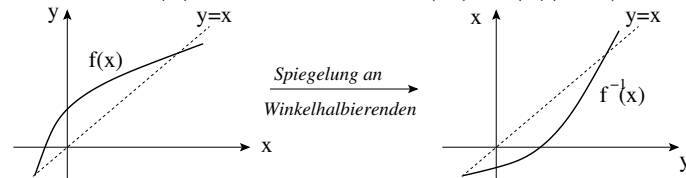
1.3.1.2 Algebraische Funktionen

Wurzel: $g(x) = \sqrt{x} \equiv x^{1/2}$ inverse Funktion zu $f(x) = x^2$

Allgemein inverse Funktionen:

Falls $y = f(x)$, ist $x = f^{-1}(y)$ inverse Funktion ($f(f^{-1}(y)) = y$)

Graphisch

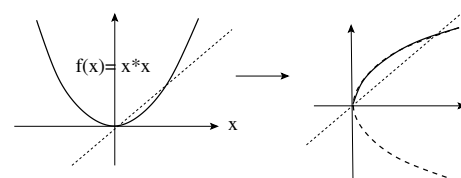


NB: Inverse Funktion muss nicht eindeutig sein. Falls nicht eindeutig, muss man sich eine Variante aussuchen.

Speziell Wurzel:

Konvention: $\sqrt{x}$ ist oberer Ast.

NB: Definitionsbereich eingeschränkt ($x \geq 0$).



Andere rationale Potenzen

z.B. $\sqrt[3]{x} \equiv x^{1/3}$ ist inverse Funktion zu $f(x) = x^3$

$\sqrt[4]{x} \equiv x^{1/4}$ ist inverse Funktion zu $f(x) = x^4$

Zusammengesetzte Ausdrücke

z.B. $\sqrt{x^2 + a^2}/(x-3)^{3/5}$ etc. (mit $y^{3/5} := (y^{1/5})^3$)

Aufgaben zu algebraischen Funktionen / Zahlen

– Skizzieren Sie $1/\sqrt{x}$, $1/\sqrt{x+1}$, $1/\sqrt{x}+1$

– Zeigen Sie folgende Identitäten (Aufgaben aus Indien):

Apastamba, 5.-4. Jhd. v. Christus: $\frac{36}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{24}{\sqrt{3}} + \frac{30}{\sqrt{3}} \right) = 324$

Bhaskara II, 1114-1185: $\sqrt{10 + \sqrt{24}} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Ramanujan, 1887-1920: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

1.3.1.3 Exponentialfunktion

Vorab: Rechnen mit Potenzen b^x , b sei positiv ($b > 0$)

- Exponent x natürlich: $x = n \in \mathbb{N}$
 b^x definiert durch $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ mal}}$
 → Rechenregeln: $b^n b^m = b^{n+m}$, $(b^n)^m = b^{n \cdot m}$, $(ab)^n = a^n b^n$
- Exponent x eine ganze Zahl, $x \in \mathbb{Z}$
 b^x definiert über $b^0 := 1$, $b^{-n} := 1/b^n$
 → Rechenregeln gelten immer noch.
- Exponent x eine rationale Zahl, $x \in \mathbb{Q}$
 b^x definiert über $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$, $b^{m/n} = (\sqrt[n]{b})^m$ gemäß 1.3.1.2
 → Rechenregeln gelten immer noch.

Klasse der Exponentialfunktionen

Wähle irgendein $b > 0$

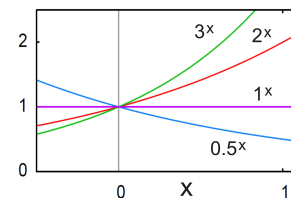
Zeichne b^x für alle $x \in \mathbb{Q}$

- schöne, glatte Kurve, Punkte liegen dicht.
- kann erweitert werden auf $x \in \mathbb{R}$

Für jedes b erhält man eigene Kurve.

Es gilt jeweils Multiplikationstheorem

$$\boxed{\begin{array}{l} b^{x+y} = b^x \cdot b^y \\ (b^x)^y = b^{x \cdot y} \end{array}} \quad \text{für } x, y, b \in \mathbb{R}, b > 0.$$

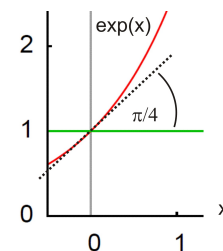


Natürliche Exponentialfunktion

Spezielle Wahl von b , so dass lokaler Winkel zur y -Achse bei $x = 0$ genau $\pi/4$ ist (45 Grad).

Dies gilt für $b = 2.71828\ldots =: e$: Euler-Zahl
 (irrational)

Notation $\boxed{f(x) = e^x = \exp(x)}$

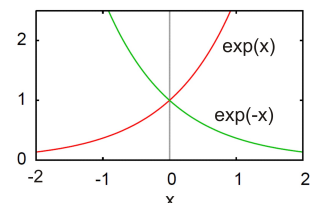


Besondere Eigenschaften

- Ableitung: $f(x) = \exp(x) \Rightarrow f'(x) = f(x)$ (Vorgriff auf Kapitel 3.1)
- Potenzreihe: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ (Vorgriff auf Kapitel 3.2)
- Wachstum: $\exp(x)$ wächst schneller an als jede Potenzfunktion x^n
 $(\forall n, b > 0 : \exists x_0 : e^x > b x^n \forall x > x_0)$

Bedeutung der Exponentialfunktion

- "exponentielles Wachstum":
 Charakteristisch für ungebremstes Wachstum
 (z.B. Bakterien mit genug Nahrung in Petrischale)
- "exponentieller Zerfall": $(1/e)^x = \exp(-x)$
 charakteristisch für freien Zerfall
 (z.B. radioaktiver Zerfall)



Aufgaben zur Exponentialfunktion

Skizzieren Sie: – $f(x) = 1 - e^{-x}$ (Spannung beim Aufladen eines Kondensators)

– $f(x) = x + e^{-x}$

– $f(x) = x e^{-x}$ ('Poissonverteilung')

– $f(x) = x^2 e^{-x}$

– $f(x) = 1/(e^x - 1)$ ('Bose-Einstein-Verteilung')

– $f(x) = 1/(e^x + 1)$ ('Fermi-Dirac-Verteilung')

Schauen Sie sich verschiedene Funktionen auf dem Computer an, z.B. Java-Applet

"Funktionenschaufenster" im Skript von K. Hefft (www.thphys.uni-heidelberg.de/hefft/vk1)

oder die Seite von Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com>)

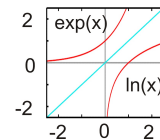
1.3.1.4 Logarithmus

Inverse Funktion zur Exponentialfunktion

Natürlicher Logarithmus

Inverses zur natürlichen Exponentialfunktion

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y) \equiv \log(y)$$

Dekadischer Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg(y) \equiv {}_{10} \log(y)$

Dyadischer Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = 2^x \Leftrightarrow x = \lg(y) \equiv {}_2 \log(y)$

Allgemeiner Logarithmus

Inverses zur Funktion $y = b^x \Leftrightarrow x = {}_b \log(y)$

"Logarithmus zur Basis b " (mit $b > 0$)

Rechenregeln: Aus Multiplikationstheorem $b^x b^y = b^{x+y}$, $(b^x)^y = b^{xy}$

folgt für jede Basis:

$$\begin{aligned} {}_b \log(y \cdot z) &= {}_b \log(y) + {}_b \log(z) \\ {}_b \log(z) &= {}_b \log(z^y) \end{aligned}$$

Umrechnung zwischen Exponentialfunktion und Logarithmen:

Rechne als Referenz alles auf natürliche Funktionen um.

$$\boxed{b^x = e^{x \ln(b)}} \quad (\text{denn: } b = e^{\ln b} \Rightarrow b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \ln b})$$

$$\boxed{{}_b \log(y) = \ln(y) \cdot {}_b \log(e)} \quad (\ln(y) \cdot {}_b \log(e) = {}_b \log(\underbrace{e^{\ln(y)}}_y) = {}_b \log(y))$$

Bemerkung: So wie die Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion anwächst, wächst der Logarithmus langsamer als jede Potenzfunktion:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists x_0 : \ln(x) < x^\epsilon \quad \forall x > x_0.$$

Aufgaben zum Logarithmus

– Zeigen Sie ${}_b \log(e) = 1/\ln(b)$

(also ist Umrechnungsformel auch: ${}_b \log(y) = \ln(y)/\ln(b)$)

– Berechnen Sie ${}_b \log(b)$

– Berechnen Sie $\lg(x)$ aus $\ln(x)$.

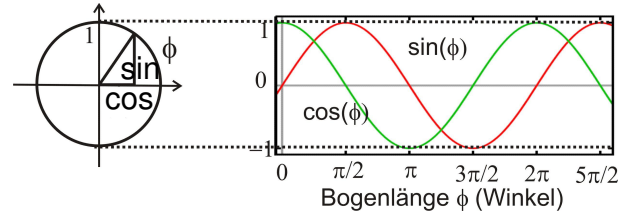
– Wo steckt der Wurm in folgendem "Beweis" für die Behauptung $2 > 3$.

$$1/4 > 1/8 \Rightarrow (1/2)^2 > (1/2)^3 \Rightarrow \ln(1/2)^2 > \ln(1/2)^3$$

$$\Rightarrow 2 \ln(1/2) > 3 \ln(1/2) \Rightarrow 2 > 3 \checkmark ?$$

1.3.1.5 Trigonometrische Funktionen

Ergeben sich daraus, dass man entlang einer Kreisscheibe läuft



- Eigenschaften

periodisch mit Periode 2π : $f(x + 2\pi) = f(x)$

$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ ($\leftrightarrow$ Satz des Pythagoras)

(Notation: $\sin^2(\phi) = (\sin(\phi))^2$ etc.)

$\cos(\phi) = \sin(\phi + \pi/2)$

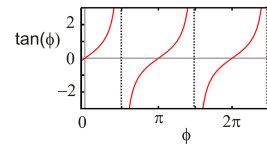
- Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b) \end{aligned}$$

- Abgeleitete Funktionen

Tangens: $\tan(\phi) = \sin(\phi) / \cos(\phi)$

Cotangens: $\cot(\phi) = \cos(\phi) / \sin(\phi)$



- Umkehrfunktionen (zyklometrische Funktionen)

$\sin(x) = y, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow x = \arcsin(y)$

$\cos(x) = y, x \in [0, \pi] \rightarrow x = \arccos(y)$

$\tan(x) = y, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow x = \arctan(y)$

$\cot(x) = y, x \in [0, \pi] \rightarrow x = \operatorname{arccot}(y)$

Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

- Skizzieren Sie $\cot(\phi)$, $\arctan(\phi)$, $\phi + \sin(\phi)$, $\sin(\phi)/\phi$.
- Zeigen Sie: $\sin^2(\phi) = \tan^2(\phi) / (1 + \tan^2(\phi))$
- Zeigen Sie: $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})$

1.3.1.6 Hyperbolische Funktionen

Aus Exponentialfunktion abgeleitet

Eigenschaften, die an trigonometrische Funktionen erinnern

- Definition

Sinus hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$

Cosinus hyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$

Tangens hyperbolicus: $\tanh(x) = \sinh(x) / \cosh(x)$

Cotangens hyperbolicus: $\coth(x) = \cosh(x) / \sinh(x)$

- Eigenschaften

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

- Additionstheoreme

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

(kann durch Einsetzen leicht nachgeprüft werden)

→ Große Ähnlichkeit mit trigonometrischen Funktionen

Deutet auf Zusammenhang zwischen Exponentialfunktion und Sinus/Cosinus hin – wird ersichtlich nach Einführung der komplexen Zahlen. (Kap. 1.4).

- Umkehrfunktionen: Area-Funktionen

$$\sinh(x) = y, \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arsinh}(y)$$

$$\cosh(x) = y, \quad x \in [0, \infty] \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arcosh}(y)$$

etc.

Aufgaben zu hyperbolischen Funktionen

– Skizzieren Sie $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\operatorname{arsinh}(x)$

– Beweisen Sie die Additionstheoreme.

– Zeigen Sie: $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

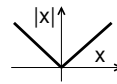
1.3.1.7 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

Es gibt vor allem zwei wichtige derartige Funktionen

- **Betragsfunktion** $y = |x|$

Definition des Betrages: Sei $a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & : a > 0 \\ -a & : a < 0 \end{cases}$$



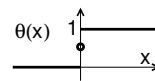
Rechenregeln:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

- **Heavisidesche Stufenfunktion** $\Theta(x)$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0.5 & : x = 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$



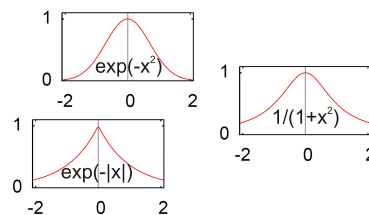
Beispiel: $\Theta(x - a) \Theta(b - x)$ (mit $a < b$) gibt Kastenfunktion.

1.3.1.8 Weitere wichtige abgeleitete Funktionen

- Gaußfunktion: $f(x) = \exp(-x^2)$

- Lorentzfunktion: $f(x) = 1/(1 + x^2)$

- $f(x) = \exp(-|x|/a)$



1.3.2 Eigenschaften von Funktionen

1.3.2.1 Spiegelsymmetrie

$y = f(x)$ gerade, wenn $f(-x) = f(x) \forall x$ (z.B. x^2)

$y = f(x)$ ungerade, wenn $f(-x) = -f(x) \forall x$ (z.B. x^3)

Bemerkung: Man kann jede Funktion in einen geraden und einen ungeraden

Anteil zerlegen: $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ mit

$$f_g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), f_u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

1.3.2.2 Beschränktheit

Funktion heisst nach oben (unten) beschränkt im Intervall $[a, b]$, wenn es eine obere (untere) Schranke für Funktionswerte gibt.

$$\left| y = f(x) \text{ nach } \begin{pmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{pmatrix} \text{ beschränkt in } [a, b] \Leftrightarrow \exists B : B \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} f(x) \forall x \in [a, b] \right|$$

1.3.2.3 Monotonie

Funktion heisst monoton steigend (fallend) im Intervall $[a, b]$, wenn mit wachsendem Argument die Funktionswerte steigen (fallen)

$$\left| y = f(x) \text{ monoton } \begin{pmatrix} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{pmatrix} \text{ in } [a, b] \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in [a, b] : f(x_1) \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} f(x_2) \right|$$

$$\left| y = f(x) \text{ streng monoton } \begin{pmatrix} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{pmatrix} \text{ in } [a, b] \Leftrightarrow \forall x_1 < x_2 \in [a, b] : f(x_1) \begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix} f(x_2) \right|$$

Anwendung auf einige der Funktionen in 1.3.1 (im Definitionsbereich)

Funktion	Symmetrie (gerade, <u>ungerade</u>)	Beschränktheit		Monotonie (<u>steigend</u> , fallend)
		oben	unten	
$\sin(x)$	u	✓	✓	–
$\cos(x)$	g	✓	✓	–
$\exp(x)$	–	–	✓	s
$\log(x)$	–	–	–	s
$\sinh(x)$	u	–	–	s
$\cosh(x)$	g	–	✓	–

1.3.2.4 Eineindeutigkeit

Definitionsbereich D_f sei $[a, b]$. Funktion $f(x)$ ist eineindeutig, wenn zu jedem Punkt im Wertebereich W_f genau ein Punkt im Definitionsbereich D_f gehört.

$$\left| y = f(x) \text{ eineindeutig in } [a, b] \Leftrightarrow \forall y \in W_f : \exists! x \in [a, b] : y = f(x) \right|$$

→ dann ist die Umkehrung von $f(x)$ eindeutig ("umkehrbar eindeutig") bzw. $f(x)$ ist surjektiv (vgl. 1.2.1).

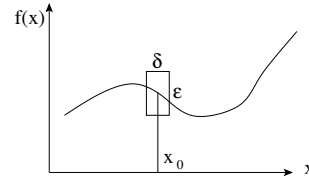
Bemerkung: Streng monotone Funktionen sind eineindeutig.

1.3.2.5 Stetigkeit

Anschaulich: Keine Sprünge

Mathematisch:

Stetig bei $x_0 \rightarrow$ kein Sprung
 $\rightarrow f(x)$ rückt nahe an $f(x_0)$,
 wenn x nahe an x_0 rückt.



$$y = f(x) \text{ stetig bei } x_0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

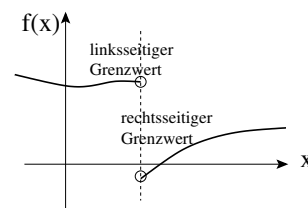
Beispiele:

- $\sin(x), \cos(x), \exp(x), \log(x)$ im gesamten Definitionsbereich stetig.
- $1/x$ bei $x = 0$ nicht stetig (divergiert sogar!), sonst überall stetig.
- Heaviside-Funktion bei $x = 0$ nicht stetig.

1.3.2.6 Grenzwerte

- Grenzwert an vorgegebenen Punkten x_0 :

$f(x)$ nähert sich bei Annäherung
 an x_0 einem Grenzwert y_0 beliebig
 nahe an, z.B.



Mathematisch: Grenzwert wird durch $\lim_{x \rightarrow x_0}$ dargestellt.

Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D_f \text{ mit } 0 < x - x_0 < \delta \right|$$

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D_f \text{ mit } 0 < x_0 - x < \delta \right|$$

Allgemeiner Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ bedeutet:

$$\left| \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D_f \text{ mit } |x - x_0| < \delta \right|$$

(falls Definitionsbereich das Intervall um x_0 einschließt, impliziert das rechtsseitiger Grenzwert = linksseitiger Grenzwert.)

Bemerkungen:

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = y_0$ bedeutet nicht automatisch $f(x_0) = y_0$

Gegenbeispiel ist Heaviside-Funktion:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = 1, \quad \theta(0) = 1/2.$$

- (ii) Stetigkeit bei x_0 bedeutet: Grenzwert bei x_0 existiert und ist gleich dem Funktionswert

- Grenzwert im Unendlichen ($\pm\infty$):

$f(x)$ nähert sich bei grossen x oder $-x$ beliebig nahe einem Grenzwert an
(z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = 0$)

$$\left| \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \Delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \forall x \text{ mit } x > \Delta \right.$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \Delta > 0 : |f(x) - y_0| < \epsilon \forall x \text{ mit } x < -\Delta \right.$$

- Regel von l'Hospital (ohne Beweis)

Oft hilfreich zur Bestimmung schwieriger Grenzwerte

Betrachte Grenzwert der Form $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\text{mit } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\text{oder } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Zur Berechnung des Grenzwertes bestimme Ableitungen $f'(x), g'(x)$ von $f(x), g(x)$ (Vorgriff auf Abschnitt 3.1, hoffentlich bekannt aus der Schule!).

Falls der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beispiele

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0,$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1,$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1+x^2} = \infty \text{ (Grenzwert existiert nicht).}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(Berechnung nach l'Hospital mit $f(x) = \sin x, g(x) = x$:

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x, f'(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)})$$

NB: Gründe, warum Funktionen eventuell keinen Grenzwert haben:

- $\lim f(x)$ divergiert (wird $\pm\infty$)

- Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert verschieden.

- Grenzwert nicht eindeutig

Aufgaben

$$- \text{Berechnen Sie } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1-x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$- \text{Berechnen Sie } \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^2, \lim_{x \rightarrow \infty} (\tan x)^2, \lim_{x \rightarrow 0} \arctan x, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x.$$

$$- \text{Berechnen Sie } \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x, \lim_{x \rightarrow 0} |x|, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}.$$

- Betrachten Sie Grenzwerte von Funktion $\exp(-1/x)$ bei $x = 0$ und $x = \pm\infty$.

- Skizzieren Sie $\exp(-1/x)$.

1.4 Komplexe Zahlen

1.4.1 Die imaginäre Einheit

Zum Abschluss: Weitere Erweiterung des Zahlenraums.

Bislang hatten wir die Zahlenklassen:

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$

↓ Lösbarkeit von $a + x = b \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

↓ Lösbarkeit von $ax = b \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

↓ Ganzer Zahlenstrahl

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

↓ Lösbarkeit beliebiger Polynomgleichungen:

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Wie geht das?

Gute Nachricht:

Es genügt, eine einzige neue Zahl einzuführen:

Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ (Euler).

$x = i$ löst die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Mit i konstruiere allgemein neue Zahlen $\boxed{z = x + iy}$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

→ Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$.

Damit wird *jede* Polynomgleichung lösbar (Satz von Abel)

– Jedes Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)$$

(Fundamentalsatz der Algebra):

– Viele andere nützliche Eigenschaften.

Viele Rechnungen werden sehr viel einfacher.

”Schlechte” Nachricht:

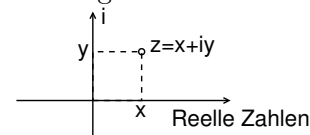
Darstellung der Zahlen auf Zahlenstrahl nicht mehr möglich.

→ Übergang zur Gaußschen Zahlenebene

Komplexe Zahl entspricht Punkt in der Ebene

Vergleichsrelationen wie $<$, $>$ (kleiner, größer)

machen dann keinen Sinn mehr.



Frage: Brauchen Physiker das?

- 1) Nein: Wir kommen ja eigentlich zur Beschreibung von Experimenten schon mit rationalen Zahlen aus!
- 2) Ja: Viele Dinge vereinfachen sich erheblich, wenn man komplexe Zahlen zulässt.

Viele Formeln werden sehr kompliziert, wenn man versucht, mit reellen Zahlen auszukommen

– insbesondere im Zusammenhang mit Schwingungen, Wellen, Elektrotechnik, Quantenmechanik

Also: Wenn wir uns das Leben schwer machen wollen, versuchen wir, ohne komplexe Zahlen auszukommen. Wenn wir bequem sein wollen, machen wir uns jetzt die Mühe, sie kennenzulernen und uns daran zu gewöhnen (wie seinerzeit an die negativen Zahlen).

1.4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

1.4.2.1 Rechnen mit der imaginären Einheit

Imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ bzw. $i^2 + 1$: Lösung von $z^2 = 1$: $\boxed{z = \pm i}$

Folgerung: Potenzen

$$i^0 = 1$$

$$1/i \text{ invers zu } i \Rightarrow \boxed{1/i = -i}$$

$$(\text{check: } (1/i) \cdot i = (-i)i = -i^2 = 1 \checkmark)$$

$$1/i^2 = (1/i)^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$$

$$1/i^3 = i$$

$$1/i^4 = 1$$

etc.

$$i^3 = (i^2)i = -i$$

$$i^4 = (i^3)i = -i^2 = 1$$

$\vdots$

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$\left. \begin{array}{l} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{array} \right\} \text{ für } n \in \mathbb{Z}$

Aufgaben: Was ist $i^5, i^{45}, (-i)^{20}, (-i)^{-3}$?

1.4.2.2 Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:

Gegeben $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$)

Dann ist $x =: \Re(z) \equiv \text{Re}(z)$ Realteil von z (eindeutig!)

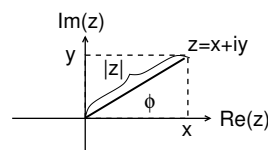
$y =: \Im(z) \equiv \text{Im}(z)$ Imaginärteil von z (eindeutig)

Alternativ: Polarkoordinaten in der Zahlenebene

$$z = |z|(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

mit ϕ : Argument von z (nicht eindeutig,
außer man schränkt ein, z.B. $\phi \in [0, 2\pi]$)

$|z|$: Betrag von z



Berechnung von ϕ und $|z|$ aus x und y :

Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras)

$$\text{Argument: Aus } \left. \begin{array}{l} x = |z| \cos(\phi) \\ y = |z| \sin(\phi) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$$

Aufgaben

- Berechnen Sie Betrag und Argument von $1 + i, 1 - i$
- Was ist falsch an folgender Rechnung? $-1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

1.4.2.3 Euler-Formel

Darstellung $z = |z| (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$ kann stark vereinfacht werden mit Hilfe der Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

Erweiterung der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen. Begründung kommt in Kapitel 3.2 (Die linke und rechte Seite der Gleichung haben die gleiche Potenzreihe). Es gelten die üblichen Rechenregeln für $\exp(x)$.

z.B. Checke $e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2}$

$$\begin{aligned} e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2} &= (\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1))(\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2)) \\ &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos \phi_1) + i^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \\ &= \underbrace{[\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2]}_{\cos(\phi_1+\phi_2)} + i \underbrace{[\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_2 \cos \phi_1]}_{\sin(\phi_1+\phi_2)} \\ &= \cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2) = e^{i(\phi_1+\phi_2)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Speziell gilt: $\begin{array}{l} \exp(2\pi i) = 1 \\ \exp(i\pi) = -1 \\ \exp(i\pi/2) = i \\ \exp(-i\pi/2) = -i \end{array}$ und: $\exp(i(\phi + 2\pi)) = \exp(i\phi)$
ist periodisch mit Periode 2π .

Die Polarkoordinatendarstellung von $z = x + iy$ ist dann: $z = |z| \exp(i\phi)$

1.4.2.4 Rechenregeln

- Addition $z = x + iy, w = u + iv$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow z + w = (x + u) + i(y + v)$$

Realteil und Imaginärteil werden getrennt addiert.

Man sieht direkt dass die Gesetze für abelsche Gruppen gelten.

(Abgeschlossenheit $\checkmark$, Assoziativität $\checkmark$, Kommutativität $\checkmark$,

Null: $0 + 0i$ erfüllt $z + 0 = z \quad \forall z \quad \checkmark$

Negatives: $-z = -x - iy$ erfüllt $z + (-z) = 0 \quad \forall z \quad \checkmark$

Anschaulich: Komplexe Zahl entspricht Vektor (x, y) in Zahlenebene.

Addition entspricht Vektoraddition.

- Multiplikation $z = x + iy, w = u + iv$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(yu + xv)$$

Anschaulich am ehesten in Polarkoordinaten zu begreifen:

$$z = |z|e^{i\phi}, w = |w|e^{i\psi} \Rightarrow z \cdot w = |z| \cdot |w| e^{i(\phi+\psi)}$$

Daran sieht man, dass wieder abelsche Gruppengesetze gelten:

(Abgeschlossenheit $\checkmark$, Assoziativität $\checkmark$, Kommutativität $\checkmark$,

Eins: $1 + 0i$ erfüllt $z \cdot 1 = z \quad \forall z \quad \checkmark$

Inverses: $1/z = (1/|z|) e^{-i\phi}$ erfüllt $(1/z) \cdot z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \checkmark$

Distributivgesetze gelten auch.

$\Rightarrow$ Insgesamt bilden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ wieder einen Körper!

1.4.2.5 Spezielle Transformationen

- Betrag (hatten wir schon, hier nur wiederholt)

$$z = x + iy \Rightarrow \text{Betrag } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

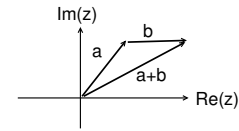
Bei den komplexen Zahlen gilt immer noch die Dreiecksungleichung:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

(wird aus Skizze anschaulich

sauberer Beweis siehe Mathe-Vorlesungen)

NB: Hier macht der Begriff "Dreieck" erst Sinn!



- Komplexkonjugation

$$z = x + iy \Rightarrow \text{Komplexkonjugiertes } z^* = x - iy$$

Entspricht Spiegelung an der reellen Achse

$$\text{In Polarkoordinaten: } z = |z|e^{i\phi} \Rightarrow z^* = |z|e^{-i\phi}$$

$$\text{Speziell: } z = x + iy = |z|e^{i\phi}, w = u + iv = |w|e^{i\psi}$$

$$(z + w)^* = z^* + w^*$$

$$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$$

$$(\text{check: } (zw)^* = (|z||w|e^{i(\phi+\psi)})^* = |z||w|e^{-i(\phi+\psi)} = z^*w^* \checkmark)$$

$$(z \cdot z^*) = |z|^2$$

Aufgaben

- Berechnen Sie für $c = 3 + 3i\sqrt{3}$: $cc^*, c^2, c/c^*, 1/c, 1/c^*, 1/c + 1/c^*, 1/c - 1/c^*, c^3$
- Berechnen Sie allgemein für $z = re^{i\phi}$: $zz^*, z^2, z/z^*, |z/z^*|, 1/z + 1/z^*, 1/z - 1/z^*$
- Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Zahlen $c, ic, 1/c, 1/c^*$ für $c = 1 - i$ und $c = 1 + 2i$.

1.4.3 Funktionen einer komplexen Variablen

Vorab: Grundsätzliche Definition einer Funktion wie bei den reellen Zahlen:

Abbildung $f(z)$ von komplexer Zahl z auf komplexe Zahl w .

Vieles kann man aus Kapitel 1.3.2 sinngemäß übernehmen, z.B.

- Definition von Stetigkeit (keine Sprünge)

$$w = f(z) \text{ stetig bei } z_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 (\in \mathbb{R}) : \exists \delta > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \delta$$

- Definition von Grenzwerten

$$\lim_{z \rightarrow z_0} w = w_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 (\in \mathbb{R}) : \exists \delta > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z) - w_0| < \epsilon \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \delta$$

- Definition von Beschränktheit

$$f(z) \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists B > 0 (\in \mathbb{R}) : |f(z)| \leq B \forall z$$

(Beschränktheit "nach oben" oder "nach unten" macht keinen Sinn mehr.)

Weitere Funktionen, die wir in 1.3.1 diskutiert haben, lassen sich ohne weiteres für komplexe Zahlen erweitern.

Nur: Graphische Darstellung wird schwieriger (4D?)

1.4.3.1 Potenzen

Gegeben komplexe Variable $z = x + iy = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi}$

n te Potenz ist (äquivalente Schreibweisen, $n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} z^n &= (x + iy)^n = |z|^n (\cos \phi + i \sin \phi)^n \\ &= |z|^n (e^{i\phi})^n = |z|^n e^{in\phi} = |z|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \end{aligned}$$

Also: Für $z \rightarrow z^n$

Betrag $|z| \rightarrow |z|^n$

Argument $\phi \rightarrow n\phi$

Bemerkung: Liefert nebenbei Formeln für $\cos(n\phi)$ und $\sin(n\phi)$

Man muss nur $|z| = 1$ setzen. Betrachte z.B. $n = 2$:

$$\begin{aligned} \cos(2\phi) + i \sin(2\phi) &= (\cos \phi + i \sin \phi)^2 \\ &= (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + i \cdot 2 \sin \phi \cos \phi \end{aligned}$$

Vergleiche Realteil $\Rightarrow \cos(2\phi) = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi$

Vergleiche Imaginärteil $\Rightarrow \sin(2\phi) = 2 \cos \phi \sin \phi$

1.4.3.2 Wurzeln

Weitgehend analog zu Potenzen: Für $z = |z|e^{i\phi}$ ist n te Wurzel:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (|z|e^{i\phi})^{1/n} = |z|^{1/n} e^{i\phi/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi/n}$$

Einzigster Unterschied zum Reellen:

Im Reellen gibt es eine Konvention, zu welcher von mehreren Lösungen von $x^n = a > 0$ der Ausdruck $x = \sqrt[n]{a}$ gehört (positiver Ast).

Im Komplexen gibt es keine solche Konvention, es muss jedesmal extra spezifiziert werden. Insofern ist der Ausdruck $\sqrt[n]{a}$ im Komplexen mehrdeutig!

Konkreter: Gleichung $w^n = z$ hat n verschiedene Lösungen.

- Diskutiere zuerst $w^n = 1$, also $\sqrt[n]{1}$.

Da $1 = e^0 = e^{i \cdot 2\pi} = e^{i \cdot 4\pi} = \dots = e^{i \cdot 2m\pi}$ ($m \in \mathbb{N}$),
ist $\sqrt[n]{1} = e^0, e^{i \cdot 2\pi/n}, e^{i \cdot 4\pi/n}, \dots, e^{i \cdot 2m\pi/n}$

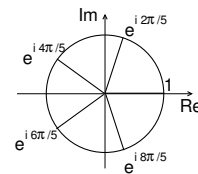
$\rightarrow$ "Einheitswurzeln":

Einheitskreis in n "Tortenstücke" aufgeteilt.

Wurzeln entsprechen Randpunkten $e^{i \cdot 2m\pi/n}$

Erst nach n Punkten geht es wieder

von vorne los.



- Allgemein $w^n = z$ mit $z = |z|e^{i\phi} = |z|e^{i\phi} \cdot 1$

$\Rightarrow$ Lösungen $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi/n}; \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi/n + i \cdot 2\pi k/n}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Von diesen sind n verschieden.

Beispiele

- Wurzeln $\sqrt{i}$, also Lösungen von $w^2 = i$
 $i = 1 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow w_1 = e^{i\pi/4}; w_2 = e^{i\pi/4} \underbrace{e^{i2\pi/2}}_{-1} = -e^{i\pi/4}$
 $\Rightarrow w_{1,2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \underbrace{(\cos(\pi/4))}_{1/\sqrt{2}} + i \underbrace{\sin(\pi/4)}_{1/\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
- $\sqrt[3]{8i}$, also Lösungen von $w^3 = 8i$
 $8i = 8 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow w_1 = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 2e^{i\pi/6}$
 $w_2 = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} + i2\pi \cdot \frac{1}{3}} = 2e^{i\pi \cdot 5/6}$
 $w_3 = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} + i2\pi \cdot \frac{2}{3}} = 2 \underbrace{e^{i\pi \cdot 3/2}}_{-i} = -2i$

Aufgaben

Berechnen Sie $\sqrt[2]{8i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[3]{1+i}$

1.4.3.3 Exponentialfunktion (natürlich)

Erweiterung der Exponentialfunktion auf imaginäre Zahlen über Euler-Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

Erweiterung auf allgemeine komplexe Zahlen $z = x + iy$ über Multiplikations-

$$\text{theorem } e^{a+b} = e^a \cdot e^b \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{\text{Betrag}} \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{y: \text{Argument}}$$

1.4.3.4 Logarithmus (natürlich)

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. $w = \ln z \Rightarrow z = e^w$

Mit $z = |z|e^{i\phi}$ folgt $|z|e^{i\phi} = e^{\ln|z|+i\phi} = e^w$, also $w = \ln|z| + i\phi$.

Achtung: Auch hier gibt es, wie bei den Wurzeln, eine Mehrdeutigkeit.

Mit $w = \ln|z| + i\phi$ ist auch $w_k = \ln|z| + i\phi + 2\pi ik$ eine Lösung von $z = e^w$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

→ Ausdruck $\ln z$ ist ebenfalls nicht eindeutig definiert.

Konvention: Die Lösung mit $-\pi < \phi < \pi$ ist herausgehoben und heißt "Hauptwert". Notation dafür: $\text{Ln}(z)$.

Aber: Der Ausdruck $\ln(z)$ ist mehrdeutig, und wenn er verwendet wird, muss zusätzlich festgelegt werden, was gemeint ist.

Beispiel: $\ln(i) = \ln(e^{i\pi/2}) = i\pi/2; i(\pi/2 + 2\pi); i(\pi/2 + 4\pi), \dots$

Bemerkung: Mit Hilfe des Logarithmus kann man nun auch allgemeine Potenzen berechnen: $b^z = e^{z \ln b}$. Da aber $\ln b$ nicht eindeutig ist, ist b^z auch nicht eindeutig. Solche Ausdrücke kommen aber in der Praxis (in der Physik) eher nicht vor.

Aufgaben

Berechnen Sie $\ln(-1)$, $\ln(-i)$, i^i .

1.4.3.5 Trigonometrische Funktionen

Erhält man aus Umkehrung der Euler-Formel

Zunächst reelle ϕ :

$$\text{Aus } e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ \sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \end{cases}$$

Erweiterung auf komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}$$

Folgerungen

- Es gilt nach wie vor $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
(Check durch Einsetzen:
 $\cos^2 z = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})$
 $\sin^2 z = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{i}\right)^2(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})$
 $\Rightarrow \cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}(2 + 2) = 1 \quad \checkmark)$
- Man erkennt unmittelbar den Zusammenhang mit den hyperbolischen Funktionen:
 $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
 $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$

Daran sieht man $\cos(z) = \cosh(iz), \sin(z) = \frac{1}{i} \sinh(iz)$

Aufgaben

- Zeigen Sie $\cos(iz) = \cosh(z), \sin(iz) = i \sinh(z)$
- Berechnen Sie $\cos(\pm\pi/2), \cos(\pm\pi)$ aus der Euler-Formel.
- Berechnen Sie $\cos(\pi \pm i\pi), \cos(\pi/2 \pm i\pi)$
- Zeigen Sie $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Kapitel 2

Vektoren und Matrizen

Logisch wäre es, in der Vorlesung an dieser Stelle mit Infinitesimalrechnung und Potenzreihen weiterzumachen (Kapitel 3). Es soll aber relativ unmotiviert ein Kapitel über Vektoren eingeschoben werden, da die elementaren Begriffe der Vektorrechnung in den Vorlesungen der Experimentalphysik so ziemlich von Anfang an benötigt werden.

2.1 Vektoren

2.1.1 Definition bzw. Begriffsklärung

Vektoren: Zentrale Größen in der Physik.

Aber: Was ist ein Vektor eigentlich?

→ physikalische und mathematische Sichtweise

Mathematischer Vektor: Element eines Vektorraums (siehe 2.1.3)

Physikalischer Vektor: Gerichtete Strecke mit Anfangs- und Endpunkt, z.B. Ort $\vec{r}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft $\vec{F}$.

Notation: $\vec{a}$, $\mathbf{a}$, $\underline{a}$, ...

Charakterisierung: Durch Betrag (Länge der Strecke) und Richtung (Einheitsvektor $\vec{e}_a$).

Skalare: Im Gegensatz zum Vektoren einfache "Zahlen"

Wieder physikalische und mathematische Sichtweise.

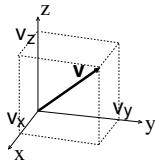
Mathematisch: Vektorraum ist "über einem Körper" definiert (siehe 2.1.3)

Skalare sind Elemente dieses Körpers.

Physikalisch: Größen, die durch einzelne Zahlen charakterisiert werden können (z.B. Temperatur, Druck, Betrag eines Vektors)

2.1.2 Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung

Im allgemeinen legt man im Raum ein Koordinatensystem (KDS) fest.



Dann kann Vektor durch Satz von D Zahlen dargestellt werden. ($D = 3$ im Raum, $D = 2$ in der Ebene etc.)
Zahlen (Koordinaten) hängen vom KDS ab.

⇒ Alternative Definition eines **physikalischen Vektors**:

Größe, charakterisiert durch D Zahlen (D : Dimension des Raums), die sich bei Drehung des Koordinatensystems in "bestimmter Weise" transformieren. (mehr dazu gleich).

Alternative Definition eines **physikalischen Skalars**:

Größe, charakterisiert durch eine Zahl, die vom Koordinatensystem unabhängig ist.

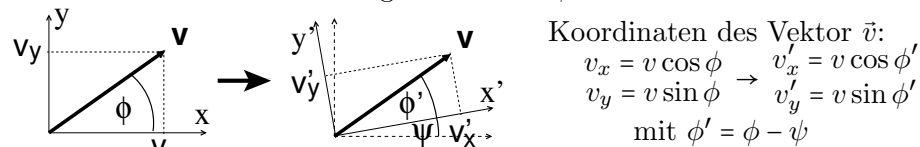
Frage: Was bedeutet "bestimmte Weise"?

Wie transformieren sich Vektorkoordinaten unter Drehung des KDS?

Annahme hier: rechtwinkliges Koordinatensystem.

Diskussion zunächst in 2 Dimensionen (Vektor in der Ebene)

Betrachte Einfluss auf Drehung um Winkel ψ auf Vektor $\vec{v}$.



Koordinaten des Vektor $\vec{v}$:
 $v_x = v \cos \phi \rightarrow v'_x = v \cos \phi'$
 $v_y = v \sin \phi \rightarrow v'_y = v \sin \phi'$
 mit $\phi' = \phi - \psi$

$$\Rightarrow \begin{aligned} v'_x &= v \cos(\phi - \psi) = v \cos \phi \cos \psi + v \sin \phi \sin \psi = v_x \cos \psi + v_y \sin \psi \\ v'_y &= v \sin(\phi - \psi) = v \sin \phi \cos \psi - v \cos \phi \sin \psi = -v_x \sin \psi + v_y \cos \psi \end{aligned}$$

$$\text{Matrix-Schreibweise: } \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix } \mathcal{D}(\psi)} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

↪ Drehung des KDS kann durch **Drehmatrix** beschrieben werden.

Analog kann man Drehmatrizen auch in drei Dimensionen definieren.

(kompliziertere Form, die Matrizen hängen von drei Winkeln ab).

Vorteile der Beschreibung von Drehungen durch Drehmatrizen:

- Eine Drehmatrix beschreibt Einfluss der Drehung auf die Koordinaten aller Vektoren
- Kombinierte Drehungen können leicht durch Hintereinanderschalten von Drehmatrizen beschrieben werden
(formal per Matrixmultiplikation – siehe Einschub Matrizen).

Kurzer Einschub Matrizen (Vorgriff auf 2.4)

Beispiel: 2×2 -Matrizen

Gegeben Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$,

- Anwendung von Matrix auf Vektor: $w = Av$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix},$$

d.h. in Komponentenschreibweise: $w_j = \sum_k a_{jk}v_k$.

- Analog Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

d.h. in Komponentenschreibweise:

$$\text{Mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = AB \text{ bedeutet } c_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}.$$

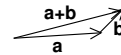
Kann verallgemeinert werden auf beliebige $n \times n$ -Matrizen
(und sogar $n \times m$ Matrizen, ist aber hier weniger wichtig).

Matrixmultiplikation definiert assoziative Verknüpfung auf den Matrizen.

2.1.3 Elementares Rechnen mit Vektoren, Vektorräume

1) **Addition** von Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$:

- Graphisch: Hänge Pfeile aneinander



- Koordinaten: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$

- Rechengesetze: Vektoren mit Addition bilden "Abelsche Gruppe"

(i) Abgeschlossen: $\vec{a} + \vec{b}$ ist wieder ein Vektor

(ii) Assoziativ: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$

(iii) Es gibt eine Null $\vec{0}$ mit: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$

(iv) Inverses: $\forall \vec{a} \quad \exists \quad (-\vec{a}) : \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$

(v) Kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$



2) **Multiplikation mit einem Skalar** : (i.e., einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.)

- Graphisch: Streckung/Stauchung um Faktor λ
(Falls $\lambda < 0$: Richtung dreht sich um.)

- Koordinaten: $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}.$

- Rechengesetze:

- (i') Immer noch abgeschlossen: $\lambda \vec{a}$ ist wieder ein Vektor.
- (vi) Kommutativ: $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$
- (vii) Assoziativ: $\beta(\alpha \vec{a}) = (\beta \alpha) \vec{a}$
- (viii) Distributivgesetze: $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$, $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$.

Bemerkung: Die Menge der Skalare $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ für sich genommen bildet einen Körper (siehe 1.2.1). Eine Menge von Objekten, auf der eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit den obigen Eigenschaften (i)-(viii) definiert ist bezeichnet man als linearen Vektorraum über dem Körper der Skalare.

⇒ Mathematische Definition eines Vektors: Element eines Vektorraums

Der mathematische Begriff des Vektors ist allgemeiner als der physikalische Begriff. In dieser Vorlesung werden mathematisch gesehen meistens Vektorräume $\mathbb{R}^D$ diskutiert (D ist die Raumdimension). Aber es gibt andere Möglichkeiten, z.B. bildet die Menge der Funktionen $f(x)$ auch einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

3) Lineare Abhängigkeit :

Definition: Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\sum \alpha_i \vec{a}_i = 0$ folgt $\alpha_i = 0 \quad \forall \quad i$.

Anderenfalls sind die Vektoren **linear abhängig**.

Anschaulich: Zwei Vektoren linear abhängig ⇒ parallel.

Drei Vektoren linear abhängig ⇒ koplanar (in einer Ebene) .

Bemerkungen:

- Zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ spannen Ebene durch Ursprung auf, d.h. alle Punkte der Ebene können in die Form $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ gebracht werden (α, β sind Skalare).
- Drei linear unabhängige Vektoren spannen gesamten Raum auf.
- In drei Dimensionen sind maximal drei Vektoren linear unabhängig. (Mathematisch: Dimension ist definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum)

Aufgaben:

- Gegeben sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}$.

Sind $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, linear unabhängig?

Wie lautet die Gleichung für die Gerade durch $\vec{a}$, die zu $\vec{b}$ parallel ist?

- Bilden Sie in der (x, y) -Ebene die Summe von 7 Vektoren der Länge a , wobei $\vec{a}_1$ in x -Richtung zeigt und $\vec{a}_j$ mit $\vec{a}_{j-1}$ die Winkeldifferenz $\pi/6$ hat.

2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt)

2.2.1 Definition und mathematische Struktur

1) Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^D$ mit beliebigem $D \geq 1$):

Abbildung eines Paares von Vektoren auf einen Skalar

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos(\phi)}$$
 mit ϕ : Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Physikalisches Beispiel: Arbeit = Kraft mal Weg ($W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$).

2) Rechenregeln:

- (i) Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- (ii) Homogen: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- (iii) Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- (iv) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$
 $(a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \text{ ist Betrag des Vektors}).$

- Kein eindeutiges Inverses
 (durch Vektoren darf man nicht dividieren !)

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man **unitär**.

3) Folgerungen

- **Cauchy-Schwartzsche Ungleichung**: $\boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab}$

(hier konkret: klar, da $\cos \phi \leq 1$)

Kann man aber auch allein aus (i)-(iv) beweisen:

$$\text{Für alle } \lambda \text{ gilt: } 0 \leq (\vec{a} - \lambda \vec{b})^2 = a^2 + \lambda^2 b^2 - 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{Wähle } \lambda = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{b^2} \Rightarrow 0 \leq a^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{b^2} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq a^2 b^2 \quad \checkmark$$

Falls $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab$ folgt: Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind parallel.

(möglicher Test auf lineare Abhängigkeit).

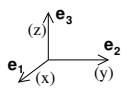
- **Dreiecks-Ungleichung**: $\boxed{|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b}$

$$\text{vgl. } \left\{ \begin{array}{l} (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\ (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Aus } -ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab \\ \text{(Cauchy-Schwartzsche Ungl.)} \\ \text{folgt } (a - b)^2 \leq (\vec{a} + \vec{b})^2 \leq (a + b)^2 \quad \checkmark \end{array}$$

- **Einheitsvektor** in Richtung $\vec{a}$: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}$

2.2.2 Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol

Ab jetzt sollen unsere Koordinatensysteme rechtwinklige Koordinatenachsen haben, die ein "Rechtssystem" bilden (Rechte-Hand Regel).



Definiere $\vec{e}_i$: Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachse i .

$$\rightarrow \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_i a_i \vec{e}_i \quad (\text{mit } a_i: \text{Koordinaten})$$

$$\text{Es gilt: } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

1) Motiviert Definition des **Kronecker-Symbols**

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

2) Skalarprodukt in Koordinatendarstellung: $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$; $\vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (\sum_i a_i \vec{e}_i) \cdot (\sum_j b_j \vec{e}_j) = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{ij} a_i b_j \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i}$$

3) Anwendung: Berechnung der Koordinaten eines Vektors $\vec{a}$ in einem anderen (rechtwinkligen) Koordinatensystem mit Koordinatenachsen in Richtung $\{\vec{e}'_i\}$ (wobei die $\vec{e}'_i$ wieder Basisvektoren sein sollen, $|\vec{e}'_i| = 1 \quad \forall i$).

Koordinaten: Projektion von $\vec{a}$ auf die Achsen (Basisvektoren) $\vec{e}'_i$:

$$\Rightarrow \boxed{a'_i = \vec{a} \cdot \vec{e}'_i} \Rightarrow \vec{a} = \sum_i a'_i \vec{e}'_i = \sum_i (\vec{a} \cdot \vec{e}'_i) \vec{e}'_i.$$

Gilt für alle Vektoren $\vec{a}$ und rechtwinklige Koordinatensysteme $\{\vec{e}'_i\}$.

↪ Liefert einfache Berechnungsformel für Drehmatrizen.

Betrachte Drehung, die KDS $\{\vec{e}_i\}$ in KDS $\{\vec{e}'_i\}$ überführt.

Vektor $\vec{a}$ hat Koordinaten a_i bzw. a'_i mit $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$, $a'_i = \vec{a} \cdot \vec{e}'_i$

Aus $\vec{a} = \sum_j a_j \vec{e}_j$ und $a'_i = \vec{a} \cdot \vec{e}'_i$ folgt $a'_i = \sum_j a_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i)$

also $\boxed{a'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j}$ mit Drehmatrix $\boxed{\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j}$

Aufgaben:

- Beweisen Sie den Kosinussatz für Dreiecke: Für Dreiecke mit Seitenlängen a, b, c und dem Winkel ϕ zwischen den Seiten a und b gilt $a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi = c^2$.
- Betrachten Sie Vektoren mit Koordinaten $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Bestimmen Sie den Einheitsvektor in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)**2.3.1 Definition und mathematische Struktur**1) Vektorprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

Abbildung eines Paares von Vektoren auf Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

mit Betrag $\boxed{|\vec{c}| = a b \sin(\phi)}$

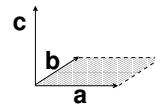
(ϕ : Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.)

Richtung: $\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$

Vorzeichen: So, dass $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Rechtssystem.

Geometrisch: $|\vec{c}|$ ist Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

Physikalisches Beispiel: Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p}$.



2) Rechengesetze

- (i) Antikommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (ii) Homogen: $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
- (iii) Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
(zur Herleitung siehe z.B. Nolting Bd. 1)
NB: Aus (i) und (iii) folgt auch $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- (iv) Jacobi-Identität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
(vorläufig ohne Herleitung).
- Nicht assoziativ, keine Identität, kein Inverses
(durch Vektoren kann man immer noch nicht dividieren).

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem äußeren Produkt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man eine **Lie Algebra**.

2.3.2 Koordinatendarstellung und Levi-Civita-Symbol

Das Koordinatensystem sei wieder ein rechtwinkliges Rechtssystem, mit Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ entlang den Koordinatenachsen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &\quad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0 \quad \forall i. \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \end{aligned}$$

- 1) Motiviert Definition des Epsilon-Tensor oder Levi-Civita-Symbol:

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 : & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 : & (ijk) = (213), (321), (132) \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases} = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k$$

(bzw. "total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe").

- 2) Vektorprodukt in Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} \text{Mit } \vec{a} &= \sum_i a_i \vec{e}_i; \quad \vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j \text{ folgt } \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\ \Rightarrow c_k &= \vec{c} \cdot \vec{e}_k = [\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk}, \quad \text{konkret: } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- 3) Rechenregeln mit dem Epsilon-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \underbrace{\epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}}_{\text{gerade Permutationen}} = \underbrace{-\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}}_{\text{ungerade Permutationen von } (i, j, k)}$$

$$\sum_m \epsilon_{klm} \epsilon_{pqm} = \delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp}$$

(Beweis: Hausaufgabe – Buchhaltung, argumentieren ...)

$$\sum_{lm} \epsilon_{klm} \epsilon_{plm} = 2\delta_{kp}$$

$$\text{(denn: } \sum_{lm} \epsilon_{klm} \epsilon_{plm} = \sum_l (\delta_{kp} \underbrace{\delta_{ll}}_1 - \delta_{kq} \delta_{lp}) = 3\delta_{kp} - \delta_{kp} \checkmark)$$

Aufgaben:

- Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- Berechnen Sie die Fläche des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

2.3.3 Höhere Vektorprodukte

1) Spatprodukt $\boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$ ($\rightarrow$ Skalar)

Geometrische Interpretation:

Betrag: Volumen eines von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aufgespannten Parallelepipeds.

Vorzeichen: +, falls $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Rechtssystem,
– für Linkssystem.

Koordinatenschreibweise:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum_k a_k (\vec{b} \times \vec{c})_k = \sum_{ijk} a_k b_i c_j \epsilon_{ijk} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k}.$$

$$\text{Es gilt: } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c})$$

2) Doppeltes Vektorprodukt: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ($\rightarrow$ Vektor)

$$\text{Dafür gilt "Entwicklungssatz": } \boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

(Herleitung am schnellsten mit Hilfe des Epsilon-Tensors:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i (\vec{b} \times \vec{c})_j = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i \sum_{lm} \epsilon_{lmj} b_l c_m \\ &= \sum_{ijlm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmj} a_i b_l c_m = \sum_{ilm} (\sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj}) a_i b_l c_m \\ &= \sum_{ilm} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) a_i b_l c_m \\ &= \sum_m a_m b_k c_m - \sum_l a_l b_l c_k = b_k (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_k (\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned}$$

3) Weitere wichtige Beziehungen:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (\text{Lagrange-Identität})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$$

Aufgaben:

- Beweisen Sie die Jacobi-Identität.

- Gegeben die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$, $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

- Beweisen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$
- Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$.
- Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ seien linear unabhängig.

Die reziproken Vektoren seien definiert durch: $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}$, $\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}$, $\vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)}$.

Zeigen Sie $\vec{a}_i \vec{b}_j = \delta_{ij}$

- Zeigen Sie $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot ((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) = 2\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

2.4 Matrizen

2.4.1 Beispiele von Matrizen

Matrizen: Neben Vektoren weitere nützliche Konstrukte, mit denen sich Sachverhalte kurz und präzise ausdrücken lassen. Bedeutung unter anderem für

- Lineare Gleichungssysteme
- Beschreibung von Drehungen im Raum
- Darstellung bestimmter physikalischer Größen

Das soll im Folgenden kurz illustriert werden.

1) Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:
$$\begin{array}{rrcr} 3x & + & 7y & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & y & & & = & 1 \end{array} :$$

Charakterisiert durch "Koeffizientenmatrix" $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
und "Spaltenvektor" $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenschaften des Gleichungssystems werden im Wesentlichen von der Koeffizientenmatrix bestimmt.

"Matrix" hier: Zahlenschema aus $m \times n$ Zahlen a_{ij} (m Zeilen, n Spalten)

Darstellung des Gleichungssystems in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Drehungen

Gegeben physikalischer Vektor $\vec{a}$, zwei rechtwinklige Koordinatensysteme Σ, Σ' mit Basisvektoren $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e}'_i\}$ (Einheitsvektoren entlang Achsen i).

Darstellung von $\vec{a}$ im Koordinatensystem Σ : $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$ mit $a_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)$.

Darstellung von $\vec{a}$ im Koordinatensystem Σ' : $\vec{a} = \sum_i a'_i \vec{e}'_i$ mit $a'_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}'_i)$.

$\Rightarrow$ Einfache Regel für die Umrechnung von Koordinaten $\{a_i\} \rightarrow \{a'_i\}$:

$$a'_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}'_i) = \left(\sum_j a_j \vec{e}_j \right) \cdot \vec{e}'_i = \sum_j (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j) a_j =: \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j \quad (2.1)$$

Definiert Drehmatrix $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{ij})$ mit $\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$.

Dann folgt $a'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} a_j$ bzw. in Matrixschreibweise: $a' = \mathcal{D}a$.

Dies gilt für alle physikalischen Vektoren $\vec{a}$. Drehung des Koordinatensystems wird durch das Zahlenfeld $\mathcal{D}$ vollständig bestimmt.

Konkret z.B. Ebene: $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung: Allgemeine affine Koordinatentransformation zwischen Koordinatensystemen, die nicht unbedingt rechtwinklig sind: Beschrieben durch allgemeine invertierbare 3×3 -Matrix.

Bemerkung: Mit der Einführung der Drehmatrizen wird die Konkretisierung des Begriffs **”physikalischer Vektor”** möglich: Ein physikalischer Vektor ist eine Größe, charakterisiert durch drei Zahlen $\{v_i\}$ (im dreidimensionalen Raum – zwei Zahlen in der Ebene), die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{v_i\} \rightarrow \{v'_i\} \text{ mit } v'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} v_j.$$

3) Physikalische Tensoren

Beispiel: Trägheitsmoment und Trägheitstensor

Trägheitsmoment θ Verknüpft Drehimpuls mit Winkelgeschwindigkeit
Z.B. symmetrischer Kreisel, der sich um Symmetrieachse dreht. Symmetrieachse sei die z -Achse.

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = d\phi/dt$.

Drehimpuls: Vektor $\vec{L}$ mit Betrag $L = \theta\omega$ und Richtung z

θ ist das Drehmoment und charakterisiert den Kreisel

$$(\text{Konkret: } \theta = \int d^3r \rho(\vec{r})(x^2 + y^2))$$

Bedeutung des Drehimpulses: Physikalische *Erhaltungsgröße*.

Verallgemeinerung: Trägheitstensor $\mathbf{I}$

Frage: Beliebige Drehachse? Asymmetrischer Kreisel?

→ Drehimpuls nicht unbedingt parallel zur Drehachse.

Aber: Immer noch linearer Zusammenhang.

Führe vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ein.

Betrag: ω , Richtung: Drehachse.

$$\text{Dann gilt: } \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ bzw.: } \vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

mit $\mathbf{I}$: 3×3 -Matrix, die eine *physikalische Eigenschaft* des Kreisels beschreibt. (Konkret: $I_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$)

⇒ Definition eines **”physikalischen Tensors”** ähnlich der Definition des physikalischen Vektors: Größe, charakterisiert durch 3×3 -Matrix $\{t_{ij}\}$, die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{t_{ij}\} \rightarrow \{t'_{ij}\} \text{ mit } t'_{ij} = \sum_{kl} \mathcal{D}_{ik} \mathcal{D}_{jl} t_{kl}.$$

(Strenggenommen Tensor zweiter Stufe. Tensoren höherer Stufe: Selbes Prinzip, nur mehr Indizes.)

2.4.2 Elementare Begriffe

1) Definition einer Matrix

Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n

$$\text{Spalten: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}).$$

Zwei Matrizen gelten als gleich, wenn jeder Eintrag a_{ij} gleich ist.

2) Spezielle Matrizen

- Nullmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
- Quadratische $n \times n$ -Matrizen
 - Symmetrische Matrix: $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$
 - Antisymmetrische Matrix: $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$
 - Diagonalmatrix: $a_{ij} = \delta_{ij} a_i$
 - Einheitsmatrix: $E = \mathbb{1} = (\delta_{ij})$
- Vektoren:
 - Spaltenvektor: $n \times 1$ -Matrix
 - Zeilenvektor: $1 \times n$ -Matrix
 - Koordinatendarstellungen von Vektoren sind spezielle Formen von Matrizen.

3) Rang einer Matrix

$m \times n$ -Matrix kann man sich zusammengesetzt denken aus m Zeilenvektoren oder n Spaltenvektoren.

Zeilenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Spaltenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren

Es gilt: Spaltenrang = Zeilenrang.

2.4.3 Rechnen mit Matrizen

1) Elementare Operationen

- * **Addition** : Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, gleiche Zahl von Zeilen/Spalten.
 $C = (c_{ij}), C = A + B$ bedeutet: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$
- * **Multiplikation mit Skalar** : Sei λ Skalar
 $C = \lambda A$ bedeutet: $c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i, j$.
 Bemerkung: Matrizen mit Addition und Skalarmultiplikation bilden wieder Vektorraum über dem Körper der Skalare ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).
- * **Transposition**
 $C = A^T$ bedeutet: $c_{ij} = a_{ji}$
- * **Matrixmultiplikation** : Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$,
 Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B
 $C = AB$ bedeutet: $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Eigenschaften der Matrixmultiplikation:

- Assoziativ: $A(BC) = (AB)C$
- Neutrales Element: $\mathbb{1}$ erfüllt $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A \forall A$
- Nicht kommutativ: Im allgemeinen ist $AB \neq BA$.
- Matrix A kann Inverses haben (siehe 2), muss aber nicht.

2) Matrixinversion A sei eine $m \times n$ -Matrix:

$n \times m$ -Matrix (A^{-1}) ist "Links inverses" von A , wenn $(A^{-1})A = \mathbb{1}$.
(Definition der "Rechtsinversen": Analog)

Es gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (leicht zu zeigen)

Für $n = m$: $AA^{-1} = \mathbb{1}$

(denn: Sei $B = AA^{-1} \Rightarrow A^{-1}B = \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}}A^{-1} = A^{-1} \forall A^{-1} \Rightarrow B = \mathbb{1}$)

d.h. A^{-1} ist dann auch Rechts inverses und $(A^{-1})^{-1} = A$

Praktische Berechnung:

Lösung eines Satzes von linearen Gleichungssystemen.

Beispiel: Gegeben $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entspricht zwei linearen Gleichungssystemen:

$$(*) \quad 1x_{11} + 3x_{12} = 1 \quad 1x_{21} + 3x_{22} = 0$$

$$(**) \quad 2x_{11} + 1x_{12} = 0 \quad 2x_{21} + 1x_{22} = 1$$

Selbe Koeffizienten, nur rechte Seiten sind verschieden.

→ Man kann jeweils dieselben Transformationen benutzen, um nach den beiden Unbekannten aufzulösen.

Üblicherweise (aus der Schule bekannt) werden Gleichungssysteme über "Zeilentransformationen" gelöst (z.B.: Ersetze $(**)$ durch $(*) - 2*(**)$). Diese lassen sich auch als Matrix darstellen.

(In unserem Beispiel: $A \rightarrow Z_1 A$ mit $Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.)

Zeilentransformationen Z_j werden aneinandergereiht, bis die Gleichungen nach den Unbekannten aufgelöst sind.

→ Entspricht formal Matrixmultiplikation $A \rightarrow Z_k \cdots Z_2 Z_1 A = \mathbb{1}$.

Damit folgt $A^{-1} = Z_k \cdots Z_2 Z_1$. Das motiviert folgendes

Lösungsverfahren (für $n \times n$ -Matrizen).

Schreibe Koeffizientenmatrix (für linke Seite) und Einheitsmatrix (für rechte Seiten) nebeneinander auf. Führe dann die Zeilentransformationen aus, die die Gleichungssysteme lösen.

→ Linke Matrix (Koeffizientenmatrix) wird zur Einheitsmatrix, Rechte Matrix wird zur gesuchten inversen Matrix.

$$\begin{aligned} \text{Konkret: } & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(**) \rightarrow 2(*) - (**)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{(**) \rightarrow (**)/5} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{(*) \rightarrow (*) - 3(**)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ergebnis:}} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(Alternativen: Cramers Regel, siehe nächster Abschnitt, wird aber für $n > 2$ impraktikabel. Weitere numerische Verfahren, z.B. LU-Zerlegung, siehe Numerikliteratur).

3) Speziell $n \times n$ Matrizen: Charakteristische Größen

- ★ **Spur** : Für $n \times n$ Matrizen A ist $\text{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$
 Es gilt: $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$
 (leicht zu sehen, wenn man es explizit hinschreibt).
 $\rightarrow \text{Sp}(A_1 \cdots A_{n-1} A_n) = \text{Sp}(A_n A_1 \cdots A_{n-1})$:
 Matrizen in der Spur dürfen zyklisch vertauscht werden.
- ★ **Determinante** : Siehe nächster Abschnitt

Aufgaben:

- Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $AB, BA, Aa, a^T B$.

- Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie AA^T .

- Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie $A\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$.

- Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Inverse A^{-1} . Testen Sie explizit $A^{-1}A = \mathbb{I}$.

- Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie explizit alle Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, für die gilt: $BX = XB$.

- Zeigen Sie explizit: Für $n \times n$ Matrizen A, B, C gilt
 $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$ und $\text{Sp}(ABC) = \text{Sp}(BCA) = \text{Sp}(CAB)$
- In der Quantenmechanik sind die Pauli-Matrizen
 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von großer Bedeutung:
 - Zeigen Sie, dass der Satz von Matrizen $(\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ linear unabhängig ist.
 - Zeigen Sie $\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k$ für alle i, j .
 - Berechnen Sie $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i$ für alle i, j .

2.4.4 Determinanten

1) **Definition:** Betrachte $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$

$$\det(A) := \sum_P (-1)^P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \quad (2.2)$$

Hier ist: $(P_1 \cdots P_n)$: Permutationen von $(1 \cdots n)$

$\sum_P$: Summe über alle Permutationen

$$(-1)^P: \begin{cases} 1 & , \text{ falls Permutation gerade} \\ -1 & , \text{ falls Permutation ungerade} \end{cases}$$

wobei - 'gerade' Permutation: lässt sich durch gerade Anzahl paarweiser Vertauschungen (Transpositionen) realisieren.

- 'ungerade' Permutation: ungerade Anzahl Transpositionen

Es gilt: Zuordnung Permutation $\leftrightarrow$ gerade/ungerade ist eindeutig.

$$\text{Notation: } \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Konkret: } 2 \times 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

$$3 \times 3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

$$\rightarrow \text{Spatprodukt: } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

entspricht genau dem von $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ aufgespannten Volumen.

Geometrische Interpretation: $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ ($\vec{a}_i$ Spaltenvektoren)

Dann ist $|\det(A)|$ genau das von $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ aufgespannte n -dimensionale Volumen im n -dimensionalen Raum.

Daraus folgt z.B. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_i$ linear abhängig $\Leftrightarrow \text{Rang } A < n$.

2) Rechenregeln

- **Transposition** : $\det(A^T) = \det(A)$.

$$\begin{aligned} (\text{Begründung: } \det(A^T) &= \sum_P (-1)^P a_{P_1 1} \cdots a_{P_n n} = \sum_P (-1)^P a_{1P_1^{-1}} \cdots a_{nP_n^{-1}} \\ &= \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} a_{1\hat{P}_1^{-1}} \cdots a_{n\hat{P}_n^{-1}} \text{ mit } \hat{P} = P^{-1}, \end{aligned}$$

letzter Schritt folgt aus $(-1)^P = (-1)^{P^{-1}}$.)

- **Addition** einer Zeile/Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Spalte analog.

(Begründung: Faktoren $(a_{ij} + b_{ij})$ in Gl. (2.2) ausmultiplizieren.)

- **Multiplikation** einer Zeile/Spalte mit einer Zahl α

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Begründung: Faktor α in Gl. (2.2) vor die Summe ziehen.)

Folgerung $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

- **Vertauschung** zweier Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen.

(Begründung bei Spaltenvertauschung $i \leftrightarrow j$: Entspricht in Gl. (2.2) dem Ersetzen der Permutationen P durch $P' = T_{ij}P$, wobei T_{ij} die Transposition ($i \leftrightarrow j$) ist. Falls P gerade, ist P' ungerade und umgekehrt.)

Folgerung: Sind zwei Zeilen/Spalten gleich, folgt $\det(A) = 0$.

(Begründung: Vertauschung ändert A nicht, aber Vorzeichen von $\det(A)$.)

→ Wenn ein Vielfaches einer Zeile/Spalte auf eine andere addiert wird, ändert sich Determinante nicht.

- **Determinanten-Multiplikationssatz** :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

- **Algebraisches Komplement** : $A^{(ij)}$ sei die Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht.
Algebraisches Komplement: $U_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(ij)})$.

- **Determinanten-Entwicklungssatz** :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_i a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Zeile } i \\ &= \sum_j a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Spalte } j \end{aligned}$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

Folgerung: $\sum_k a_{ik} U_{jk} = 0$, $\sum_k a_{ki} U_{kj} = 0$ für $i \neq k$.

(Begründung: Definiere Matrix $\bar{A}$, die bis auf j -te Zeile identisch ist mit A , nur j -te Zeile durch i -te Zeile ersetzt. Dann ist $\det(\bar{A}) = 0$. Erste Behauptung (Zeile) folgt aus Entwicklungssatz: $\det(\bar{A}) = \sum_k \bar{a}_{jk} U_{jk} = \sum_k a_{ik} U_{jk}$. Zweite Behauptung analog.)

3) Folgerungen und Anwendungen

- **Inverses** einer $n \times n$ -Matrix:

Voraussetzung: $\det(A) \neq 0$

Dann lässt sich A invertieren und $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji} / \det(A)$.

($[A^{-1}]_{ij}$: Eintrag in der i -ten Zeile, j -ten Spalte der Matrix A^{-1}).

- **Lineare Gleichungssysteme** Allgemeine Form: $A\underline{x} = \underline{b}$

mit Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$

und Spaltenvektoren $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Lösbarkeit

- $A\underline{x} = \underline{b}$ lösbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \underline{b}).$
(denn: Schreibe $A = (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$ mit $\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$
 $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} \Rightarrow \underline{b}$ ist Linearkombination der $\underline{a}_i$.)
- Lösung ist eindeutig $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n.$
(denn: $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow$ alle $\underline{a}_i$ linear unabhängig.
Aus $\sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} = \sum_i \underline{a}_i \lambda_i$ folgt $x_i = \lambda_i \quad \forall i$)

Lösung für $n \times n$ -Systeme

Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ allgemein lösbar (für alle $\underline{b}$),
wenn $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar.

Dann ist $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$

Cramersche Regel:

Definiere $A^{(k)}$: Matrix wie A , k -te Spalte ersetzt durch $\underline{b}.$

Dann ist Lösung von $A\underline{x} = \underline{b}$: $x_k = \det(A^{(k)}) / \det(A).$

(folgt nach Einsetzen von $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji} / \det(A)$ in $x_k = [A^{-1}\underline{b}]_k$).

Aufgaben:

- Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 & 7 \\ -2 & 3 & 11 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 7 \\ -1 & 9 & 19 & 12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

- Berechnen Sie $A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$ (Tip: Berechnen Sie zuerst AA^T .)

- Zeigen Sie: Für Inverse A^{-1} einer Matrix gilt $\det(A^{-1}) = 1/\det(A).$

- Berechnen Sie $A = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 3 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}$ für beliebige a_{ij} ($j > i$).

- Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -21 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 19 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 9x_1 & + & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \end{array}$$

2.4.5 Drehungen und Drehmatrizen

Erinnerung (2.4.1): Koordinaten eines Vektors $\vec{a}$ ändern sich bei Drehung des Koordinatensystems $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ gemäß $a' = \mathcal{D}a$ mit $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_{ij})$, $\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$.

Im Folgenden: Vertiefung der Diskussion von Drehmatrizen.

1) Charakteristika von Drehmatrizen

- **Orthonormal** : $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$ bzw. $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = \mathcal{D} \mathcal{D}^T = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} \text{(Begründung: } [\mathcal{D}^T \mathcal{D}]_{ik} &= \sum_j \mathcal{D}_{ij}^T \mathcal{D}_{jk} = \sum_j \mathcal{D}_{ji} \mathcal{D}_{jk} = \sum_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j)(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k) \\ &= \vec{e}_i \cdot \sum_j \vec{e}'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \end{aligned}$$

Letzteres gilt, da $\vec{a} = \sum_j \vec{e}'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{a}) \forall \vec{a}$ und damit auch für $\vec{a} = \vec{e}_k$.

Folgerung für die Struktur von Drehmatrizen:

Spaltenvektoren v_i in $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ stehen senkrecht aufeinander und $|v_i| = 1$.

- **Determinante** : $\det(\mathcal{D}) = 1$.

(Begründung: $\det \mathcal{D} = \pm 1$ folgt aus $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = \mathbb{1}$. Vorzeichen + folgt daraus, dass Σ, Σ' beides Rechtssysteme sind $\rightarrow$ lassen sich kontinuierlich ineinander überführen.

Konkret: $\mathcal{D}$ parametrisierbar durch drei Winkel, $\mathcal{D}(\phi, \theta, \xi)$ mit $\mathcal{D}(0, 0, 0) = \mathbb{1} \Rightarrow \det(\mathcal{D}(0, 0, 0)) = 1$. Drehung $\mathcal{D}$ sind stetige Funktionen dieser Winkel, damit ist auch $\det(\mathcal{D}(\phi, \theta, \xi))$ stetig und springt nicht einfach von +1 nach -1 um.)

Bemerkung: Es gibt auch Transformationen T mit $T^T T = \mathbb{1}$ und $\det(T) = -1$, z.B. Spiegelung am Ursprung, $T = -\mathbb{1}$. In diesem Fall geht Rechtssystem in Linkssystem über.

2) Wirkung von Drehungen auf physikalische Größen (teilweise Wdh.)

physikalischer Skalar Φ : Invariant unter Drehung, $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi$.

physikalischer Vektor v : $v \rightarrow v' = \mathcal{D}v$.

physikalischer Tensor 2. Stufe t : $t \rightarrow t' = \mathcal{D}t\mathcal{D}^T$.

Kann nun auch begründet werden aus Transformationsverhalten physikalischer Vektoren: Tensor angewandt auf Vektor gibt Vektor (z.B. Trägheitstensor: $I\vec{\omega} = \vec{L}$.)

$$\Rightarrow (tv) \rightarrow (tv)' = \mathcal{D}(tv) = \mathcal{D}t\mathcal{D}^T v'.$$

Verallgemeinerung für Tensoren n -ter Stufe leichter in Indexschreibweise: $t_{ijk\dots} \rightarrow t'_{ijk\dots} = \sum_{i'j'k'\dots} \mathcal{D}_{ii'} \mathcal{D}_{jj'} \mathcal{D}_{kk'} \dots t_{ijk\dots}$.

Speziell **Invarianten**: Aus Tensoren abgeleitete Skalare.

Vektoren : Betrag

Tensoren 2. Stufe : Spur und Determinante

(jeweils nicht schwer zu zeigen).

3) Einordnung der Drehmatrizen, Drehgruppe

Klassifizierung reeller Matrizen

- (i) **Invertierbare $n \times n$ -Matrizen** bilden Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$
- (ii) Matrizen $U \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $U^{-1} = U^T$ bilden Gruppe:
Orthogonale Gruppe $O(n)$
- (iii) Matrizen $\mathcal{D} \in O(n)$ mit $\det(\mathcal{D}) = +1$ bilden Gruppe:
Spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$.

NB: Ähnliche Strukturen gibt es auch bei den komplexen Matrizen:

Matrizen U mit $U^{-1} = U^*T$ bilden **unitäre Gruppe $U(n)$.**

Matrizen $U \in U(n)$ mit $\det(U) = 1$ bilden **spezielle unitäre Gruppe $SU(n)$.** Spielen wichtige Rolle in der Elementarteilchenphysik.

Aufgaben:

- Überprüfen Sie: Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ eine Drehung?
- Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben in einem Koordinatensystem Σ die Koordinaten $a = (0, -2, 0)$ und $b = (35 - 4)$.
Betrachten Sie eine Drehung $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, die das Koordinatensystem Σ in ein Koordinatensystem Σ' überführt.
Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Koordinatensystem Σ' .
Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$ mit den Koordinaten aus Σ und aus Σ' . Das Ergebnis muss gleich sein. Warum?
- Zeigen Sie: Mit $U \in O(n)$ und $A' = UAU^T$ gilt: $\det(A') = \det(A)$ und $\text{Sp}(A') = \text{Sp}(A)$.

2.4.6 Das Eigenwertproblem

Beispiel: Trägheitstensor I des Kreisels verknüpft Drehimpuls $\vec{L}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$: $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Es gibt offensichtlich eine Drehachse, für die gilt $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ (die Symmetrieachse). Für diese gilt $I\vec{\omega} = \theta\vec{\omega}$.

Das Trägheitsmoment θ ist ein Beispiel für einen Eigenwert

1) Eigenwerte und Eigenvektoren

Allgemein: Gegeben $n \times n$ -Matrix M

Einen Vektor $v \neq 0$ mit $Mv = \lambda v$ (λ : Zahl) nennt man **Eigenvektor**. Der zugehörige Wert λ heißt **Eigenwert**. Die Gleichung $Mv = \lambda v$ ist eine **Eigenwertgleichung**.

Eigenwertgleichungen spielen eine wichtige Rolle in allen Bereichen der Physik.

2) Bestimmung von Eigenwerten: Charakteristisches Polynom

Forme Eigenwertgleichung $Mv = \lambda v$ um zu $(M - \lambda \mathbb{1})v = 0$ ($v \neq 0$).

$\Rightarrow (M - \lambda \mathbb{1})$ ist nicht invertierbar. $\Rightarrow \det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$.

Folgerung:

Definiere **charakteristisches Polynom** $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1})$ (Polynom vom Grad n). Eigenwerte von M können dadurch bestimmt werden, dass man die Nullstellen λ_i von $\chi_M(\lambda)$ ermittelt.

Den zu einem Eigenwert λ_i zugehörigen **Eigenvektor** v_i erhält man dann durch Lösung des Gleichungssystems $(M - \lambda_i \mathbb{1})v_i = 0$.

3) Eigenvektoren und Eigenräume

- Es gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.

Begründung: Die Behauptung gelte für $(k-1)$ Eigenvektoren zu verschiedenen $(k-1)$ Eigenwerten λ_j . Der k -te Eigenvektor zum Eigenwert λ_k , sei linear abhängig: $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j v_j$.

Dann folgt einerseits $Mv_k = M \sum c_j v_j = \sum c_j Mv_j = \sum c_j \lambda_j v_j$

und andererseits $Mv_k = \lambda_k v_k = \lambda_k \sum c_j v_j = \sum c_j \lambda_k v_j$,

Also zusammen $\sum c_j (\lambda_j - \lambda_k) v_j = 0$. Da die v_j (für $j < k$) linear unabhängig sind, folgt $c_j = 0 \forall j$ oder $\lambda_k = \lambda_j$ für mindestens ein j .

- Ist M symmetrisch, dann stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.

Begründung: Sei v_j Spaltenvektor, v_j^T der zugehörige Zeilenvektor.

Mit $Mv_j = \lambda_j v_j$ folgt $v_j^T M^T = v_j^T \lambda_j$. Weiterhin $v_j^T v_k = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$ (Skalarprodukt). Damit ist einerseits $v_k^T Mv_j = v_k^T \lambda_j v_j = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_j \lambda_j$ und andererseits $v_k^T M^T v_j = \lambda_k \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$, also zusammen $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k (\lambda_j - \lambda_k) = 0$.

Damit ist entweder $\lambda_j = \lambda_k$ oder $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ (d.h., $\vec{v}_j \perp \vec{v}_k$).

- Ist λ_j ein vielfacher Eigenwert, d.h. vielfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann kann es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_j geben. Mit $v_j^{(1)}$ und $v_j^{(2)}$ ist auch jede Linearkombination $c_1 v_j^{(1)} + c_2 v_j^{(2)}$ wieder Eigenvektor. Die Gesamtheit aller Eigenvektoren bildet also wieder einen Vektorraum, den "Eigenraum" des Eigenwerts. Dabei ist die Dimension des Eigenraums maximal die Vielfachheit des Eigenwerts (z.B. doppelter Eigenwert: – Eigenraum kann maximal eine Hyperfläche sein).

4) Diagonalisierung

Allgemein

Eine $n \times n$ -Matrix M habe n verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren v_j zu Eigenwerten λ_j (gilt z.B. sicher dann, wenn sie n verschiedene Eigenwerte hat).

Konstruiere Matrix $V = (v_1, \dots, v_n)$ aus den Spaltenvektoren v_j . Invertierbar, da die v_j linear unabhängig ($\det(V) \neq 0$).

$$\text{Es gilt: } MV = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: V\Lambda.$$

$$\Rightarrow \boxed{V^{-1}MV = \Lambda} \text{ mit } \Lambda: \text{Diagonalmatrix}$$

Transformationen $M \rightarrow V^{-1}MV$ heißen **Ähnlichkeitstransformation**. Falls es eine Ähnlichkeitstransformation gibt, die M diagonal macht, heißt M **diagonalisierbar**.

Speziell symmetrische Matrizen

Siehe **3**): Vektoren v_j stehen senkrecht aufeinander, können natürlich auch normiert werden ($|v_j| = 1$).

$\rightarrow V$ ist orthonormal, entspricht einer Drehmatrix, ggf. gekoppelt mit Spiegelung (falls $\det(V) = -1$).

$$\rightarrow \boxed{\Lambda = V^T M V} \text{ bzw. } \boxed{M = V \Lambda V^T}.$$

M geht aus Λ durch Drehung hervor.

Spektralsatz : Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

$\rightarrow$ Für symmetrische Tensoren (wie z.B. der Trägheitstensor) läßt sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem finden, in dem die (x, y, z) -Achsen Eigenvektoren sind.

(„Hauptachsen“ und „Hauptachsentransformation“)

2.4.7 Funktionen von Matrizen

Zum Abschluss: Mit $n \times n$ -Matrizen kann man im Prinzip fast so hantieren wie mit Zahlen. Man muss nur darauf achten, dass sie nicht kommutieren (i.A. $AB \neq BA$). Insbesondere kann man Funktionen von Matrizen bilden.

- Potenzen: Klar (M^n , ggf. M^{-n} , falls M invertierbar).
- Allgemein (siehe Kapitel 3) lassen sich die meisten Funktionen durch Potenzreihen darstellen: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$
 $\Rightarrow$ Verallgemeinerung auf Matrizen: $f(M) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M^k$.
- Damit läßt sich für diagonalisierbare Matrizen M noch eine weitere Konstruktionsvorschrift motivieren:

$$\text{Sei } M = V\Lambda V^{-1} \text{ und } f(M) = \sum c_k M^k = \sum c_k (V\Lambda V^{-1})^k = V(\sum c_k \Lambda^k) V^{-1}.$$

$$\text{Mit } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ folgt } \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow f(M) = V \left(\sum c_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right) V^{-1} = V \left(\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \right) V^{-1}.$$

Diese Vorschrift läßt sich auch unabhängig von der Potenzreihendarstellung von $f(x)$ anwenden.

Kapitel 3

Infinitesimalrechnung

Rechnen mit dem Unendlichen, Gegenstand der Analysis

Entwicklung war einerseits motiviert aus der Physik.

Macht andererseits moderne Physik überhaupt erst möglich!

Erste Begriffe schon bei Funktionen (Grenzwerte, Stetigkeit)

3.1 Differentialrechnung

3.1.1 Die Ableitung

1) Differenzenquotient und Differentialquotient

Betrachte als konkretes Beispiel einen Wagen, der entlang einer geraden Straße fährt. Zur Zeit t hat er die Strecke $s(t)$ zurückgelegt.

Frage: Was ist seine Geschwindigkeit?

Erste Antwort: Mittlere Geschwindigkeit = Strecke/Zeit

entspricht $\bar{v} = \frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$: Differenzenquotient.

Das ist aber *nicht*, was der Tacho anzeigt.

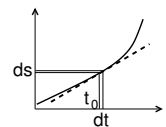
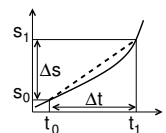
Zweite Antwort: Momentangeschwindigkeit = Tacho-Wert

→ im Prinzip Differenzenquotient, aber so,

dass die beiden Zeiten t_0, t_1 sehr nahe aneinander sind.

→ Grenzwert $\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} =: \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_0}$: Differentialquotient.

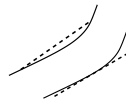
| Leibniz-Schreibweise



Geometrische Interpretation:

Differenzenquotient: Sekante

Differentialquotient: Tangente



Allgemein: Gegeben Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen x .

→ **Differentialquotient:**

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heißt **Ableitung** nach x .

Alternative Schreibweisen: $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x_0} = f'(x_0)$ (Strich)

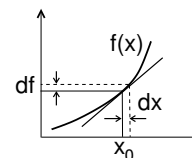
Speziell Ableitung nach der Zeit t : $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = \dot{f}(t_0)$ (Punkt)

2) Differential: Alternative Sichtweise

Betrachte Funktion $f(x)$ am Punkt x_0 .

Schätze ab $f(x_0 + \Delta x)$:

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Zuwachs } f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \Delta f(x) \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \text{Rest.} \end{aligned}$$



Rest verschwindet (auch relativ zum Zuwachs), für kleine $\Delta x \rightarrow 0$.

Im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ schreibt man

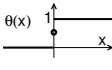
$$\boxed{f(x_0 + dx) = f(x_0) + df(x) \Big|_{x_0}} \text{ mit } \boxed{df(x) \Big|_{x_0} = f'(x_0) dx} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} dx.$$

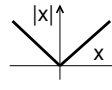
sieht formal aus wie "kürzen" ($\frac{df}{dx} dx = df$).

NB: Kürzen darf man bei Differentialquotienten natürlich eigentlich nicht. Trotzdem machen Physiker davon ausgiebig Gebrauch. Hintergrund ist genau dieses Denken in Differentialen, also: df entspricht einem realen Zuwachs von f (also einer echten, sehr kleinen Zahl).

3) Differenzierbarkeit

Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ muß existiert nicht immer.

Gegenbeispiele:  (unstetige Funktion)

 (Funktion mit Knick)

Wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion **differenzierbar**.

$$\left| \begin{array}{l} f(x) \text{ differenzierbar bei } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.} \end{array} \right.$$

4) Verallgemeinerung auf komplexe Funktionen

Definition von Differentialquotient und Differenzierbarkeit kann man direkt für Funktionen $f(z)$ von komplexen Zahlen z übernehmen.

$$\boxed{\left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0} = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}}$$

Geometrische Interpretation schwieriger, sonst keine Änderung.

$f(z)$ heißt differenzierbar bei z_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert.

NB: Im Komplexen ist Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung als im Reellen, da sich z von der ganzen komplexen Ebene an z_0 annähern kann.

5) Verallgemeinerung auf Funktionen mehrere Variablen

Gegeben sei z.B. eine Funktion von zwei Variablen $f(x, y)$.

→ Man kann ohne weiteres nach einer der Variablen, x oder y , ableiten und die andere dabei festhalten. Man muss nur festlegen, welcher. Das nennt man dann **partielle Ableitung**

Notation

Ableitung nach x : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$

Ableitung nach y : $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}$

Geschwungene Zeichen ∂ sagen aus:

Achtung, hier gibt es noch weitere Variablen.

→ Physiker dürfen nicht mehr ohne weiteres kürzen !!!

Dazu betrachte zugehöriges Differential –

Zuwachs von $f(x, y)$ bei infinitesimaler Verschiebung von (x, y) um (dx, dy) :

Zuwachs von $f(x, y)$ in x -Richtung: $\frac{\partial f}{\partial x} dx$

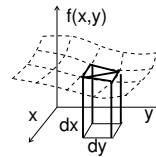
Zuwachs von $f(x, y)$ in y -Richtung: $\frac{\partial f}{\partial y} dy$

→ Gesamter Zuwachs: Summe der einzelnen Beiträge.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df \quad \text{mit} \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Man sieht: Einfaches Kürzen paßt hier nicht mehr.

Abgesehen davon ist die partielle Ableitung nichts grundsätzlich anderes als eine "normale" Ableitung.

6) Verallgemeinerung: Höhere Ableitungen

Gegeben Funktion $f(x)$

Ableitung $f'(x)$: Neue Funktion, kann man evtl. wieder ableiten

→ Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Beispiele: Ort $s(t)$ (Wagen)

Geschwindigkeit $v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$

Beschleunigung $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t)$

Allgemein n te Ableitung: $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$

Notation: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x)$.

Funktionen mehrere Variablen analog. Sei Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$

– Erste Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ gemäß 4)

– Zweite Ableitungen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Satz von Schwarz: Bei mehrfach differenzierbaren Funktionen kann man partielle Ableitungen vertauschen: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
(NB: Gilt nicht allgemein!)

7) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Zum Abschluss ein nützlicher Satz für reelle Funktionen:

Ist $f(x)$ stetig im Intervall $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$, dann folgt:

Es existiert ein Wert $x_0 \in]a, b[$, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

3.1.2 Elementare Beispiele

Explizite Berechnung der Ableitung einiger elementarer Funktionen. Aus diesen kann man später die meisten übrigen Ableitungen herleiten.

1) Potenzen: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Rechnung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [(x + \Delta x)^n - x^n] \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{binomische Formel: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{array} \right. \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots - x^n] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2)] = nx^{n-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

NB: Gilt auch für komplexe Funktionen $f(z) = z^n$.

2) Exponentialfunktion: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Rechnung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [e^{x+\Delta x} - e^x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} e^x (e^{\Delta x} - 1) \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot [\text{Steigung von } e^x \text{ bei } x = 0] \end{aligned}$$

Aber: Per Konstruktion hat e^x bei $x = 0$ die Steigung 1
(e^x schneidet die y -Achse im Winkel $\frac{\pi}{4}$).

$$\Rightarrow f'(x) = e^x f'(0) = e^x \cdot 1 = e^x \quad \checkmark$$

NB: Es wird sich zeigen, dass die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ bei $z = 0$ (wie auch bei allen anderen z) differenzierbar ist. Daher gilt $f'(0) = 1$ auch in der komplexen Ebene und die Rechnung funktioniert genau so auch für die komplexe Funktion e^z .

3) Trigonometrische Funktionen: $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)}$

Rechnung zu $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\sin(x + \Delta x) - \sin(x)] \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Additionstheorem: } \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{array} \right. \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)] \\ &= \sin(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Es gilt: } \cos(\Delta x) - 1 = -2\sin^2(\frac{\Delta x}{2}). \text{ Setze } \Delta x' = \Delta x/2 \end{array} \right. \\ &= -\sin(x) \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\Delta x')}{\Delta x'} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Es gilt: } \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin(\phi)}{\phi} = 1, \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\phi)}{\phi} = 0 \text{ (Beweis siehe unten)} \end{array} \right. \\ \Rightarrow f'(x) &= \cos(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Rechnung zu $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$ geht analog.

Nachtrag Beweis $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin(\phi)}{\phi} = 1$, $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\phi)}{\phi} = 0$

(ohne Verwendung von Ableitungen, sonst beißt sich die Katze in den Schwanz.)

Beweis nach l'Hospital zunächst für $\phi > 0$

Betrachte Kreissegment mit einem einbeschriebenen

und einem umfassenden rechtwinkligen Dreieck

– Fläche kleines Dreieck: $\frac{1}{2} \cos(\phi) \sin(\phi)$

– Fläche Kreissegment: $\frac{\phi}{2} \pi = \frac{1}{2} \phi$

– Fläche großes Dreieck: $\frac{1}{2} \tan(\phi)$

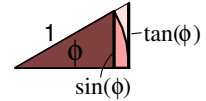
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos(\phi) \sin(\phi) \leq \frac{1}{2} \phi \leq \frac{1}{2} \tan(\phi) (= \frac{1}{2} \sin(\phi) / \cos(\phi))$$

$$\Rightarrow \cos(\phi) \leq \phi / \sin(\phi) \leq 1 / \cos(\phi) \Rightarrow 1 / \cos(\phi) \geq \sin(\phi) / \phi \geq \cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \underbrace{1 / \cos(\phi)}_1 \geq \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \sin(\phi) / \phi \geq \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \underbrace{\cos(\phi)}_1$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \sin(\phi) / \phi = 1 \text{ und } \lim_{\phi \rightarrow 0^+} \sin^2(\phi) / \phi = 0$$

Beweis für $\phi < 0$ geht analog.



3.1.3 Differentiationsregeln

Von den elementaren Funktionen aus Abschnitt 1.3.1 haben wir die Potenzen x^n und die Exponentialfunktion e^x abgeleitet.

Es fehlen noch: Polynome, rationale Funktionen, Wurzeln, Logarithmen, etc.

Diese können jedoch aus den bekannten Ableitungen 3.1.2 unter Benutzung allgemeiner Regeln hergeleitet werden.

1) Linearität

$$f(x) = a g(x) + b h(x) \Rightarrow f'(x) = a g'(x) + b h'(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [a g(x + \Delta x) + b h(x + \Delta x) - a g(x) - b h(x)] \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [g(x + \Delta x) - g(x)] + b \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [h(x + \Delta x) - h(x)] \\ &= a g'(x) + b h'(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) Produktregel

$$f(x) = g(x) h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [g(x + \Delta x) h(x + \Delta x) - g(x) h(x)] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [(g(x + \Delta x) - g(x)) h(x + \Delta x) + g(x) (h(x + \Delta x) - h(x))] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\rightarrow g'(x)} \underbrace{h(x + \Delta x)}_{\rightarrow h(x)} + g(x) \underbrace{\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}}_{\rightarrow h'(x)} \\ &= g'(x) h(x) + g(x) h'(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

3) Inversenregel

$$f(x) = 1/g(x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x)/g(x)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Denn: } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) g(x)} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \underbrace{\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\rightarrow g'(x)} \underbrace{\frac{1}{g(x + \Delta x) g(x)}}_{\rightarrow 1/g(x)^2} = - \frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

4) Quotientenregel

$$f(x) = g(x)/h(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) h(x) - g(x) h'(x)}{h(x)^2}$$

Ergibt sich aus Kombination von Produktregel und Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx} \left(g \cdot \frac{1}{h} \right) = \frac{d}{dx} \left(g \cdot \frac{1}{h} \right) = g \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{1}{h}}_{-h'/h^2} + \left(\frac{d}{dx} g \right) \frac{1}{h} = \frac{1}{h^2} (-gh' + g'h) \quad \checkmark$$

5) Kettenregel $\boxed{f(x) = f(g(x)) \Rightarrow f'(x) = f'(g) g'(x)}.$

Leibniz-Schreibweise: $\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}}$. $\rightarrow$ Wieder ein Fall von "kürzen".

Beweisskizze mit Differentialen:

$$\begin{aligned} z = f(y) &\Rightarrow \Delta z = \Delta f(y) = f'(y) \Delta y + \text{Rest} \\ y = g(x) &\Rightarrow \Delta y = \Delta g(x) = g'(x) \Delta x + \text{Rest} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta y}{g'(y)} - \frac{\text{Rest}}{g'(x)} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta x} \xrightarrow[\text{Reste verschwinden}]{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{f'(y) \Delta y}{\Delta y / g'(x)} = f'(y) g'(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

7) Umkehrfunktionsregel

Sei $y = f(x)$ differenzierbar und umkehrbar $\rightarrow x = g(y)$.

Dann ist $g(y)$ differenzierbar und $\boxed{g'(y) = 1/f'(x)} \Big|_{x=g(y)}.$

Leibniz-Schreibweise: $f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow g'(y) = \frac{dx}{dy} = 1 / (\frac{dy}{dx} = 1/f'(x)).$

$\rightarrow$ Wieder so ähnlich wie "Kürzen".

Beweisskizze ohne Kürzen:

$$\begin{aligned} x = g(f(x)) &\Rightarrow \frac{d}{dx} = 1 \& \frac{d}{dx} = g'(f(x)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &\Rightarrow 1 = g' f' \Rightarrow g' = 1/f' \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.1.4 Anwendungen der Differentiationsregeln

Mit Hilfe der Differentiationsregeln können aus den elementaren Ableitungen von Abschnitt 3.1.3 die Ableitungen fast aller übrigen Funktionen berechnet werden, zum Beispiel:

- 1) Polynome: $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$
über $\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}$ und Linearitätsregel
 $\Rightarrow P'(x) = \sum_{k=0}^n a_k k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots$
- 2) Rationale Funktionen: $f(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P und Q
über 1) und Quotientenregel
- 3) Wurzeln: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$
über $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ und Umkehrfunktionsregel $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow x = y^n$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy} = 1 / (n y^{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$
- 4) Natürlicher Logarithmus: $f(x) = \ln(x)$
über $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ und Umkehrfunktionsregel $y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y$
 $\Rightarrow f'(x) = 1 / \frac{dx}{dy} = 1 / e^y = 1 / e^{\ln x} = 1/x.$
- 5) Allgemeine Potenz: $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
über $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ und Kettenregel $f(x) = e^y$ mit $y = \alpha \ln x$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = e^y \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

3.1.5 Tabelle wichtiger Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	Einschränkungen
const.	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\ln(x)$	$1/x$	$x \neq 0$
r^x	$r^x \ln(r)$	$0 < r \in \mathbb{R}$
${}_b \log(x)$	$1/(x \ln(b))$	$0 < b \in \mathbb{R}, x \neq 0, b \neq 1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq (z + 1/2)\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-1/\sin^2(x)$	$x \neq z\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-\pi/2 < \arcsin(x) < \pi/2, x < 1$
$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$0 < \arccos(x) < \pi, x < 1$
$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$	$-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-1/(1+x^2)$	$0 < \operatorname{arccot}(x) < \pi$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\tanh(x)$	$1/\cosh^2(x)$	
$\coth(x)$	$-1/\sinh^2(x)$	
$\operatorname{arsinh}(x)$	$1/\sqrt{1+x^2}$	
$\operatorname{arcosh}(x)$	$1/\sqrt{x^2-1}$	$0 < \operatorname{arcosh}(x), x > 1$
$\operatorname{artanh}(x)$	$1/(1-x^2)$	$ x < 1$
$\operatorname{arcoth}(x)$	$-1/(x^2-1)$	$ x > 1$

Aufgaben

Überprüfen Sie einige der Ableitungen in obiger Tabelle, z.B.

$$\tan(x), \cot(x), \arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x), \operatorname{arccot}(x), \\ \sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x), \operatorname{arsinh}(x), \operatorname{arcosh}(x), \operatorname{artanh}(x), \operatorname{arcoth}(x)$$

Berechnen die Ableitungen von $b^x, {}_b \log(x), x^x$.

Berechnen Sie einige der folgenden Ableitungen:

$$\sin^3(4x), \exp(-(x/a)^2), 1/\sqrt{ax^2+b}, \ln(3e^{2x}), \sqrt{1+\sqrt{x}}, \ln(x) \ln(\ln(x)) - \ln(x). \\ a \cosh\left(\frac{x-b}{a}\right), ax^2 e^{-bx}, 1/(1+(\frac{x}{a})^2), \left(\frac{\sin(x/a)}{x/a}\right)^2$$

Berechnen Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{\cosh^2(\omega t(x))-1}}{\cosh(\omega t(x))}\right), \frac{d^2}{da^2} f(g(a)), \frac{d^2}{dx^2} (\exp[(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2] - A), \frac{d}{dt} \ln \sqrt{f(\omega t) - xt}$$

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hôpital (siehe 1.3.2.6):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(7x)}{\tan(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{\sin(x)}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a}, \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \exp(2\pi - x)},$$

Berechnen Sie folgende partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z), \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2), \frac{\partial}{\partial x}(xyz), \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{2xy}{x^2+y^2} \\ q(p_1 p_2) = y(p_1, p_2) = 8p_1^{0.25} p_2^{0.75} \text{ (Cobb-Douglas Produktionsfunktion)}$$

Zeigen Sie: Für $q(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ gilt $q(x_1, x_2) = \frac{\partial q}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} x_2$.

Berechnen Sie das totale Differential der folgenden Funktionen:

$$f(x, y) = (x+y)e^x, f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, f(x, y) = e^{xy^2}, f(x, y) = 8x^2 y - 4x \exp(g(y)) \\ f(x_1, \dots, x_n) = \ln(\sum_{i=1}^n x_i^n), \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung der Funktionen

$$f(x, y) = \exp(xy(x^2 - y^2)) \text{ und } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials die Ableitung dy/dx für folgende implizit definierte Funktionen $y(x)$

$$xy^2 - 3x^2 = xy + 5$$

$$3y - 4 = x(y + 2)$$

Die Funktion $z(x, y)$ ist implizit durch die Gleichung $yz - \ln(z) = x + y$ definiert. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ mit Hilfe des totalen Differentials.

3.1.6 Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktion: Abbildung $\vec{V}(\lambda)$ von Skalar λ auf Vektor $\vec{V}$.

Typisches Beispiel aus der Physik: $\vec{r}(t)$ - Ort eines Teilchens als Funktion der Zeit $\rightarrow$ Trajektorie

3.1.6.1 Infinitesimalrechnung mit vektorwertigen Funktionen

Im Grunde keine Änderungen gegenüber vorher

1) Stetigkeit wie gehabt:

$$\vec{V}(\lambda) \text{ stetig bei } \lambda_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |\vec{V}(\lambda) - \vec{V}(\lambda_0)| < \epsilon \quad \forall |\lambda - \lambda_0| < \delta$$

2) Differentiation wie gehabt:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(\lambda + \Delta\lambda) - \vec{V}(\lambda)}{\Delta\lambda}, \text{ falls Grenzwert existiert.}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda) + \vec{b}(\lambda)) &= \frac{d\vec{a}}{d\lambda} + \frac{d\vec{b}}{d\lambda} \\ \left. \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(f(\lambda) \vec{a}(\lambda)) &= \frac{df}{d\lambda} \vec{a}(\lambda) + f \frac{d\vec{a}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda) \cdot \vec{b}(\lambda)) &= \frac{d\vec{a}}{d\lambda} \cdot \vec{b}(\lambda) + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{d\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda}(\vec{a}(\lambda) \times \vec{b}(\lambda)) &= \frac{d\vec{a}}{d\lambda} \times \vec{b}(\lambda) + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{d\lambda} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Varianten} \\ \text{der} \\ \text{Produktregel} \end{array} \end{aligned}$$

Beispiele: Ort $\vec{r}(t)$ (Trajektorie)

$$\rightarrow \text{Geschwindigkeit } \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ Beschleunigung } \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Aufgaben

- Gegeben sei die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines Teilchens. Berechnen Sie die Ableitung nach der Zeit $f'(t)$ für die Funktionen $f(t) = \vec{r}(t)^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$, $f(t) = |\vec{r}|$, $f(t) = 1/|\vec{r}|$, $f(t) = \exp(-|\vec{r}|/a)$.
- Betrachten Sie ein Teilchen mit der Trajektorie $\vec{r}(t) = A(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ t \end{pmatrix}$
 - Zeichnen Sie die Trajektorie für die Fälle $A(t) = \text{konstant}$ und $A(t) = at$.
 - Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung.
- Betrachten Sie ein Teilchen mit der Trajektorie $\vec{r}(t) = \cos(\omega t)\vec{e} + \sin(\omega t)\vec{e}'(t)$ mit $\vec{e}' = (\vec{e} \times \vec{n}(t))/|\vec{e} \times \vec{n}(t)|$, $\vec{e}$ konstant, $\vec{e}$ und $\vec{n}(t)$ Einheitsvektoren ($|\vec{e}| = |\vec{n}(t)| \equiv 1$).
 - Berechnen Sie die Geschwindigkeit
 - Betrachten Sie speziell den Fall, dass $\vec{n}$ immer senkrecht auf $\vec{e}$ steht. Berechnen Sie dafür auch noch die Beschleunigung.

3.1.6.2 Speziell Raumkurven

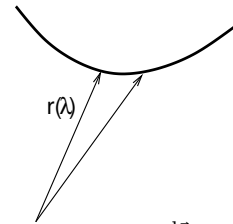
Beispiel: durchhängende Leine

1) Parametrisierung

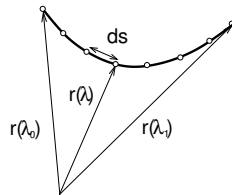
Raumkurve wird beschrieben durch vektorwertige Funktion $\vec{r}(\lambda)$, wobei Skalar λ alle Werte in einem vorgegebenem Intervall $[\lambda_0, \lambda_1]$ einnimmt.

Falls λ so gewählt werden kann, dass $\vec{r}(\lambda)$ differenzierbar ist und $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \neq 0$ für alle λ , spricht man von einer **glatten** Kurve.

Im Folgenden setzen wir bei glatten Kurven voraus, dass die Parametrisierung $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \neq 0 \forall \lambda$ erfüllt.



2) Bogenlänge



Gegeben glatte Kurve $\vec{r}(\lambda)$

Frage: Länge der Kurve?

→ Setzt sich zusammen aus infinitesimalen Stücken der Länge $ds = |d\vec{r}|$.

Länge ergibt sich aus Summe dieser infinitesimalen Stücke, d.h. Integral

$$\Rightarrow L = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ds = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |d\vec{r}| = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda.$$

(Integral: bekannt aus der Schule, sonst siehe 3.3).

Analog kann man Bogenlänge $s(\lambda)$ des Teils der Kurve zwischen λ_0 und λ bestimmen. $s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda$.

$s(\lambda)$ wächst wegen $\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| \neq 0$ streng monoton mit λ an.

⇒ eindeutig umkehrbar ($\lambda(s)$).

→ man kann statt λ auch s zur Parametrisierung der Kurve verwenden:

$\vec{r}(\lambda) \rightarrow \vec{r}(\lambda(s)) = \vec{r}(s)$. → **natürliche Parametrisierung**.

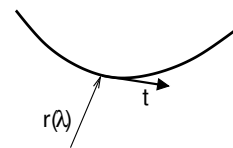
3) Tangentenvektor

Gegeben glatte Kurve $\vec{r}(\lambda)$

Tangentenvektor $\vec{t}$:

Einheitsvektor in Richtung $\frac{d\vec{r}}{d\lambda}$

$$\Rightarrow \vec{t} = \frac{d\vec{r}/d\lambda}{|d\vec{r}/d\lambda|}; \quad \text{speziell } \lambda = s: \quad \boxed{\vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$



4) Krümmung und Torsion

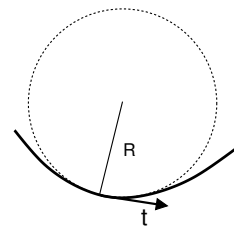
• **Krümmung** κ : Änderung von $\vec{t}$ mit s : $\boxed{\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|}$,

$R = 1/\kappa$ ist **Krümmungsradius**.

Definiere **Normalenvektor**: $\boxed{\vec{n} = \frac{d\vec{t}/ds}{|d\vec{t}/ds|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{t}}{ds}}$

zeigt in Richtung Krümmungsradius.

NB: $\vec{n}$ steht senkrecht auf $\vec{t}$ (da $|\vec{t}| = 1$).



- **Schmiegeebene:**

Krümmung anschaulich: Kreis, der sich an Raumkurve schmiegt.

Ebene, in der dieser Kreis liegt, heißt Schmiegeebene.

Charakterisiert durch Vektor $\vec{b}$, der senkrecht darauf steht.

$$\rightarrow \text{Binormalenvektor } \boxed{\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}}$$

(Kreuzprodukt, da $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{t}$ und $\vec{n}$ stehen muss.)

- **Torsion** τ : Änderung der Schmiegeebene, bzw. $\vec{b}$, entlang s : $\boxed{\tau = \left| \frac{d\vec{b}}{ds} \right|}$,
 $\sigma = 1/\tau$ heißt **Torsionsradius**.

5) Begleitendes Dreibein

Die Vektoren $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ aus 3) und 4) bilden zusammen ein orthogonales Rechtsystem. Sie können als ein entlang der Kurve mitbewegtes Koordinatensystem benutzt werden.

Änderung der Vektoren als Funktion von s : **Frenetsche Formeln**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \end{aligned}}$$

Aufgaben

- Beweisen Sie die Frenetschen Formeln
 (Hinweis: Zeigen Sie erst und benutzen Sie dann $\frac{d\vec{n}}{ds} \vec{t} + \vec{n} \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$).
- Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} \cos(a\lambda) \\ \sin(a\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Bestimmen Sie den Tangentenvektor $\vec{t}(\lambda)$ als Funktion von λ
 - Bestimmen Sie das Bogenlängenelement ds
 - Bestimmen Sie die Krümmung als Funktion von λ im Grenzfall $\lambda \gg 1$.

3.1.7 Extremwertaufgaben

Wichtige Anwendung von Ableitungen:

Bestimmung der Extrema (Maxima, Minima, Sattelpunkte) einer Funktion.

Gegeben: Mehrdimensionale Funktion $f(x_1 \dots x_n)$.

Gesucht: Extrema dieser Funktion in kompaktem (n -dimensionalem) Gebiet Ω .

NB: Die Extrema können in dem Gebiet liegen oder auf dessen Rand $\partial\Omega$. Diese Fälle müssen separat behandelt werden. Weiterhin könnte es auch sein, dass noch eine Nebenbedingung erfüllt sein muss (z.B. Maximierung der Funktion auf dem Rand).

1) Extrema im Inneren des Gebietes (ohne Nebenbedingungen)**Lokalisierung** der Extrema:

Am Extremum muss in jeder Richtung die Steigung Null sein:

$\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen verschwinden: $\partial f / \partial x_i = 0$ für alle i .

Folgerung: Differential verschwindet in alle Richtungen,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \forall dx_i.$$

Damit ist noch nicht klar, was für eine Art Extremum man hat
(Maximum, Minimum, Sattelpunkt?)

Klassifizierung der Extrema:

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ habe ein Extremum bei $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Betrachte Zuwachs Δf von f bei kleiner Verschiebung $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.

$$(\Delta f = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))$$

Vorgriff Kapitel 3.2 (Taylor-Reihen): Zuwachs ist gegeben durch

$$\Delta f = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n}}_{0 \text{ laut Voraussetzung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} \Delta x_i \Delta x_j}_{=: H_{ij}} + \text{Rest},$$

Rest geht bei $\Delta x_i \rightarrow 0$ schneller als $(\Delta x)^3$ nach Null

$\leadsto$ Art des Extremums wird von zweiten Ableitungen bestimmt,

genauer gesagt der **Hesse-Matrix** $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

- Minimum: Falls H_{ij} positiv definit,
d.h. $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j > 0$ für jede Wahl von $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.
- Maximum: Falls H_{ij} negativ definit,
d.h. $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j < 0$ für jede Wahl von $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.
- Sattelpunkt: Falls H_{ij} indefinit,
d.h. es gibt sowohl Richtungen $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ mit
 $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j > 0$ als auch mit $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j < 0$.

Alle anderen Fälle: Unbestimmt

(z.B. wenn H_{ij} nur positiv semidefinit, d.h.

$\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \geq 0$, aber $\sum_{i,j} H_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = 0$ kommt vor.)

In diesem Fall müssen höhere Ableitungen berechnet werden.

Formale Bestimmung am besten über "Eigenwerte" von H_{ij}

- Alle Eigenwerte positiv: Minimum
- Alle Eigenwerte negativ: Maximum
- Negative und Positive Eigenwerte: Sattelpunkt

2) Extrema am Rand

Eventuell wird die Funktion erst am Rand maximal oder minimal.

Beispiele:

- $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf dem Gebiet $|x| < 1, |y| < 1$ hat Maximum im Inneren des Gebietes ($x = y = 0$) und Minima an den Kanten ($x = \pm 1, y = \pm 1$)
- $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf dem Gebiet $x > 1$ hat Maximum am Rand (bei $x = 1, y = 0$) und kein Minimum (bzw. eines im Unendlichen)

$\rightarrow$ Dort muss dann nicht mehr für alle i gelten, dass $\partial f / \partial x_i$.

Differential $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ muss nur für Verschiebungen $(dx_1, \dots, dx_n)$ entlang des Randes verschwinden.

Manchmal muss df am Extremum überhaupt nicht verschwinden,
z.B. wenn das Extremum an einer Ecke des Randes ist
oder bei eindimensionalen Funktionen $f(x)$ am Rand.

→ Werte Verhalten am Rand separat aus. Vergleiche Maxima und Minima mit Extrema im Inneren des Gebietes.

NB: Die Beschränkung auf den "Rand" stellt Nebenbedingung dar.

Frage: Wie bestimmt man dann Extrema?

3) Umgang mit Nebenbedingungen

Fragestellung: Maximiere/Minimiere $f(x_1, \dots, x_n)$ mit den Nebenbedingungen $g_\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$.

Beispiele:

- i) Maximiere $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ auf der Geraden $y = x + 1$
⇒ Nebenbedingung $g(x, y) = y - x - 1 = 0$.
- ii) Bestimme Quader mit maximalem Volumen, den man in die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ einschreiben kann → Eckpunkte bei $\pm x, \pm y, \pm z$ mit Volumen $8xyz$.
→ zu maximierende Funktion: $f(x, y, z) = 8xyz$ (mit $x, y, z > 0$)
Nebenbedingung: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Verschiedene Lösungsansätze

- Elimination von Variablen: Nutze $g_\alpha \equiv 0$, um Variablen zu ersetzen.

Unsere Beispiele:

- i) $g(x, y) = y - x - 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$
Setze ein: $f(x, y) = f(x, x + 1) = \exp(-(x^2 + (x + 1)^2)) = \exp(-2x^2 - 2x - 1)$.
Extremum: $\frac{d}{dx} f(x, x) = 0 \Rightarrow x = -1/2 \Rightarrow y = x + 1 = 1/2 \checkmark$
- ii) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Setze ein: $f(x, y, z) = f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Extremum: $\partial f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \partial x = 0, \partial f(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \partial y = 0$
Lösung mühsam ohne Symmetrie-Annahmen (z.B. $x = y = z$)

⇒ Naheliegend, leider oft mühsam

- **Methode der Lagrange-Parameter** im allgemeinen eleganter

Vorüberlegung:

Der Satz Nebenbedingungen $g_\alpha \equiv 0$ definiert eine Hyperfläche im Raum (z.B. in den obigen Beispielen: (i) die Gerade $y = x + 1$ und (ii): Die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

Betrachte Menge G aller infinitesimale Verschiebungen

$(d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n)$ innerhalb dieser Hyperfläche

Wegen $g_\alpha \equiv 0$, gilt für diese: $dg_\alpha = \sum_i \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} d\tilde{x}_i = 0 \quad \forall \alpha$

Wir suchen Punkte $(x_1, \dots, x_n)$ in der Hyperfläche mit

$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\tilde{x}_i = 0$ für alle $(d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n) \in G$

(Kein Zuwachs für Verschiebungen in der Hyperfläche).

NB: Wir fordern *nicht* $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \forall (dx_1, \dots, dx_n)!$

(Diese Bedingung wäre zu streng.)

Trick: Führe freie Variablen λ_g ein.

Bestimme Lösungen von $d(f - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}) = 0 \quad \forall (dx_1, \dots, dx_n)$.

→ Liefert eine Schar von Lösungen $(x_1, \dots, x_n)$.

Suche darunter die Lösung, die in der Hyperfläche liegt.

Lösung erfüllt per Konstruktion $g_{\alpha} \equiv 0 \quad \checkmark$

und damit auch $dg_{\alpha} = \sum_i \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_i} d\tilde{x}_i = 0 \quad \forall (d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n) \in G$.

Da generell $d(f - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)$, folgt speziell

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\tilde{x}_i = 0 \quad \forall (d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n) \in G \quad \checkmark$$

⇒ Rezept:

- Definiere $I(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}(x_1, \dots, x_n)$

- Finde Extrema von I .

⇒ Schar von Lösungen $x_i(\lambda_{\alpha})$ mit $dI = 0 \quad \forall i$.

$$(dI = \sum_i dx_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_i} \right\})$$

- Wähle aus dieser Schar die, die die Nebenbedingungen erfüllen.

Illustriert an unseren Beispielen:

$$\text{i) } I = f(x, y) - \lambda g(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)) - \lambda(y - x - 1)$$

$$- \frac{\partial I}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2xe^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow x = -y$$

$$- \text{Kombiniere mit Nebenbedingung } y = x + 1 \quad \Rightarrow (x, y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

$$\text{ii) } I = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = 8xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$- \frac{\partial I}{\partial x} = 8yz - 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 4yz/x$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 8xz - 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 4xz/y$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = 8xy - 2\lambda z \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \lambda = 4xy/z$$

$$\Rightarrow xy/z = yz/x = zx/y = \lambda/4 \quad \Rightarrow xyz/z^2 = xyz/x^2 = xyz/y^2 \quad \Rightarrow x = y = z.$$

$$- \text{Kombiniere mit Nebenbedingung } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Geometrische Interpretation:

Fasse $\partial \mathbf{f} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ und $\partial \mathbf{g} = (\frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n})$ als Vektoren auf, ebenso $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$. Dann ist $df = \partial \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$

Forderung an Extrema: $\partial \mathbf{f} \cdot d\tilde{\mathbf{x}} = 0$ für alle $d\tilde{\mathbf{x}}$ in der durch $g_{\alpha} = 0$ definierten Hyperfläche $\Rightarrow \partial \mathbf{f}$ steht senkrecht auf Hyperfläche.

Ebenso stehen die Vektoren $\partial \mathbf{g}_{\alpha}$ senkrecht auf der Hyperfläche und sind idealerweise linear unabhängig.

⇒ Es gibt λ_{α} mit $\partial \mathbf{f} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial \mathbf{g}_{\alpha}$,

⇒ Für Extrema können λ_{α} gefunden werden mit $\partial \mathbf{f} - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial \mathbf{g}_{\alpha} = 0$.

Für diese gilt $d(f - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}) = (\partial \mathbf{f} - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \partial \mathbf{g}_{\alpha}) \cdot d\mathbf{x} = 0$ für alle $d\mathbf{x}$.

Aufgaben

- Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extremwerte und bestimmen Sie mit Hilfe der Hesse Matrix deren Art: $f(x, y) = xy - xy^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f(x, y) = x^2 + xy + y^4$,
- Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y) = x \exp(-(x^2 + y^2)/a^2)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$
- Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x + y$ mit der Nebenbedingung $4x^2 + y^2 = 20$.
- Bestimmen Sie das Volumen des größten Quaders, den man in das Ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ einschreiben kann.

3.2 Taylor-Entwicklung

Eine wichtige Anwendung der Differentiation:

Darstellung von Funktionen als **Potenzreihen**: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
 (Alternative Darstellung unendlich oft differenzierbarer Funktionen)

Beispiele für eine Darstellung als Potenzreihe

- Geometrische Reihe $f(x) = 1/(1-x) = \sum_k x^k$ (bereits bekannt!)
- Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = \sum_k \frac{1}{k!} x^k$ (wird unten gezeigt)

Fragen:

(i) Was bringt das?

Beispiel Exponentialfunktion

- Man kann sie überhaupt erst mal ausrechnen!
- Man kann sie nähern, wenn's nicht genau sein muss.

(z.B. $\exp(x) \approx 1 + x$)

(ii) Wann geht das? (d.h., wann gibt es eine Potenzreihendarstellung?)

(iii) Wie kommt man an die Koeffizienten a_k ?

(iv) Praktisch gesehen: Wie rechnet man mit solchen Reihen?

(Addition, Multiplikation, Differentiation)

Werden von rückwärts beantwortet.

Zuerst: Allgemeine Eigenschaften von (Potenz)reihen

3.2.1 Allgemein: Folgen und Reihen

3.2.1.1 Folgen

Formal: Folge ist eine unendliche Menge von durchnummerierten Zahlen

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \equiv (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit einem Bildungsgesetz

(oder: Abbildung von $\mathbb{N}_0$ (manchmal auch $\mathbb{N}$) in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Beispiele:

(a)	$(0, 1, 2, 3, \dots)$	$(a_n = n)$	
(b)	$(1, -1, 1, -1, \dots)$	$(a_n = (-1)^n)$	
(c)	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$	$(a_n = \frac{1}{n} \ n \in \mathbb{N})$	harmonische Folge
(d)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$	$(a_n = \frac{n}{n+1})$	
(e)	$(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots)$	$(a_n = \frac{1}{n!})$	(Konvention: $0! = 1$)
(f)	$(1, q, q^2, q^3, q^4, \dots)$	$(a_n = q^n)$	geometrische Folge
(g)	$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$	$(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$	Fibonacci-Folge

zu (f): Beschreibt Zinseszinsentwicklung

z.B. 3% Zins $\rightarrow$ nach 1 Jahr Vermehrung um Faktor 1.03

nach 2 Jahren Vermehrung um Faktor $(1.03)^2$

nach 3 Jahren Vermehrung um Faktor $(1.03)^3$

zu (g): Berühmte Folge. Sollte ursprünglich Kaninchenwachstum beschreiben. Heute u.a. in der Kryptographie benutzt.

Charakterisierung von Folgen (Eigenschaften) – ähnlich Funktionen (1.3.2)• **Beschränktheit**

$$(a_n) \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists B : |a_n| \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Analog: nach oben / nach unten beschränkt (für reelle Folgen)

• **Monotonie** (nur für reelle Folgen)

$$(a_n) \text{ monoton steigend} \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$$

$$(a_n) \text{ streng monoton steigend} \Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n$$

analog monoton / streng monoton fallend

• **Konvergenz**

Folge ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert bei $n \rightarrow \infty$ hat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N \geq 0 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N$$

Alternatives, äquivalentes Kriterium: **Cauchy-Kriterium**

$$(a_n) \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N \geq 0 : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m > N$$

(Vorteil: Leichter zu überprüfen, falls Grenzwert nicht bekannt.)

Nützliche Sätze (anschaulich klar: Beweis hier weggelassen)

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Eine Folge, die gleichzeitig monoton und beschränkt ist, hat einen Grenzwert.

Anwendung auf unsere Beispiele:

	beschränkt	monoton	Grenzwert
(a)	nach unten	steigend	–
(b)	✓	–	–
(c)	✓	fallend (streng)	0
(d)	✓	steigend (streng)	1
(e)	✓	fallend (nicht streng)	0
(f) ($q < 1$)	✓	fallend (streng)	0
(f) ($q = 1$)	✓	steigend/fallend (nicht streng)	1
(f) ($q > 1$)	–	steigend (streng)	–
(g)	nach unten	steigend (streng)	–

3.2.1.2 Reihen

Gegeben Folge (a_n) . Konstruiere neue Folge (S_m) mit $S_m = \sum_{n=0}^m a_n$

→ diese nennt man dann eine **Reihe**. (möglich auch: $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$)

Notation: Man schreibt dafür $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (bzw. $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

Dieser Ausdruck steht aber für die *Folge* (S_m) und sagt a priori noch nichts darüber aus, ob diese überhaupt einen Grenzwert S hat.

Falls der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n$ existiert, heißt die Reihe **konvergent**.

Falls sogar $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m |a_n|$ existiert, heißt sie **absolut konvergent**.

NB: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Zum Beispiel **Geometrische Reihe** (siehe 1.1.2)

$$S_m = \sum_{n=0}^m q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_m \begin{cases} \text{divergiert für } q \geq 1 \\ \text{konvergiert } (\rightarrow \frac{1}{1-q}) \text{ für } q < 1 \end{cases}$$

wird häufig benutzt, um andere Reihen abzuschätzen.

Weitere Beispiele: Reihen aus unseren Musterfolgen (3.2.1.1)

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots$ divergiert.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - \dots$ hat keinen Grenzwert.
(S_m alterniert zwischen 0 und 1).
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ divergiert.
(denn $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{unendlich oft}}$ divergiert.)
- (c') aber: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ konvergiert.
(denn $1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{30}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{56}} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$
weiterhin: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \underbrace{\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6}}_{< 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{13 \cdot 14}}_{< 4 \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} < \frac{1}{8}} + \dots < \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2$
 $\Rightarrow$ Zusammengefasste Reihe ist monoton (nur positive Elemente) und beschränkt $\rightarrow$ konvergent!) (de facto: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln(2)$)
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots$ divergiert (da Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$).
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$ konvergiert. (de facto: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$)
(denn $1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}}_{< \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots}_{< \frac{1}{2^3}} + \dots < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 3$.
also: Folge $S_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!}$ ist beschränkt und monoton $\rightarrow$ hat Grenzwert.)
- (f) : Geometrische Reihe, oben bereits diskutiert.
- (g) : Divergiert.

Aufgaben

- Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $a_n = \frac{2n}{3n+7}$, $a_n = \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+10000)}$,
 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $a_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t^n + t^{-n}}$ für $|t| < 1$, $|t| = 1$, $|t| > 1$.
- Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. (de facto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)
- Berechnen Sie $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$
- Diskutieren Sie folgenden "Beweis" der Behauptung $2 = 4$:
Betrachte die Gleichung $x^{x^{x^{\dots}}} = 2$ (Notation: $x^x = x^{(x^x)}$, $x^{x^{x^x}} = x^{(x^{(x^{x^x})})}$ etc.)
Lösungsversuch: Da $x^{x^{x^{\dots}}} = 2$, folgt $x^{(x^{x^{\dots}})} = x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
Nun die Gleichung $x^{x^{x^{\dots}}} = 4$
Lösungsversuch wie oben: Da $x^{x^{x^{\dots}}} = 4$, folgt $x^{(x^{x^{\dots}})} = x^4 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
Also folgt $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 2$ und $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}} = 4 \Rightarrow 2 = 4$ (?)
- Hier noch ein weiterer "Beweis", diesmal für $0 > \frac{1}{2}$.
Betrachte $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$
Wir haben gezeigt: $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$. Daraus folgt $S > \frac{1}{2}$.
Betrachte nun folgende Umformung:
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \dots) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{40} \dots) + \dots$
 $= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots)(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots)$
Mit $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$ folgt: $S = 0 > \frac{1}{2}$ (?)
(Hintergrund: Vorsicht beim Vertauschen von Termen in unendlichen Reihen! Nur erlaubt für *absolut* konvergente Reihen).

3.2.2 Kurzer Abriss über Potenzreihen

Funktionen der Form $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (x komplex, a_k reell oder komplex).

1) Konvergenz:

Erste Frage: Für welche x konvergiert eine solche Reihe überhaupt?

Antwort: Es gibt einen **Konvergenzradius** R , so dass gilt:

- Für $|x| < R$: Die Reihe ist **absolut konvergent**
d.h. schon $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergiert.
- Für $|x| > R$: Die Reihe konvergiert nicht.
- Für $|x| = R$: Die Reihe konvergiert oder divergiert.

(Beweis in zwei Schritten:

- Wenn $P(x_0)$ konvergiert, dann ist $P(x)$ absolut konvergent für $|x| < |x_0|$
denn: $P(x_0)$ konvergent $\Rightarrow a_k x_0^k$ beschränkt $\Rightarrow \exists C$ mit $|a_k x_0^k| < C \forall k$
 $\Rightarrow$ Für $q := \frac{|x|}{|x_0|} < 1$ gilt: $|a_k x^k| = |a_k x_0^k| \left| \frac{x}{x_0} \right|^k \leq C q^k$
 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{C}{1-q}$ konvergiert.
 - Wenn $P(x_1)$ divergiert, dann divergiert $P(x)$ für $|x| > |x_1|$
(denn: wenn $P(x)$ konvergent wäre, dann nach (i) auch $P(x_1)$.)
- (i) und (ii) zusammengefasst $\Rightarrow$ Es existiert ein Konvergenzradius. $\checkmark$)

Bemerkung: Sofern die Reihe konvergiert, ist sie bei $|x| = R$ auch stetig
(**Abelscher Grenzwertsatz**).

Berechnung des Konvergenzradius oft ganz einfach:

- **Quotientenkriterium:** $\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$
(falls Grenzwert existiert)

(Beweis: Nimm an $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert.

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists k_0 > 0 : \xi'' := \xi - \delta < \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < \xi' := \xi + \delta \forall k > k_0$$

Sei nun $\xi|x| < 1$. Wähle δ so, dass $\xi'|x| < 1 \Rightarrow \exists q$ mit $\xi'|x| < q < 1$

$$\Rightarrow |a_{k+1} x^{k+1}| < |a_k x^k| q < |a_{k_0}| q^{k-k_0} \forall k > k_0. \text{ Schätze } \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k \text{ ab.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k < |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} = |a_{k_0}| \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert.}$$

Sei $\xi|x| > 1$. Wähle δ so, dass $\xi''|x| > 1 \Rightarrow \exists Q$ mit $\xi''|x| > Q > 1$

$$\Rightarrow |a_{k+1} x^{k+1}| > |a_k x^k| Q > |a_{k_0}| Q^{k-k_0} \forall k > k_0.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k > \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k > |a_{k_0}| \sum_{k=k_0}^{\infty} Q^{k-k_0} \text{ divergiert.})$$

- **Wurzelkriterium:** $\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$
(falls Grenzwert existiert)

(Beweis: Nimm an $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert.

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists k_0 > 0 : \xi'' := \xi - \delta < \sqrt[k]{|a_k|} < \xi' := \xi + \delta \forall k > k_0$$

Sei nun $\xi|x| < 1$. Wähle δ so, dass $\xi'|x| < 1 \Rightarrow \exists q$ mit $\xi'|x| < q < 1$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} |x| < \xi'|x| < q < 1 \forall k > k_0. \text{ Schätze } \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k \text{ ab.}$$

$$\Rightarrow |a_k| |x|^k < q^k \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k < \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert.}$$

Sei $\xi|x| > 1$. Wähle δ so, dass $\xi''|x| > 1 \Rightarrow \exists Q$ mit $\xi''|x| > Q > 1$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} |x| > \xi''|x| > Q > 1 \forall k > k_0$$

$$\Rightarrow |a_k| |x|^k > Q^k \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| |x|^k > \sum_{k=k_0}^{\infty} Q^k \text{ divergiert.})$$

Beispiele:

- Geometrische Reihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, d.h. $a_k = 1 \forall k$
 $\Rightarrow R = 1$ nach beiden Kriterien.
- Exponentialfunktion: $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, d.h. $a_k = \frac{1}{k!}$
 Quotientenkriterium: $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k+1} \right| = 0$
 $\Rightarrow R = \infty$
- Harmonische Reihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, d.h. $a_k = \frac{1}{k}$
 Quotientenkriterium: $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1$
 $\Rightarrow R = 1$

Fehlerabschätzung: Wann kann man eine Reihe abbrechen?

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Betrachte Restglied $R_n(x) = P(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

- **Lagrangesche Abschätzung:** $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max_{|t| < |x|} |f(t)|$.
- Praktische Abschätzung mittels geometrischer Reihe
 Falls $|a_{k+1}| < |a_k|$ für $k > n$ und $|x| < 1$, folgt $|R_n(x)| \leq a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Aufgaben

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^k}{(k+m)^n} x^k \text{ für festes } n, m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n! x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+9^n} x^n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} n^n x^n$$

2) Rechnen mit Potenzreihen

- Addieren, Subtrahieren: Gliedweise
 $\sum a_k x^k \pm \sum b_k x^k = \sum (a_k \pm b_k) x^k$
- Multiplizieren: Nur bei *absolut konvergenten* Reihen erlaubt. Dann wird ausmultipliziert wie bei Polynomen. Ebenso kann man dividieren, sofern nicht durch Null geteilt wird.
 (Im Allgemeinen wird sich dabei der Konvergenzradius ändern).
- Substitution: *Absolut konvergente* Reihen können ineinander substituiert werden.
 (Im Allgemeinen wird sich dabei der Konvergenzradius ändern).
- Differentiation: Gliedweise.
 $f(x) = \sum a_k x^k \rightarrow f'(x) = \sum_k a_k k x^{k-1}$ etc.
- Eindeutigkeit Wenn $\sum a_k x^k \equiv \sum b_k x^k$ auf einem Intervall um $x = 0$, dann ist $a_k = b_k \forall k$.
 $\Rightarrow$ erlaubt Koeffizientenvergleich.

Äquivalent: $\sum c_k x^k \equiv 0$ auf einem Intervall $\Rightarrow c_k = 0 \forall k$.

(Folgt letztlich daraus, dass alle Ableitungen Null sind.)

NB: Interpretation innerhalb der **linearen Algebra**:

Potenzreihen bilden unendlichdimensionalen Vektorraum,
 Funktionen x^k bilden linear unabhängige Basis.

3.2.3 Konstruktion der Taylor-Reihe

Methode, Potenzreihen für Funktionen zu konstruieren. Funktioniert für sehr viele Funktionen $f(x)$.

Beantwortet Eingangsfrage (iii) ("Wie kommt man an die Koeffizienten?")

1) Taylor-Entwicklung um $x = 0$ (MacLaurin-Reihe)

Funktion $f(x)$ sei unendlich oft differenzierbar.

Setze an: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \Rightarrow f(0) = a_0 \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \Rightarrow f'(0) = a_1 \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \dots \Rightarrow f''(0) = 2a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein: $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!} x^{k-n} = n! a_n + \dots \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe } \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}.$$

NB: Falls $f(x)$ unendlich oft differenzierbar und nur im Reellen bekannt, kann man so $f(x)$ für komplexe Zahlen verallgemeinern ("analytische Fortsetzung").

2) Anwendungsbeispiele

- Geometrische Reihe

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{-1} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= (1-x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= 2(1-x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3(1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!(1-x)^{-n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! \end{aligned} \right\} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{Rekonstruiere } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n !$$

- Exponentialfunktion

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) = 1 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \end{aligned} \right\} a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \text{ wie behauptet!}$$

3) Gültigkeit der Taylor-Entwicklung

- Wann kann man Taylor-Reihen bilden?

Notwendige Bedingung: $f(x)$ bei $x = 0$ unendlich oft differenzierbar.

Achtung: Diese Bedingung ist nicht hinreichend.

Berühmtes Gegenbeispiel $f(x) = \exp(-1/x^2)$. Bei $x = 0$ unendlich oft differenzierbar, aber $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$.

$\Rightarrow$ Taylorreihe wäre identisch Null.

(Hintergrund: $f(x)$ kann bei $x \rightarrow 0$ nicht in die komplexe Ebene erweitert werden: $\lim_{r \rightarrow 0} \exp(-1/(ir)^2) \rightarrow \infty$ divergiert.)

- In welchem Gebiet ist Taylor-Reihe gültig?

Antwort: Innerhalb des Konvergenzradius.

Achtung: Nicht notwendig deckungsgleich mit dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion $f(x)$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ist definiert im zusammenhängenden Gebiet $x \in]-\infty, 1[$, aber Taylorreihe $\sum x^k$ nur für $|x| < 1$.

4) Erweiterung: Taylor-Reihe um beliebigen Punkt x_0

Nachteile der MacLaurin-Reihe bei großen $|x|$:

- Für große x muss man immer mehr Terme mitnehmen, um eine gute numerische Genauigkeit zu erzielen
- Eventuell konvergiert die Reihe gar nicht mehr.

Ausweg: Bilde Taylor-Reihe um anderen Punkt x_0 .

Schreibe $f(x) = f(x_0 + h) =: \hat{f}(h)$, entwickle $\hat{f}(h)$ nach $h = x - x_0$

NB: Ableitungen $\hat{f}^{(n)}(h) = f^{(n)}(x_0)$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe } \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}.$$

bzw. $\boxed{f(x + x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k}.$

5) Erweiterung: Taylor-Reihen in mehreren Variablen

Beispiel: Funktion von zwei Variablen $f(x, y)$, entwickelt um (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} \text{Potenzreihe: } f(x, y) &= a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) \\ &\quad + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2 \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \end{aligned}$$

Koeffizienten a_{ij} sind wieder eindeutig.

Ergeben sich als partielle Ableitungen: $a_{00} = f(x_0, y_0)$,

$$a_{10} = \frac{\partial}{\partial x} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{01} = \frac{\partial}{\partial y} f|_{(x_0, y_0)},$$

$$a_{20} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{02} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f|_{(x_0, y_0)}, \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe: } f(x, y) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} \right]^i \left[(y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^j f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Kann mit $(a + b)^n = \sum_i \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$ umgeschrieben werden als

$$f(x, y) = \sum_n \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Verallgemeinerung für Funktion $f(x_1, \dots, x_M)$ von M Variablen x_j

Entwicklung um $(a_1, \dots, a_M)$

$$\boxed{f(x_1, \dots, x_M) = \sum_n \frac{1}{n!} \left[\sum_{j=1}^M (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^n f(x_1, \dots, x_M) \Big|_{(a_1, \dots, a_M)}}$$

3.2.4 Anwendungen

1) Exponentialfunktion: Wie gehabt

$$\left| e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right.$$

2) Hyperbolische Funktionen: Summen/Differenzen von $e(x)$

$$\left| \begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots \end{aligned} \right.$$

3) Trigonometrische Funktionen: über Taylor-Entwicklung

$$\left| \begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Rechnung für } \sin(x) \text{):} \\ f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \\ \vdots \\ f^{(4n)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4n)}(0) = 0 \\ f^{(4n+1)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4n+1)}(0) = 1 \\ f^{(4n+2)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(4n+2)}(0) = 0 \\ f^{(4n+3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(4n+3)}(0) = -1 \end{array} \right\} \begin{aligned} a_{2n} &= \frac{f^{(2n)}(0)}{n!} = 0 \\ a_{2n+1} &= (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Rechnung für } \cos(x) \text{):} \\ f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin(x) \Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1 \\ \vdots \\ f^{(4n)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4n)}(0) = 1 \\ f^{(4n+1)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(4n+1)}(0) = 0 \\ f^{(4n+2)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(4n+2)}(0) = -1 \\ f^{(4n+3)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4n+3)}(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \frac{1}{n!} \\ a_{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Folgerung: Liefert endlich den Beweis des Eulerschen Satzes

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n}}_{(-1)^n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i^{2n+1}}_{(-1)^{n+1}/i} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Vergleich mit } \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ und } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}:$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)} \quad \checkmark$$

4) Logarithmus:Funktion $\ln(x)$ lässt sich um $x = 0$ nicht Taylor-entwickeln (divergiert).Aber: Entwicklung um $x_0 = 1$ möglich.

$$\left| \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{(Rechnung)} & \begin{array}{l} f(x) = \ln(1+x) \\ f'(x) = (1+x)^{-1} \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} \\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! (1+x)^{-n} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = -1 \\ f'''(0) = 2 \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)! \end{array} \\
 & \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}
 \end{array} \right\}$$

Bemerkungen:

- Konvergenzradius ist $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$
Macht Sinn, da $\ln(1+x)$ bei $x=1$ divergiert.
- Mit $x \rightarrow 1$ kann man den Wert von $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ bestimmen:
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \ln(1+1) = \ln(2)$

5) Potenzen: x^α (wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig)

Analog 4): Für allgemeine α ist Entwicklung um $x=0$ i.A. nicht möglich, da x^α nicht beliebig oft differenzierbar

→ Entwicklung um $x=1$

$$\left| (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \text{ mit } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{(Rechnung:)} & \begin{array}{l} f(x) = (1+x)^\alpha \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = -1 \\ \vdots \\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \end{array} \\
 & \Rightarrow a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}
 \end{array} \right\}$$

Speziell $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahl $\rightarrow \binom{N}{n} = 0$ für $n > N$

⇒ Potenzreihe bricht ab.

Man erhält bekannte Formel $(1+x)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k$.

6) Tabelle: Taylor-Reihe bis zur Ordnung x^2 für wichtige Funktionen:

- $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$
- $\sin(x) \approx x$
- $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$

Aufgaben

Berechnen Sie die Taylorreihe um $x=0$ von

- $f(x) = \exp(-x^2)$ (Gaußkurve)
- $f(x) = 1/(1-x^2)$

Berechnen Sie die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe von

- $\tan(x)$
- $e^x \sin(x)$ (multiplizieren der Reihen für e^x und $\sin(x)$)
- $e^{\sin(x)}$

Berechnen Sie die Taylor-Reihe von

- $\exp(x)$ um den Punkt $x_0 = 10$
- $\sin(x)$ um den Punkt $x_0 = \pi$

Lösen Sie näherungsweise die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2x} = x$

3.3 Integralrechnung

Erinnerung: Einleitendes Beispiel bei der Differentialrechnung (Kapitel 3.1.1):

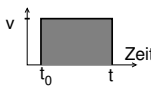
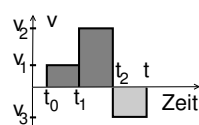
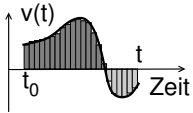
Wagen, der entlang gerader Straße fährt.

Gegeben Weg $s(t) \rightarrow$ Geschwindigkeit $v(t)$?

Betrachte nun umgekehrtes Problem: $v(t)$ gegeben (z.B. vom Tacho)

$\rightarrow$ Wie kann man daraus Strecke $s(t)$ berechnen (z.B. Kilometerzähler)

Graphisch

- Wenn v konstant ist:  $\rightarrow s(t) = v(t - t_0)$
 $\hat{=}$ Fläche 
- Wenn v sich ab und zu abrupt ändert:  $\rightarrow s(t) = v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t - t_2)$
 $\hat{=}$ Fläche  - Fläche 
- Beliebiger Verlauf $v(t)$:
 $\rightarrow$ Annäherung durch viele infinitesimale Stufen
 $\hat{=}$ Fläche unter der Kurve des Teils $v(t) > 0$
 $-$ Fläche über der Kurve des Teils $v(t) < 0$
 (Fläche mit Vorzeichen) 

Führt zum sogenannten **Riemannschen Integral**

Allgemeine Aufgabenstellung: Berechnung der Fläche unter einer Kurve

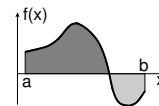
Unser Beispiel zeigt, dass das so etwas wie eine "inverser Ableitung" ist.

$\rightarrow$ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

3.3.1 Das Riemannsche Integral

Gegeben reelle Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

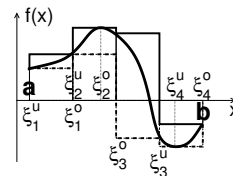
Aufgabe: Berechnung der Fläche F unter der Kurve $f(x)$
 (ggf. mit negativen Beiträgen für $f(x) < 0$).



1) Konstruktion des Integrals

- Zerlege Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle der Breite $\Delta x = (b - a)/n$.
 $\rightarrow$ Teilintervalle ν : $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ mit $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x$.

- Lege in jedem Teilintervall x -Werte ξ_ν fest, so dass:
 $x = \xi_\nu^{(o)}$: Wert, an dem $f(x)$ maximal wird.
 $x = \xi_\nu^{(u)}$: Wert, an dem $f(x)$ minimal wird.



- Berechne $S_n = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta x$ jeweils für $\xi_\nu^{(o)}$ und $\xi_\nu^{(u)}$.
 $\rightarrow$ Obersumme $S_n^{(o)} = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o)}) \Delta x$
 Untersumme $S_n^{(u)} = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(u)}) \Delta x$
 $\Rightarrow S_n^{(u)} < F$ (gesuchte Fläche) $< S_n^{(o)} \quad \forall n$

- Bilde Grenzwert $n \rightarrow \infty$.
 $f(x)$ heißt Riemann-integrierbar, falls die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o)}$
 und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)}$ existieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)}$.
 Dann ist die Fläche $F = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o,u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)}) \Delta x$.

Notation:
$$F = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b dx \, f(x).$$

2) Riemann-Integrierbarkeit

Es gilt: Falls $f(x)$ auf $[a, b]$ stückweise stetig ist (d.h. stetig auf endlich vielen Teilintervallen) und beschränkt, dann ist $f(x)$ Riemann-integrierbar. (anschaulich klar. Beweis weggelassen.)

3) Eigenschaften des Integrals

- Linearität: $\int_a^b \{A f(x) + B g(x)\} \, dx = A \int_a^b f(x) \, dx + B \int_a^b g(x) \, dx$.
- Intervall-Addition: $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$.
- Ungleichungen:
 - (i) Wenn $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a, b]$
 Dann folgt $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.
 - (ii) Dreiecksungleichung: $\underbrace{\left| \int_a^b f(x) \, dx \right|}_{\text{enthält negative Flächen}} \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)| \, dx}_{\text{alle Flächen positiv}}$.
 - (iii) Wenn $m \leq f(x) \leq M \, \forall x \in [a, b]$
 Dann folgt: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$
- Umkehrung $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$.
 (denn: dann sind in dem Ausdruck $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)}) \Delta x$
 die Größen $\Delta x = x_\nu - x_{\nu-1}$ negativ.)

4) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f(x)$ stetig in $[a, b]$, so existiert ein $\bar{\xi} \in [a, b]$
 mit $\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(\bar{\xi})$.

3.3.2 Hauptsatz und Stammfunktion

Aus dem Beispiel Geschwindigkeit war schon ersichtlich: Integrieren ist irgendwie invers zum Differenzieren. Das soll nun spezifiziert werden (in zwei Teilen).

- 1) Gegeben eine stetige Funktion $f(x)$. Definiere $F_{x_0}(y) = \int_{x_0}^y f(x) \, dx$.

Dann gilt:
$$\frac{d}{dy} F_{x_0}(y) = f(y).$$

(Beweisskizze: $\frac{d}{dy} \int_{x_0}^y f(x) \, dx = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\int_{x_0}^{y+\Delta y} f(x) \, dx - \int_{x_0}^y f(x) \, dx \right]$
 $= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} f(x) \, dx \underbrace{=}_{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung}} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \Delta y f(\bar{\xi}) \underbrace{=}_{f \text{ stetig}} f(y)$
 Wähle $\bar{\xi} \in [y, y + \Delta y]$ so, dass $\int_y^{y+\Delta y} f(x) \, dx = \Delta y f(\bar{\xi})$

2) Gegeben eine differenzierbare Funktion $f(x)$

Dann gilt: $\boxed{\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a) =: f(x) \Big|_a^b}.$

(Beweisskizze: $\int_a^b f'(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \Delta x f'(\xi_\nu) \underbrace{=}_{\text{Mittelwertsatz der Differentialrechnung:}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \Delta x \frac{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}{\Delta x}$
Wähle $\xi_\nu \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$ so, dass $f'(\xi_\nu) \Delta x = f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(x_0) \underbrace{=}_{x_n = b, x_0 = a} f(b) - f(a).$)

Zusammen: **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Fazit: Um das Integral $\int f(x) \, dx$ zu berechnen, muss man die **Stammfunktion** von $f(x)$ kennen, d.h. die Funktion $F(x)$ mit $\boxed{\frac{d}{dx} F(x) = f(x)}.$

Dann ist $\boxed{\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b}.$

Bemerkungen:

- Stammfunktion ist natürlich nicht eindeutig. Mit $F(x)$ ist auch $F(x) + c$ Stammfunktion zu $f(x)$ für jede beliebige Konstante c .
Aber: an dem Wert von $F(x) \Big|_a^b$ ändert das nichts.
- Wegen des Hauptsatzes kann man Integrale auch dazu benutzen, Stammfunktionen zu ermitteln (über $F(y) = \int^y f(x) \, dx$).

Deshalb unterscheidet man zwischen

unbestimmten Integralen: $\int f(x) \, dx$.

→ keine expliziten Integrationsgrenzen angegeben.

Es wird nur allgemein nach Stammfunktion gesucht.

bestimmten Integralen $\int_a^b f(x) \, dx$.

→ explizite Integrationsgrenzen.

Gesucht wird konkreter Wert eines Integrals.

Beispiele

- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) (+ \text{Konstante})$
- $\int_a^b \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_a^b = -\cos(b) + \cos(a)$

Aufgaben

Geben Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen an:

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = -1/\sqrt{1-x^2},$$

$$f(x) = \sinh(x) \quad f(x) = 2^x, \quad f(x) = (x+2)\sin(x^2 + 4x - 6)$$

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int x^n \, dx, \quad \int x e^{-x^2} \, dx$$

$$\int_0^1 dx/(1+x^2) (\leadsto \pi/4), \quad \int_0^a dx/x^{1-a} \text{ mit } a > 0 (\leadsto a^{a-1})$$

3.3.3 Integrationsmethoden

Vorab: Es gibt leider kein Patentrezept, ein Integral zu knacken.

Anders als beim Differenzieren: Man kann für (fast) jede differenzierbare Funktion einen expliziten Ausdruck für die Ableitung herleiten. Für Integrale ist das oft nicht möglich.

Hier: Ein paar Tricks, mit denen man Integrale manchmal doch knacken kann.

- 1) Differentiationstabelle rückwärts lesen
bzw. Stammfunktion erraten.

2) Lineare Zerlegung

Ausnutzen von $\int \{Af(x) + Bg(x)\} dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx$.

Beispiele

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx \\ & = \int_0^1 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \\ \text{(ii)} \quad & \int_0^{\pi/2} \cos^2(\phi) d\phi \underset{\text{Symmetrie}}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\phi) d\phi \underset{\text{Trick}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \underbrace{[\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)]}_{1} d\phi \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(iii) Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} & \text{Gesucht sei z.B. } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \\ & \leadsto \text{ Zerlege } \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad (= \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}) \\ & \Rightarrow A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B) \stackrel{!}{=} 1 \quad \forall x \\ & \Rightarrow A+B=0, \quad 2A+B=1 \Rightarrow A=1, \quad B=-1 \\ & \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \int_0^1 \frac{1}{x+2} \\ & \quad = \ln(x+1)|_0^1 - \ln(x+2)|_0^1 = \ln(4/3). \end{aligned}$$

Aufgaben

$$\begin{aligned} & \text{Berechnen Sie } \int_{-1}^1 (1+2x^3)^3 dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx, \quad \int_0^1 \frac{x(1-x)}{(x+1)(x^2+1)} dx \\ & \quad \left(\leadsto \frac{38}{7}, \quad (6\ln(\frac{3}{2}) - 1), \quad (\frac{\pi}{4} - \ln(2)) \right) \end{aligned}$$

3) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

Voraussetzung: $f(x), g(x)$ differenzierbar.

$$\text{Dann gilt: } \boxed{\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx}.$$

$$(\text{denn: } f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b dx \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = \int_a^b dx [f'(x)g(x)] + \int_a^b dx [f(x)g'(x)])$$

Beispiele

$$\text{(i)} \quad \int_0^y dx \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_g' = x e^x \Big|_0^y - \int_0^y dx e^x = x e^x \Big|_0^y - e^x \Big|_0^y = e^x (x-1) \Big|_0^y$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \int_1^y dx \ln(x) &= \int_1^y dx \cdot \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_f = x \ln x \Big|_1^y - \int_1^y dx x \frac{1}{x} = x(\ln(x)-1) \Big|_1^y \\
&(\rightarrow \text{Stammfunktion von } \ln(x) \text{ ist } x(\ln(x)-1)) \\
\text{(iii)} \quad \int_0^y dx \underbrace{\sin(x)}_f \underbrace{e^x}_{g'} &= \sin(x) e^x \Big|_0^y - \int_0^y dx \underbrace{\cos(x)}_f \underbrace{e^x}_{g'} \\
&= \sin(x) e^x \Big|_0^y - \cos(x) e^x \Big|_0^y - \int_0^y dx \sin(x) e^x \\
&\Rightarrow \int_0^y \sin(x) e^x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) \Big|_0^y
\end{aligned}$$

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^y dx x \sin(x)$, $\int_0^y dx x^2 \cos(x)$, $\int_0^y dx x \ln(x)$, $\int_0^y dx x^3 e^{x^2}$, $\int_0^y dx x \sinh(x)$

Zeigen Sie

- $\int dx f'(x) x^n = f(x) x^n - n \int dx f(x) x^{n-1}$
- $\int_0^\infty dx e^{-x} x^n = n!$ (z.B. mittels vollständiger Induktion)

4) Substitution (Umkehrung der Kettenregel)

Idee: Austausch der Integrationsvariablen $x \rightarrow u$ in $\int f(x) dx$.

Voraussetzung: $x \leftrightarrow u$ hängen in umkehrbarer und stetig differenzierbarer

Weise voneinander ab.

($u = g(x)$, $x = g^{-1}(u) = x(u)$, $\frac{dx}{du} = x'(u)$ ist stetig).

Dann gilt: $\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_{g(x_a)}^{g(x_b)} x'(u) f(x(u)) du = \int_{u_a}^{u_b} \frac{dx}{du} f(x(u)) du$.

(denn: Sei $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$,

also $F(x) = \int_a^x dx' f(x')$, $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

$\Rightarrow \frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{du} = f(x(u)) \cdot x'(u) \Rightarrow F(x(u)) = \int du f(x(u)) g'(u) \checkmark$

Beispiele

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \int_1^5 dx \sqrt{2x-1} & \quad \Big| \quad \text{Setze } u = 2x-1 \Rightarrow x(u) = \frac{1}{2}(u+1), \frac{dx}{du} = \frac{1}{2} \\
&= \int_{2 \cdot 1 - 1}^{2 \cdot 5 - 1} du \frac{dx}{du} \sqrt{u} = \int_1^9 du \frac{1}{2} \sqrt{u} = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_1^9 = \frac{1}{3} (9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \int dt \cos(\omega t) & \underbrace{=}_{u=\omega t} \int du \frac{dt}{du} \cos(u) \underbrace{=}_{dt/du=1/\omega} \frac{1}{\omega} \sin(u) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad \int_0^b dt t e^{-\alpha t^2} &= \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\alpha b^2} e^{-u} = -\frac{1}{2\alpha} e^{-u} \Big|_0^{\alpha b^2} = \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha b^2}) \\
&(\text{mit } u = \alpha t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2\alpha t \text{ bzw. } du = 2\alpha t dt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad \int dx \tan(x) &= \int dx \sin(x) \frac{1}{\cos(x)} = -\int \frac{du}{u} = -\ln(u) = -\ln(\cos(x)) \\
&(\text{mit } u = \cos(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin(x) \text{ bzw. } du = -\sin(x) dx)
\end{aligned}$$

Man sieht: Eine geeignete Substitution zu finden erfordert Intuition.

– geht nicht "von alleine"!

Aufgaben

Zeigen Sie mit der Methode der Substitution: $\int_C dx' \frac{1}{x'+\alpha} = \ln(x' + \alpha) + \text{const}$

Berechnen Sie

$$\begin{aligned}
&\int_0^r dx e^{-2x/a}, \int_{-a}^a dx \cosh\left(\frac{x}{A}\right), \int_{-a}^a dx \sinh\left(\frac{x}{A}\right), \int dx \sqrt{x \pm b}, \int_{-1}^1 dz / \sqrt{az - b}, \\
&\int_0^1 dx \sqrt{1-x^2}, \quad (\text{Tip: Substitution } x = \sin(\phi), \text{ Lösung ist } \frac{\pi}{4}), \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2}, \\
&\int dt \dot{x}(t), \int dt x(t) \dot{x}(t)
\end{aligned}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{\sin(\phi)}{\cos^2(\phi)+1}, \int dx x \sqrt{x^2 \pm a}, \int dx \frac{x}{1+x^2}$$

Zeigen Sie

- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x) g^n(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} \Big|_{x_a}^{x_b}$
- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)/g(x) = \ln|g(x)| \Big|_{x_a}^{x_b}$
- $\int_{x_a}^{x_b} g'(x) \sqrt[n]{g(x)} = \frac{n}{n+1} \sqrt[n+1]{g(x)g(x)} \Big|_{x_a}^{x_b}$
- Bestimmen Sie die analoge Formel für $\int_{x_a}^{x_b} g'(x)/g^n(x)$

5) Integralfunktionen

Bei manchen Funktionen läßt sich das Integral nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken → Integral definiert neue Funktion

Beispiele:

- **Error-Funktion:** $\text{Erf}(y) = \int_0^y \exp(-x^2) dx$.
- **Elliptische Integrale:** $F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$,
 $E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)} d\psi$.
- **Integralsinus:** $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx$.
- **Integralcosinus:** $\text{Ci}(y) = -\int_y^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$.
- **Integralexponentialfunktion:** $\text{Ei}(y) = -\int_{-\infty}^y \frac{\exp(x)}{x} dx$.
- **Integrallogarithmus:** $\text{li}(y) = -\int_0^y \frac{1}{\ln(x)} dx \ (y \neq 1)$.
 $\text{Li}(y) = -\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} dx \ (y > 1)$.

NB: Im Falle $\text{li}(y)$, $y > 1$ wird über den Pol bei $x = 1$ im Sinne eines Cauchyschen Hauptwertes integriert, siehe 3.3.4.

6) Hilfsmittel

- Formelsammlungen, Integraltafeln, z.B.
 - Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik
 - Abramowitz, Stegun, Handbook of Mathematical Functions
 - Gradshteyn, Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products
- Symbolische Programme, z.B. MATHEMATICA, MAPLE
 Achtung: Teilweise fehlerhaft, vor allem wenn die Lösung Integralfunktionen beinhaltet. → Ergebnisse gegenchecken, z.B. durch Vergleich mit der numerischen Lösung für ausgewählte Zahlen.

7) Numerische Lösung (intelligent "Kästchen zählen")

Aufgaben

Berechnen Sie

- (i) $\int dx \sqrt{1+x^2}$,
- (ii) $\int dx \frac{x}{1+x^4}$,
- (iii) $\int_0^1 dx \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$,
- (iv) $\int dx \ln(1+x^2)$,
- (v) $\int dx \arcsin(x)$

(Lösungswege: (i) Substitution $x = \sinh(u)$, (ii) Substitution $u = x^2$,
 (iii) Partialbruchzerlegung, (iv) Partielle Ableitung von $\int dx \cdot 1 \cdot \ln(1+x^2)$, (v) Partielle
 Ableitung von $\int dx \cdot 1 \cdot \arcsin(x)$)

Lösungen: (i) $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x))$, (ii) $\frac{1}{2}\operatorname{artanh}(x^2)$, (iii) $\frac{1}{8}(\pi + 2\ln(2))$,
 (iv) $\ln(1+x^2)(x - \frac{1}{2})$, (v) $x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$)

3.3.4 Uneigentliche Integrale

Bis jetzt: Lästige Einschränkungen für das Integral:

- 1) Intervallgrenzen endlich
- 2) Integrand $f(x)$ beschränkt

Manchmal kann man Integrale im Grenzwert auch ausrechnen, wenn Einschränkungen nicht zutreffen $\rightarrow$ "Uneigentliche Integrale".

1) Uneigentliche Integrale erster Art: Integrationsgrenze unendlich

• Definition

Obere Grenze: $\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$

Untere Grenze: $\int_{-\infty}^b dx f(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b dx f(x)$

Beide Grenzen: $\int_{-\infty}^\infty dx f(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b dx f(x)$

Cauchy-Hauptwert: $P \int_{-\infty}^\infty dx f(x) := \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a dx f(x)$

(falls $\int_{-\infty}^\infty dx f(x)$ nicht existiert,

existiert vielleicht wenigstens der Hauptwert $P \int_{-\infty}^\infty dx f(x)$).

• Beispiele

(i) $\int_0^\infty dx e^{-x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b dx e^{-x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} - e^0) = 1$

(ii) $\int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx \frac{1}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\frac{b}{a}) \rightarrow \infty$

(iii) $\int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx x^{-(1+\alpha)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} (a^{-\alpha} - b^{-\alpha})$

$$\Rightarrow \int_{a>0}^\infty \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \begin{cases} a^{-\alpha}/\alpha & : \alpha > 0 \\ \infty & : \alpha \leq 0 \end{cases}$$

(iv) $\int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b dx \frac{x}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} [\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)]$
 $\rightarrow$ divergiert auf beiden Seiten.

Aber: Hauptwert $P \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{1+x^2} = 0$ existiert.

(v) $\int_{-\infty}^\infty dx x$ existiert nicht, aber $P \int_{-\infty}^\infty dx x = 0$ existiert.

Vergleichskriterien:

Kriterien, mit denen man abschätzen kann, ob ein Integral überhaupt konvergiert.

a) Absolute Konvergenz

Falls $\int_a^\infty dx |f(x)|$ konvergiert, konvergiert auch $\int_a^\infty dx f(x)$.

b) Konvergente Majorante

$|f(x)| \leq M(x) \forall x$ und $\int dx M(x)$ konvergiert. Dann konvergiert
 $\int dx |f(x)| \leq \int dx M(x)$,

und damit auch $\int dx f(x)$.

c) Divergente Minorante

$f(x) \geq m(x) \geq 0 \forall x$ und $\int dx m(x)$ divergiert.

Dann divergiert auch $\int dx f(x)$.

Beispiel: Abschätzung der Konvergenz von $\int_0^\infty dx e^{-x^2}$:

$$x^2 > (x-1) \forall x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-(x-1)}$$

Wegen $\int_0^\infty dx e^{-(x-1)} = \frac{1}{e} < \infty$ konvergiert auch $\int_0^\infty dx e^{-x^2}$.

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^\infty dx \cos(x) e^{-x}$, $\int_{-\infty}^\infty dx/(1+x^2)$, $\int_{-\infty}^{-2/\pi} dx \frac{\sin(1/x)}{x^2}$, $\int_{-\infty}^\infty x^n$, $P \int_{-\infty}^\infty x^n$

2) Uneigentliche Integrale zweiter Art:

Integrand unbeschränkt an einem Punkt x_0 ("divergiert", "hat Singularität").

(Beispiel: $1/x$ divergiert am Punkt $x_0 = 0$).

Definition:

Singularität an der unteren Grenze: $\int_{x_0}^{b > x_0} dx f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\eta}^b dx f(x)$.

Singularität an der oberen Grenze: $\int_{a < x_0}^{x_0} dx f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x)$.

Intervall $[a, b]$ schließt Singularität ein:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0^+ \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \int_{x_0+\eta}^b dx f(x) \right]$$

Cauchyscher Hauptwert:

$$P \int_a^b dx f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \int_{x_0+\epsilon}^b dx f(x) \right]$$

Beispiele:

$$(i) \int_0^b dx \frac{1}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_\eta^b dx \frac{1}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \ln |x| \Big|_0^b = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \ln |b/\eta| \rightarrow -\infty$$

$$(ii) \int_{-b}^b dx \frac{1}{x} \text{ existiert dann natürlich auch nicht,}$$

$$\text{aber } P \int_{-b}^b dx \frac{1}{x} = 0 \text{ existiert.}$$

$$(iii) \int_0^b \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_\eta^b dx \frac{1}{x^{1+\alpha}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\eta^{-\alpha} - b^{-\alpha})$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^b \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \begin{cases} \infty & : \alpha \geq 0 \\ -b^{-\alpha}/\alpha & : \alpha < 0 \end{cases}}$$

Vergleichskriterien

Analog den uneigentlichen Integralen erster Art.

– Falls $\int dx |f(x)|$ konvergiert, dann auch $\int dx f(x)$.

– Majorantenkriterium/Minorantenkriterium analog

Aufgaben

Berechnen Sie $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x^2}$, $\int_0^{\pi/2} dx \tan(x)$, $\int_0^\pi dx \tan(x)$, $P \int_0^\pi dx \tan(x)$,

3) Wichtige uneigentliche Integrale

Gaußintegral: $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ (Herleitung siehe 3.3.5).

Gamma-Funktion: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1} \quad (x > 0)$

- $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} = 1$ (siehe 1) Beispiel (i))
- $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.
(da $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^x = \underbrace{-t^x e^{-t}}_0 \Big|_0^{\infty} + x \underbrace{\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}}_{\Gamma(x)}$)

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n! \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

$\Gamma(x)$ interpoliert Fakultät.

- Weiterer spezieller Wert:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} dx x^{-1/2} e^{-x} \stackrel{(y=\sqrt{x})}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dy e^{-y^2} = \sqrt{\pi}.$$

Beta-Funktion: $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$

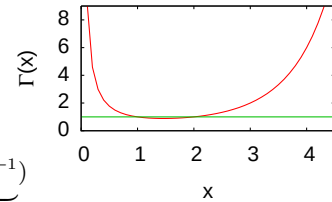
$$\text{Es gilt: } B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$$

Elliptische Integrale:

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi = \int_0^{\sin \phi} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} dx,$$

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)} d\psi = \int_0^{\sin \phi} dx \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}},$$

Vollständige elliptische Integrale: $K = F(k, \pi/2), E = E(k, \pi/2)$.



3.3.5 Mehrfachintegrale

Mit den vorher behandelten Methoden kann man auch komplizierte Probleme lösen, z.B. verschachtelte Integrale.

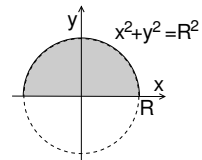
Wichtige Anwendung: Berechnung von Volumina

3.3.5.1 Beispiele

(i) Fläche A eines Kreises des Radius R

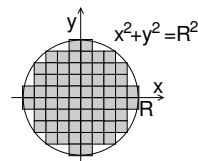
Erste Lösung: Fläche des Halbkreises über Einfachintegral

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{R^2 - x^2} \\ \Rightarrow A/2 &= \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2} = 2 \underbrace{\int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2}}_{R^2 \frac{\pi}{4} \text{ lt. Übungsaufgabe}} = 2R^2 \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow A &= \pi R^2 \end{aligned}$$



Zweite Lösung: Alternative Sichtweise: – Integriere (d.h. summiere)

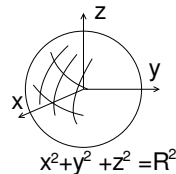
über infinitesimale Flächenelemente $dA = dx dy$ 



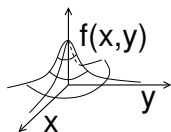
$$\begin{aligned} A &= \iint_{\text{Kreis}} dA = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4 \int_0^R dx 2\sqrt{R^2 - x^2} = \pi R^2 \end{aligned}$$

(ii) Volumen V einer Kugel des Radius R Integriere über infinitesimale Volumenelemente $dV = dx dy dz$.

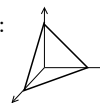
$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\text{Kugel}} dV = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \\
 &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} \\
 &= \int_{-R}^R dx 4 \underbrace{\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy 2\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}}_{(R^2-x^2) \frac{\pi}{4} \text{ lt. Übungsaufgabe}} \\
 &= \pi \int_{-R}^R dx (R^2 - x^2) \\
 &= \pi (2R^3 - R^2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^R) = \pi R^3 (2 - \frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

(iii) Volumen unter einer Gaussglocke

$$\begin{aligned}
 \iint_{\infty} dA f(x, y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy f(x, y) \\
 &= \iint_{\infty} dx dy e^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \\
 &= \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}}_{\text{Nachschlagen: } \sqrt{\pi}} \right]^2 = \sqrt{\pi}^2 = \pi.
 \end{aligned}$$

**Aufgaben**

- Berechnen Sie die Funktion $f(x, y)$ auf dem Gebiet G
 $f(x, y) = 1$ auf $G = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq x^3\}$
 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2}$ auf $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
- Berechnen Sie das Volumen eines rechtwinkligen Dreiecks der Seitenlänge 3cm
 $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$
- Berechnen Sie das Volumen eines dreidimensionalen Simplex der Seitenlänge a :
 $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$
- Berechnen Sie das Volumen eines d -dimensionalen Simplex der Seitenlänge 1

**3.3.5.2 Polarkoordinaten**Bis jetzt: Koordinaten (x, y, z) ("kartesische Koordinaten").

Oft ist es bequemer, andere Integrationsvariablen zu benutzen.

Dann muss man die Form des Flächenelementes dA bzw. Volumenelementes dV anpassen (analog Substitution, siehe 3.3.3 4): $dx = du x'(u)$

Wichtigster Fall: Polarkoordinaten.

1) Zwei Dimensionen: Kreiskoordinaten (r, ϕ)

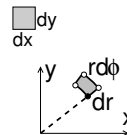
$$\begin{aligned}
 x &= r \cos(\phi) \\
 y &= r \sin(\phi) \quad \text{mit} \quad r \in [0, \infty[\\
 &\quad \phi \in [0, 2\pi[
 \end{aligned}$$

 dx, dy entspricht der infinitesimalen Fläche $dA = dx dy$ $dr, d\phi$ entspricht der infinitesimalen Fläche $dA = dr r d\phi$ Also: Für $f(x, y) = f(x(r, \phi), y(r, \phi)) =: \bar{f}(r, \phi)$ folgt:

$$\iint dA f(x, y) = \int dx \int dy f(x, y) = \int r dr \int d\phi \bar{f}(r, \phi)$$

Beispiele:

$$(i) \text{ Kreisfläche: } A = \iint_{\text{Kreis}} dA = \underbrace{\int_0^R dr r}_{R^2/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \pi R^2.$$

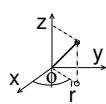


(ii) Volumen unter Gaussglocke:

$$\iint_{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \underbrace{\int_0^{\infty} dr r e^{-r^2}}_{-\frac{1}{2}e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \pi$$

NB: Das beweist endlich auch $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.(wegen $\iint_{\infty} dx dy e^{-x^2-y^2} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right]^2$ (siehe 3.3.5.1, Beispiel (iii))**Aufgaben**

- Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreisrings mit innerem Durchmesser r_1 und äußerem Durchmesser r_2 .
- Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kegels der Höhe h und Grundfläche A .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche des Gebiets
 $G = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

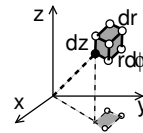
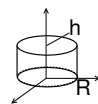
2) Drei Dimensionen: Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) 

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) & r &\in [0, \infty[\\ y &= r \sin(\phi) & \text{mit } \phi &\in [0, 2\pi[\\ z &= z & z &\in]-\infty, \infty[\end{aligned}$$

$dx, dy, dz \hat{=}$ infinitesimales Volumen $dV = dx dy dz$ 
 $dr, d\phi, dz \hat{=}$ infinitesimales Volumen $dA = dr r d\phi dz$

Also: Für $f(x, y, z) = f(x(r, \phi), y(r, \phi), z) =: \bar{f}(r, \phi, z)$ folgt:

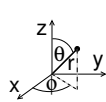
$$\iiint dV f(x, y, z) = \int dx \int dy dz f(x, y, z) = \int r dr \int d\phi dz \bar{f}(r, \phi, z)$$

Beispiel:Volumen eines Zylinders der Höhe h und des Radius R 

$$\iint_{\text{Zylinder}} dV = \underbrace{\int_0^R r dr}_{\frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \frac{R^2}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_h = \pi R^2 h$$

Aufgaben

- Berechnen Sie das Volumen des Metalls eines 1m langen Rohres mit Innenradius $r_1 = 3\text{cm}$ und Aussenradius $r_2 = 3.2\text{cm}$.
- Das Trägheitsmoment θ eines Körpers der Dichte ρ bezüglich der z -Achse ist gegeben durch: $\theta = \rho \iiint dV (x^2 + y^2)$. Hier wird natürlich über den Körper integriert.
 - Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders der Länge L und des Radius R bezüglich der Symmetrieachse.
 - Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel des Radius R .

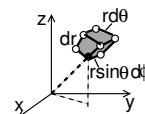
3) Drei Dimensionen: Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) 

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) & r &\in [0, \infty[\\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) & \text{mit } \theta &\in [0, \pi] \\ z &= r \cos(\theta) & \phi &\in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

$dx, dy, dz \hat{=}$ infinitesimales Volumen $dV = dx dy dz$ 
 $dr, d\theta, d\phi \hat{=}$ infinitesimales Volumen $dA = dr r d\theta \sin(\theta) d\phi$

Also: Für $f(x, y, z) = \bar{f}(r, \theta, \phi)$ folgt:

$$\iiint dV f(x, y, z) = \int dx \int dy dz f(x, y, z) = \int r^2 dr \int \sin(\theta) d\theta \int d\phi \bar{f}(r, \theta, \phi)$$



Beispiel:

Volumen einer Kugel des Radius R

$$\iint_{\text{Kugel}} dV = \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta}_{-\cos(\theta) \Big|_0^\pi = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Aufgaben

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel in Kugelkoordinaten.
- Berechnen Sie das Volumen einer Hohlkugel mit innerem Radius r_1 und äußerem Radius r_2 .
- Berechnen Sie das Integral über $f(x, y, z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ über den gesamten Raum.
- Gegeben sei ein Vektor $\vec{k}$. Berechnen Sie $\iiint_{|\vec{r}| \leq R} dV \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$.
Hinweis: Legen Sie die z -Achse in Richtung $\vec{k}$.

3.3.5.3 Wechsel der Integrationsvariablen und Jacobi-Determinante

Betrachte nun allgemeiner das Problem, dass Integrationsvariablen in mehrdimensionalen Integralen durch andere Variablen substituiert werden sollen.

Ausgangspunkt: Variablen $x_1 \cdots x_n \rightarrow$ Vektor $\vec{x}$
 n -dimensionales Volumenelement $dV = dx_1 \cdots dx_n$.

Ziel: Neue Integrationsvariablen $\xi_1 \cdots \xi_n$

Bestimme für $(d\xi_1, \dots, d\xi_n)$ neue Form des Volumenelements dV

Volumenelement wird aufgespannt durch Vektoren $(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_n})$

$\rightarrow$ definieren zusammen **Jacobi-Matrix** J mit $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$

Vorgriff auf lineare Algebra (Mathematik für Physiker)

Das von n Vektoren $\{\vec{b}^{(i)}\}$ im n -dimensionalen Raum aufgespannte Volumen ist (bis auf ein Vorzeichen) durch die Determinante der Matrix $B = (\vec{b}^{(1)} \dots \vec{b}^{(n)})$ (d.h. $B_{ij} = b_i^{(j)}$) gegeben.

Konkret:

Zwei Dimensionen: $\det(B) = B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12}$

(sieht man z.B., wenn man die Vektoren $\vec{b}^{(1)}$ und $\vec{b}^{(2)}$ in eine dritte

Dimension einbettet: $\hat{b}^{(i)} = (b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, 0)$

$\Rightarrow$ Aufgespannte Fläche: $|\hat{b}^{(1)} \times \hat{b}^{(2)}| = (b_1^{(1)}b_2^{(2)} - b_2^{(1)}b_1^{(2)}) \checkmark$

Drei Dimensionen: $\det(B) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} B_{i1} B_{j2} B_{k3}$

entspricht Spatprodukt: $\det(B) = (b^{(1)}b^{(2)}b^{(3)}) = (b^{(1)} \cdot (b^{(2)} \times b^{(3)}))$

$\Rightarrow$ beschreibt Volumina nach 2.3.3

Höhere Dimensionen: Ohne Beweis

Fazit: Für Funktionen $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\xi_1 \dots \xi_n)$ gilt

$$\iint dV f(\vec{x}) = \iint dx_1 \dots dx_n f(\vec{x}) = \iint d\xi_1 \dots d\xi_n |\det(J)| \bar{f}(\xi_1 \dots \xi_n)$$

mit $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ und der **Jacobi-Determinante** $\det(J)$

Beispiele: (Verifizierung anhand der Polarkoordinaten)

1) Kreiskoordinaten $(x, y) \rightarrow (r, \phi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J) = r \cos^2(\phi) + r \sin^2(\phi) = r$$

$$\Rightarrow dA = dx dy = r dr d\phi \quad \checkmark$$

2) Zylinderkoordinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \phi, z)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r$$

$$\Rightarrow dV = dx dy dz = r dr d\phi dz \quad \checkmark$$

3) Kugelkoordinaten $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(J) &= \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dV = dx dy dz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \quad \checkmark$$

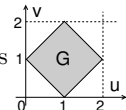
Aufgaben

- Betrachten Sie den Variablenwechsel $(x, y) \rightarrow (u, v)$ mit $x = \frac{1}{2}(u - v)$ und $y = \frac{1}{2}(u + v)$. Um was für eine Art Transformation handelt es sich hier?

– Berechnen Sie die Jacobi-Determinante zu dieser Transformation

– Benutzen Sie die Transformation zur Berechnung des Integrals

$$\iint_G du dv \frac{(u-v)^2}{u+v} \quad \text{über dem nebenstehend schraffierten Gebiet } G.$$

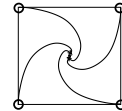


- Betrachten Sie den Variablenwechsel $(x, y) \rightarrow (u, v)$ mit $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ und $y = uv$ (parabolische Koordinaten). Berechnen Sie die Jacobi-Determinante zu dieser Transformation. Berechnen Sie dann mit Hilfe von parabolischen Koordinaten das Integral $\int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 - v^2)^2} e^{-2uv}$.

- Versuchen Sie, die Kugelkoordinaten auf d Dimensionen zu verallgemeinern, und berechnen Sie damit das Volumen einer Kugel des Radius R in d Dimensionen (d.h., das Volumen des Gebiets $G = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_1^d x_j^2 \leq R^2\}$).

Abschlussaufgaben zum Thema Infinitesimalrechnung

- 1) Ein Auto fährt die Hälfte einer Strecke mit 50 km/h. Wie schnell muss es die andere Hälfte fahren, um eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h zu erzielen?
- 2) Man stelle sich vor, eine Reihe von n Ziegelsteinen sei übereinander gestapelt, ohne umzufallen. Das Zentrum des untersten Ziegelsteins sei bei $x = 0$. Wie weit kann der oberste Ziegelstein im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ maximal von $x = 0$ weg stehen?
- 3) Vier Mäuse sitzen an den Ecken eines quadratischen Zimmers. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laufen alle gleichzeitig und gleich schnell los. Dabei läuft jede Maus zu jedem Zeitpunkt in Richtung ihres rechten Nachbarn. Irgendwann treffen sie sich alle in der Mitte. Welche Strecke haben sie bis dahin zurückgelegt?



Lösungen 1): Unendlich schnell; 2): Unendlich weit (harmonische Reihe); 3): Die Seitenlänge des Zimmers (Mäuse laufen immer senkrecht zueinander und aufeinander zu, bis sie sich erreicht haben.)

Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Typische Gleichungen der Physik: Gleichungen, in denen Funktionen und deren Ableitungen vorkommen (d.h. Aussagen über Beziehungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen).

Typische Fragestellung: Lösung solcher Gleichungen finden.

Beispiele

(a) Radioaktiver Zerfall: Teilchenzahl $N(t)$	$\dot{N} = -kN$
(b) Kräftefreie Bewegung (1 Dimension: $x(t)$)	$\ddot{x} = 0$
(c) Bewegung im Schwerfeld	$\ddot{x} = -g$
(d) Bewegung mit Reibung	$\ddot{x} = -\eta\dot{x}$
(e) Bewegung mit Reibung im Schwerfeld	$\ddot{x} = -\eta\dot{x} - g$
(f) Schwingungsgleichung	$\ddot{x} = -\omega^2 x$
(g) Schwingungsgleichung mit Reibung	$\ddot{x} = -\omega^2 x - \eta\dot{x}$
(h) Getriebene Schwingung	$\ddot{x} = -\omega^2 x - \eta\dot{x} + f \cos(\Omega t)$
(i) Pendel, Winkel $\phi(t)$	$\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin(\phi)$
(j) Diffusionsgleichung $\rho(x, t)$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$
(k) Wellengleichung $u(x, t)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
(l) Laplace-Gleichung $u(x, y, z)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Charakterisierung/Klassifizierung

- **Gewöhnliche** Differentialgleichung: Eine Variable ((a)-(i))
↔ **Partielle** Differentialgleichung: Mehrere Variablen ((j)-(l))
- **Ordnung** der Differentialgleichung: Höchste vorkommende Ableitung
((vi): erste Ordnung; alle anderen Beispiele: zweite Ordnung)

- **Lineare** Differentialgleichung: Funktion und Ableitungen tauchen nur linear auf. (Alle Beispiele außer (vii))
- Besonders einfacher Spezialfall der linearen Differentialgleichung:
Konstante Koeffizienten: $a + by(x) + cy'(x) + dy''(x) + \dots = 0$.

Hier nun im Folgenden: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen evtl. andiskutiert am Ende der Vorlesung,
ansonsten ausgiebig in den Vorlesungen der theoretischen Physik.

4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Problemstellung:

Differentialgleichung: $y'(x) = f(x, y)$

Anfangsbedingung: $y(x_0) = y_0$ mit Definitionsbereich $(x, y) \in D$.

Satz von Picard:

Falls $f(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig, ist die Lösung eindeutig.
(hinreichende Bedingung).

Beispiel: Gleichung $y' = x\sqrt{y}$ mit $y(0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}, y \geq 0$)

Lösungen: $y \equiv 0$ und $y = x^4/16$ nicht eindeutig.

Hintergrund: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ nicht stetig bei $y = 0$.

Falls Definitionsbereich so eingeschränkt wird, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig (z.B. $y > 0$),
wird die Lösung eindeutig.

Nun: Diskutiere Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.
Es gibt kein allgemeines Lösungsverfahren, aber gute Verfahren für viele wichtige Spezialfälle.

4.1.1 Separable Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ heißt separabel, wenn die Funktion
 $f(x, y) = a(x)b(y)$ faktorisiert.

Lösungsverfahren:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = dx a(x) \Rightarrow \int_{y_0}^y dy'/b(y') = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

→ Lösung durch Integration, gibt implizite Gleichung $y \leftrightarrow x$.

Beispiele:

$$(i) \ y'(x) = a(x) \Rightarrow y = \int_{x_0}^x dx' a(x') + y_0 \text{ (einfaches Integral)}$$

$$(ii) \ y'(x) = -\lambda y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda dx \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{y}{y_0}\right|\right) = -\lambda(x - x_0) \\ \Rightarrow y = y_0 e^{-\lambda(x-x_0)}$$

$$(iii) \ y'(x) = \alpha \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left(\left|\frac{y}{y_0}\right|\right) = \alpha \ln\left(\left|\frac{x}{x_0}\right|\right) \\ \Rightarrow y = y_0 \left|\frac{x}{x_0}\right|^\alpha$$

Physikalische Anwendungen:

- (a) (Radioaktiver Zerfall) $\dot{N} = -kN$
entspricht dem Beispiel (ii) $\Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
- (b) (Kräftefreie Bewegung) $\ddot{x} = 0$
Schritt 1: Setze zunächst $\dot{x} = v \Rightarrow$
Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = 0$
entspricht dem Beispiel (i) $\Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t dt' \dot{v} = v_0$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen in $\dot{x} = v(t) \Rightarrow \dot{x} = v_0$
entspricht wieder (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' v_0 = x_0 + v_0(t - t_0)$
- (c) (Bewegung im Schwerfeld) $\ddot{x} = -g$: geht analog!
Schritt 1: Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -g$
entspricht (i) $\Rightarrow v(t) = v_0 - \int_{t_0}^t dt' g = v_0 - g(t - t_0)$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen: $\dot{x} = v_0 - g(t - t_0)$
entspricht (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t dt' [v_0 - g(t - t_0)]$
 $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$
- (d) (Bewegung mit Reibung) $\ddot{x} = -\eta\dot{x}$: wieder analog!
Schritt 1: Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -\eta v$
entspricht Beispiel (ii) $\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
Schritt 2: Lösung für $v(t)$ einsetzen: $\dot{x} = v_0 e^{-\eta(t-t_0)}$
entspricht (i) $\Rightarrow x(t) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t dt' v_0 e^{-\eta(t-t_0)}}_{-\frac{1}{\eta} v_0 \exp(-\eta(t-t_0))|_{t_0}^t}$
 $\Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\eta} (1 - e^{-\eta(t-t_0)})$

Bemerkung: Die freien Konstanten x_0, y_0, t_0, v_0 etc. heißen **Integrationskonstanten**. Mehr dazu gleich.

4.1.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung $a(x, y) + b(x, y)y'(x) = 0$ heißt exakt, wenn es ein $F(x, y)$ gibt, so dass $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Lösungsverfahren: Für das totale Differential gilt dann:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dx \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = dx(a + by') = 0.$$

$$\Rightarrow F(x, y(x)) = \text{const für jede Lösung } y(x).$$

Löse $F(x, y(x)) = F_0$ nach $y(x)$ auf. Der Wert F_0 ist wieder eine Integrationskonstante.

Bemerkungen

- Wenn $a(x, y)$ und $b(x, y)$ stetig differenzierbar sind, dann muss für exakte Differentialgleichungen wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ die sogenannte Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ erfüllt sein. Damit kann man überprüfen, ob eine Differentialgleichung exakt ist.

- Auch Differentialgleichungen, die nicht exakt sind, kann man manchmal durch Anmultiplizieren eines sogenannten integrierenden Faktors $\mu(x, y)$ exakt machen (d.h. $a + by' = 0$ ist zwar nicht exakt, aber $\mu a + \mu by' = 0$ ist exakt).

Beispiele:

- (i) $y'(x) = -y/x \Rightarrow y + xy' = 0$ ist exakt mit $F(x, y) = xy \Rightarrow y(x) = F_0/x$
- (ii) $xy'(x) - y - x^2 = 0$ ist nicht exakt ($\frac{\partial}{\partial y}(-y - x^2) = -1 \neq \frac{\partial}{\partial x}x = 1$)
- (iii) $y'(x)/x - y/x^2 - 1 = 0$ ist exakt, ($\frac{\partial}{\partial y}(-y/x^2 - 1) = -1/x^2 = \frac{\partial}{\partial x}(1/x)$).
 Stammfunktion: $F(x, y) = y/x - x \equiv F_0 \Rightarrow$ Lösung $y = (F_0 + x)x$.
 NB: Im Vergleich zu (ii) ist hier ein integrierender Faktor $1/x^2$ eingeführt worden.

4.1.3 Lineare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ heißt linear, wenn $f(x, y)$ linear in y :
 $f(x, y) = a(x)y + b(x)$

Homogener Fall: $b(x) = 0$

$\rightarrow$ separable Gleichung: $\frac{dy}{y} = a(x) dx \Rightarrow y = y_0 \exp(\int_{x_0}^x dx' a(x'))$

Allgemeine Lösung: $y = \alpha e^{A(x)}$

$A(x)$: Stammfunktion zu $a(x)$ ($A'(x) = a$)

α : beliebig $\rightarrow$ Eindimensionale Schar von Lösungen

Tatsächliche Lösung wird durch Anfangsbedingung festgelegt

($\alpha = y_0 e^{-A(x_0)}$).

Physikalische Anwendungen: Alle in 4.1.1 diskutierten Anwendungen.

Inhomogener Fall: $b(x) \neq 0$

Vorab: Kennt man eine Lösung y_I von $y' = ay + b$, so kann man daraus durch Addition der Lösungen y_H des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ($y'_H = ay_H$) eine Schar von Lösungen konstruieren.

(Mit $y'_I = ay_I + b$ gilt für beliebige $y = y_I + \alpha y_H$:

$$y' = y'_I + \alpha y'_H = ay_I + b + a\alpha y'_H = ay + b)$$

Man braucht also nur eine Lösung zu finden.

Erstes Verfahren: Raten

(zum Beispiel $a, b = \text{const.}$, $y' = ay + b \Rightarrow y_I \equiv -b/a$ ist eine Lösung).

Zweites, systematisches Verfahren: "Variation der Konstanten"

Ansatz: $y(x) = \alpha(x) e^{A(x)}$

$$\rightarrow y' = e^A(\alpha A' + \alpha') \stackrel{!}{=} ay + b = A' \alpha e^A + b$$

$$\rightarrow \alpha' = b e^{-A} \Rightarrow \text{Einfache Integration } \alpha(x) = \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')}.$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle inhomogene Lösung: } y_I(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')}$$

$\Rightarrow$ Allgemein: (mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$)

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')} + C \right]$$

mit $C = y_0 e^{-A(x_0)}$.

Beispiel: $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x^3} =: ay + b$ mit $a = \frac{2}{x}, b = \frac{1}{x^3}$.

Homogene Lösung: Bereits berechnet (4.1.1, Bsp. (iii))

$$\rightarrow y_H = \alpha x^2 \quad (\widehat{=} \quad y_H = \alpha e^A \text{ mit } A = 2 \ln(x))$$

Inhomogene Lösung: Obige Formel einsetzen mit $A = 2 \ln(x)$

oder mit Ansatz: $y_I(x) = \alpha(x) x^2$ durchrechnen.

$$\rightarrow y_I' = 2\alpha x + \alpha' x^2 \stackrel{!}{=} 2\frac{y_I}{x} + \frac{1}{x^3} = 2\alpha x + \frac{1}{x^3}$$

$$\rightarrow \alpha' x^2 = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \alpha' = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \alpha(x) = -\frac{1}{4x^4}$$

$$\rightarrow y_I = \alpha x^2 = -\frac{1}{4x^2}$$

Allgemeine Lösung: $y = -\frac{1}{4x^2} + Cx^2$

Physikalische Anwendung: Eingangsbeispiel (e)

Bewegung mit Reibung im Schwerfeld $\ddot{x} = -\eta \dot{x} - g$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 = 0$

- Setze $\dot{x} = v \Rightarrow$ Gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{v} = -\eta v - g$
- Zugehörige homogene Gleichung: $\dot{v} = -\eta v$ wurde bereits gelöst
 $\rightarrow v = v_0 e^{-\eta(t-t_0)} =: A e^{-\eta t}$
- Inhomogene Lösung: Diesmal mit Raten $\rightarrow v_I = -g/\eta$
 $\rightarrow$ Allgemeine inhomogene Lösung: $v = -\frac{g}{\eta} + A e^{-\eta(t-t_0)}$
- Berücksichtige Anfangsbedingung $v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{g}{\eta}(e^{-\eta t} - 1)$
- Schließlich noch aufintegrieren: $x(t) = \int_0^t dt' v(t')$
 $\Rightarrow x(t) = -\frac{g}{\eta} t + \frac{g}{\eta^2}(1 - e^{-\eta t})$
 $(\frac{g}{\eta}: \text{Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell erreicht}).$

4.2 Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung

4.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung versus Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

1) Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemeine Form: $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$

bzw. Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Allgemeine Lösung hat die Form $\mathbf{y} = \mathbf{F}(x, C_1, \dots, C_n)$, wobei $(C_1, \dots, C_n)$ freie Konstanten. $\Rightarrow$ n -dimensionale Schar von Lösungen.

Konkrete Lösung (konkreten Werte von C_i) wird durch die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ festgelegt.

Hinreichende Bedingung für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (bei vorgegebenen Anfangsbedingungen): $\mathbf{f}(x)$ stetig und $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ stetig.

2) Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Form: $y^{(n)}(x) = \tilde{f}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

Reduktion auf ein n -dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung durch Definition $y_1(x) = y(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Differentialgleichungssystem: } \quad & y'_1(x) = y_2(x) \\ & y'_2(x) = y_3(x) \\ & \vdots \\ & y'_{n-1}(x) = y_n(x) \\ & y'_n(x) = \tilde{f}(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

bzw. vektoriell $\Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \tilde{f}(x, \mathbf{y}))$

Analog zu oben gilt dann: Allgemeine Lösung hat die Form $y = \tilde{F}(x, C_1, \dots, C_n)$ mit freien Integrationskonstanten C_i .

Fazit: Beide Probleme (Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung) sind im Prinzip äquivalent.

Man erhält eine n -dimensionale Schar von Lösungen.

3) Systeme von Differentialgleichungen n -ter Ordnung

lassen sich natürlich genauso auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zurückführen.

4.2.2 Lineare Differentialgleichungssysteme

Nach 4.2.1 genügt es, Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu betrachten. $\rightarrow$ Form $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ mit $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$: $n \times n$ -Matrix

Wieder Unterscheidung: **Homogener** Fall und **inhomogener** Fall

1) Allgemeine Aussagen zum homogenen Fall: (Gleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$.)
(ohne Beweis: Mehr dazu in Vorlesungen der Mathematik)

- Falls $a_{ij}(x)$ stetig in einem Intervall $x \in [x_0, x_1]$, ist die Differentialgleichung lösbar für beliebige Anfangsbedingungen (hinreichende Bedingung).
- **Superpositionsprinzip:** Mit $(\mathbf{y}^{[1]}, \dots, \mathbf{y}^{[k]})$ ist auch jede Linearkombination $\mathbf{y} = \sum \alpha_k \mathbf{y}^{[k]}$ Lösung des homogenen Systems.
- Lösungen $(\mathbf{y}^{[1]}, \dots, \mathbf{y}^{[k]})$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\sum \alpha_k \mathbf{y}^{[k]}(x) \equiv 0$ auf dem Intervall $x \in [x_0, x_1]$ automatisch folgt: $\alpha_k = 0 \forall k$.
Falls $a_{ij}(x)$ stetig ist, hat das Differentialgleichungssystem genau n linear unabhängige Lösungen.
- **Fundamentalsystem:** Satz n linear unabhängiger Lösungen $\mathbf{y}^{[k]}$
Spannt die **Fundamentalmatrix** auf: $Y(x) = (\mathbf{y}^{[1]}, \dots, \mathbf{y}^{[n]})$

2) Allgemeine Aussagen zum inhomogenen Fall: ($\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$)

Lösungsverfahren analog dem eindimensionalen Fall

- Finde zuerst Schar der Lösungen zum zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}'_H = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_H$
 $\rightarrow n$ unabhängige Lösungen $y_H = \sum_k \alpha_k \mathbf{y}^{[k]} = y_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Finde dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung,
z.B. durch Variation der Konstanten
 $\rightarrow$ Ansatz $\mathbf{y}_I = \alpha_k(x) \mathbf{y}^{[k]}(x)$ für ein k .
- Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:
 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_I + \mathbf{y}_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

4.2.3 Speziell: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Betrachte nun speziell lineare Differentialgleichungen n ter Ordnung der Form $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) + b(x)$ mit konstanten Koeffizienten a_k .

1) Homogener Fall

Homogene Gleichung $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \Rightarrow y^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0$
Schreibe um $\left[\left(\frac{d}{dx} \right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{d}{dx} \right)^k \right] y = 0$.
Faktorisiere: $\left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right) \right] y = 0$.

NB: Hier wird der Fundamentalsatz der Algebra ausgenutzt (1.4.1). Das Polynom n ter Ordnung $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ lässt sich eindeutig in Linearfaktoren $(x - \lambda_k)$ zerlegen, d.h. $P(x) = \prod_k (x - \lambda_k)$, mit reellen oder komplexen Nullstellen λ_k .

Wir werden unten sehen: Jeder Faktor $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_k \right)$ liefert eine unabhängige homogene Lösung.

$\rightarrow$ Lösungen können nach Art der Nullstellen klassifiziert werden.

- Einfache reelle Nullstelle λ_k
 $\rightarrow$ liefert Lösung y_k mit $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_k = 0 \Rightarrow y_k = e^{\lambda_k x}$.
- Einfache komplexe Nullstelle $\lambda_k = p_k + iq_k$
 $\rightarrow$ analog: liefert Lösung $y_k = e^{(p_k + iq_k)x}$: komplex!
 Konstruktion reeller unabhängiger Lösung wie folgt:
 Mit λ_k ist auch $\lambda_k^* = p_k - iq_k$ Nullstelle und $y_k^* = e^{(p_k - iq_k)x}$ Lösung
 (da $P(\lambda_k^*) = (P(\lambda_k))^* = 0$)
 $\rightarrow$ zugehöriger Satz von komplexen unabhängigen Lösungen y_k, y_k^*
 kann durch Linearkombination zu einem neuen Satz von zwei
reellen unabhängigen Lösungen zusammengesetzt werden:

$$\Rightarrow y_{k,1} = \frac{1}{2}(y_k + y_k^*) = e^{p_k x} \cos(q_k x)$$

$$y_{k,2} = \frac{1}{2i}(y_k - y_k^*) = e^{p_k x} \sin(q_k x)$$
- Mehrfache Nullstelle λ_k , z.B. r -fache Nullstelle
 $\rightarrow$ Konstruiere r zugehörige unabhängige Lösungen
 1. Lösung: $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,1} = 0 \Rightarrow y_{k,1} = e^{\lambda_k x}$
 2. Lösung: $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)^2 y = 0$ wird auch erfüllt für Funktionen $y_{k,2}$ mit
 $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,2} = y_{k,1} = e^{\lambda_k x}$
 (dann ist $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)^2 y_{k,2} = (\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_{k,1} = 0$)
 | Inhomogene Gleichung, Lösung gemäß 4.1.2 (Übungsaufgabe)
 $\Rightarrow y_{k,2} = x e^{\lambda_k x}$
 $\vdots$
 r -te Lösung: $y_{k,r} = x^{r-1} e^{\lambda_k x}$

Fazit: Man erhält n unabhängige Lösungen $y_{k,r}(x)$,
 Bilden Fundamentalsystem.

Allgemeine Lösung: $y(x) = \sum_k \sum_{r=1}^{n_k} c_{k,r} x^{r-1} e^{\lambda_k x}$,
 wobei n_k : Vielfachheit der k -ten Nullstelle λ_k .

Physikalische Anwendungen:

- (b) (Freies Teilchen): $\ddot{x} = 0$ bzw. $\frac{d^2}{dt^2} x = (\frac{d}{dt} - 0)(\frac{d}{dt} - 0)x = 0$
 $\rightarrow$ zweifache Nullstelle bei $\lambda = 0$
 $\rightarrow$ Unabhängige Lösungen: $x_1(t) = e^{0 \cdot t} = 1$, $x_2(t) = t e^{0 \cdot t} = t$
 $\rightarrow$ Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 + c_2 t$ (bzw. $(x_0 + v_0 t)$)
- (d) (Freier Fall mit Reibung): $\ddot{x} + \eta \dot{x} = 0$
 bzw. $(\frac{d^2}{dt^2} + \eta \frac{d}{dt}) x = (\frac{d}{dt} - 0)(\frac{d}{dt} + \eta) x = 0$
 $\rightarrow$ Einfache Nullstellen bei $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\eta$
 $\rightarrow$ Unabhängige Lösungen: $x_1(t) = e^{0t} = 1$, $x_2(t) = e^{-\eta t}$
 $\rightarrow$ Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 + c_2 e^{-\eta t}$
- (f) (Schwingungsgleichung): $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
 bzw. $(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2) x = (\frac{d}{dt} + i\omega)(\frac{d}{dt} - i\omega) x = 0$
 $\rightarrow$ Einfache Nullstellen bei $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$
 $\rightarrow$ Unabhängige Lösungen: $x_{1,2}(t) = e^{\pm i\omega t}$

oder alternativ Satz von reellen unabhängigen Lösungen:

$$\rightarrow \hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \cos(\omega t), \quad \hat{x}_2(t) = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = \sin(\omega t)$$

$\rightarrow$ Allgemeine Lösung $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

(g) (Schwingungsgleichung mit Reibung): $\ddot{x} + \eta \dot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\text{bzw. } \left(\frac{d^2}{dt^2} + \eta \frac{d}{dt} + \omega^2\right) x = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) x = 0$$

$\rightarrow$ Nullstellen bei $\lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega^2}$

$\Rightarrow$ Verhalten wird durch $\Delta := \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - \omega^2$ bestimmt!

Fall 1: $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm i\sqrt{|\Delta|}$ komplex

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t), \quad x_2(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$$

$\rightarrow$ Schwingungsfall

Fall 2: $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\Delta}$ reell

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\Delta})t}, \quad x_2(t) = e^{-(\frac{\eta}{2} - \sqrt{\Delta})t}$$

$\rightarrow$ überdämpfter Fall bzw. Kriechfall

Fall 3: $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\eta}{2}$ ist doppelte Nullstelle

$$\text{Lösungen: } x_1(t) = e^{-\frac{\eta}{2}t}, \quad x_2(t) = t e^{-\frac{\eta}{2}t}$$

$\rightarrow$ kritisch gedämpfter Fall bzw. aperiodischer Grenzfall

2) Inhomogener Fall

$$\text{Form: } y^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b(x)$$

Verfahren wie Kapitel 4.1.3.

- Finde eine spezielle Lösung y_I .
- Addiere Schar von homogenen Lösungen darauf.

Partikuläre Lösung z.B. wieder über Variation der Konstanten,

z.B. Ansatz $y_I = c_{kr}(x)e^{\alpha_k x} x^{r-1}$ für eine Kombination (k, r) , oder allgemeiner den Ansatz $y_I = \sum_k \sum_r c_{kr}(x)e^{\alpha_k x} x^{r-1}$.

Physikalische Anwendung: Eingangsbeispiel (h)

$$\text{Getriebene Schwingung } \ddot{x} + \eta \dot{x} + \omega^2 x = f \cos(\Omega t)$$

- Homogener Fall: $\ddot{x}_H + \eta \dot{x}_H + \omega^2 x_H = 0$ bereits gelöst (oben 1 g))

- Inhomogener Fall: Suche nach spezieller Lösung $x_I(t)$:

Rate: $x_I(t)$ folgt treibender Kraft (evtl. phasenverschoben)

$\rightarrow$ Ansatz: $x_I(t) = A \cos(\Omega t - \phi)$ (mit Phasenverschiebung ϕ)

$$\text{Setze Ansatz ein in } \ddot{x}_I + \eta \dot{x}_I + \omega^2 x_I = f \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow -A\Omega^2 \cos(\tau) - \eta A\Omega \sin(\tau) + \omega^2 \cos(\tau) = f \cos(\Omega t) \text{ mit } \tau := \Omega t - \phi$$

$$\text{Nutze } \cos(\Omega t) = \cos(\tau + \phi) = \cos(\tau) \cos(\phi) - \sin(\tau) \sin(\phi)$$

$$\Rightarrow \cos(\tau)[A(\omega^2 - \Omega^2) - f \cos(\phi)] + \sin(\tau)[- \eta A\Omega f \cos(\phi) + f \sin(\phi)] = 0$$

Gilt in einem Intervall von τ . $\cos(\tau)$ und $\sin(\tau)$ sind linear unabhängig

$\rightarrow$ Ausdrücke in Klammern [...] müssen verschwinden.

$$\Rightarrow f \cos(\phi) = A(\omega^2 - \Omega^2) \text{ und } f \sin(\phi) = A\Omega\eta$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) = \Omega\eta/(\omega^2 - \Omega^2) \text{ und } A^2 = f^2/[(\Omega\eta)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2]$$

$$\Rightarrow \text{Lösung ist } x_I(t) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega\eta)^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}} \cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{\Omega\eta}{\omega^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

- Allgemeine Lösung, : $x(t) = x_I(t) + x_H(t)$

$$\text{z.B. Schwingfall } x(t) = x_I(t) + A e^{-\frac{\eta}{2}t} \cos(\sqrt{|\Delta|}t) + B e^{-\frac{\eta}{2}t} \sin(\sqrt{|\Delta|}t)$$

4.2.4 Lineare Differentialgleichssysteme mit konstanten Koeffizienten

Hier braucht man Konzepte der linearen Algebra (sollte in Mathe für Physiker inzwischen drangekommen sein, sonst siehe Skizze in Kapitel 2.4.6).

Diskutiere nur homogenen Fall.

Form: $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{y}(x)$ mit $\mathbf{A} \equiv \text{const.}$

Ansatz: $\mathbf{y}^{[j]} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{[j]}$

$\rightarrow \lambda_j \mathbf{u}^{[j]} e^{\lambda_j x} = \mathbf{A} \mathbf{u}^{[j]} e^{\lambda_j x} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{u}^{[j]} = \lambda_j \mathbf{u}^{[j]}$: Eigenwertgleichung!

Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$.

$\rightarrow n$ Nullstellen, reell oder komplex, können auch aufeinanderfallen.

Reelle Eigenwerte λ_j , Eigenvektor $\mathbf{u}^{[j]} \rightarrow \mathbf{y}^{[j]}(x) = \mathbf{u}^{[j]} e^{\lambda_j x}$.

Komplexe Eigenwerte: Falls λ_j Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{u}^{[j]}$, dann ist auch λ_j^* Eigenwert mit Eigenvektor $\mathbf{u}^{[j]*}$ (Check: Einsetzen).

$\rightarrow$ Aus $\mathbf{y}^{[j]} = \mathbf{u}^{[j]} e^{\lambda_j x}$ und $\mathbf{y}^{[j]*} = \mathbf{u}^{[j]*} e^{\lambda_j^* x}$

können reelle Lösungen zusammengesetzt werden.

Entartete Eigenwerte: λ_j (r -fach entartet)

Falls es r unabhängige zugehörige Eigenvektoren gibt (d.h. Dimension des Eigenraums zu λ_j ist r), liefert das r unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{[j]}$.

Falls die Dimension des Eigenraums kleiner als r ist, müssen zusätzliche Lösungen konstruiert werden.

Sei λ_j z.B. zweifach entartet, es gibt aber nur einen linear unabhängigen Eigenvektor $\mathbf{u}^{[j]}$.

Ansatz: $\mathbf{y}^{[j,1]} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{[j]}$, $\mathbf{y}^{[j,2]} = e^{\lambda_j x} (\mathbf{u}^{[j]} x + \mathbf{v})$.

Einsetzen: $e^{\lambda_j x} (\lambda_j \mathbf{v} + \mathbf{u}^{[j]} + \lambda_j x \mathbf{u}^{[j]}) \stackrel{!}{=} \mathbf{A} \mathbf{y}^{[j,2]} = e^{\lambda_j x} (x \mathbf{A} \mathbf{u}^{[j]} + \mathbf{A} \mathbf{v})$
 $\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}^{[j]}$.

Diese Gleichung hat eine Lösung $\mathbf{v}$ (ohne Beweis).

$\Rightarrow$ Man erhält zwei linear unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{[j,1]}$, $\mathbf{y}^{[j,2]}$.

Höhere Entartungen: Analoges Verfahren.

Allgemein erhält man r linear unabhängige Lösungen $\mathbf{y}^{[j,\nu]}$. Jede der n Komponenten von $\mathbf{y}^{[j,\nu]}$ ist ein Polynom vom Grad höchstens r .

Kapitel 5

Vektoranalysis

5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung

5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren

Grundbegriffe der linearen Algebra werden ab jetzt vorausgesetzt (siehe auch Anhang A).

Erinnerung an 2.1.2:

In der Physik werden physikalische Größen durch ihr Transformationsverhalten charakterisiert. Gegeben sei eine Drehung $\mathcal{D}$, die ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Rechtssystem) in ein anderes überführt. ($\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 1$, $\det(\mathcal{D}) = 1$).

Physikalischer Skalar:

Einzelne Zahl, bleibt unverändert. (z.B. Temperatur)

Physikalischer Vektor: (in d Dimensionen)

Satz von d Zahlen v_i (Koeffizienten), die sich unter einer Drehung $\mathcal{D}$ folgendermaßen transformieren: $v_i \rightarrow v'_i = \sum_j \mathcal{D}_{ij} v_j$ bzw. in Vektorschreibweise $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \mathcal{D}\vec{v}$ (z.B. Geschwindigkeit, Kraft).

Physikalischer Tensor: (vollständigkeitshalber)

Verallgemeinerung für Matrizen oder noch höherdimensionale Objekte (z.B. Trägheitstensor). Allgemein **Tensor nter Stufe** $t_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ transformiert sich gemäß $t_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_n} \mathcal{D}_{i_1 j_1} \mathcal{D}_{i_2 j_2} \dots \mathcal{D}_{i_n j_n} t_{j_1, \dots, j_n}$.

Bemerkungen:

- Wir beschränken uns hier absichtlich auf Drehungen mit $\det(\mathcal{D}) = 1$.
Bei Spiegelungen mit $\det(\mathcal{D}) = -1$ ist das Verhalten nicht einheitlich!
z.B. Punktspiegelung am Ursprung dreht das Vorzeichen von Ort $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ um. Aber: Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ändert Vorzeichen nicht.
Solche Vektoren heißen auch **Pseudovektoren**.
- In der Relativitätstheorie kommt als 4. Dimension die Zeit hinzu.
Drehung $\rightarrow$ Lorentztransformation. Man spricht dann von **Viererskalaren, Vierervektoren, Vierertensoren**.

5.1.2 Felder

Felder sind skalare, vektorielle oder tensorielle Funktionen vom Ort.

- **Skalarfeld** $\Phi(\vec{r})$ (z.B. Temperaturfeld, Potential)

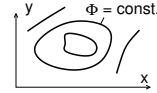
Transformationsverhalten unter Drehung $\mathcal{D}$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathcal{D}\vec{r}$$

$$\Phi(\vec{r}) \rightarrow \Phi'(\vec{r}') = \Phi\left(\underbrace{\vec{r}}_{\substack{\text{alte} \\ \text{Koordinaten}}}\right) = \Phi(\mathcal{D}^{-1} \underbrace{\vec{r}'}_{\substack{\text{neue} \\ \text{Koordinaten}}})$$

Graphische Darstellung: "Höhenlinien"

Linien, auf denen Feld $\Phi(\vec{r})$ konstant ist.



- **Vektorfeld** $\vec{v}(\vec{r})$ (z.B. Geschwindigkeitsfeld, elektrisches Feld)

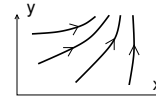
Transformationsverhalten unter Drehung $\mathcal{D}$:

$$\vec{v}(\vec{r}) \rightarrow \vec{v}'(\vec{r}') = \mathcal{D}\vec{v}(\mathcal{D}^{-1}\vec{r}')$$

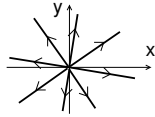
Graphische Darstellung: Feldlinien

– Richtung: $\vec{v}$

– Dichte senkrecht zur Richtung: $|\vec{v}|$



Beispiel:



– Richtung $\vec{v}$: radial nach außen

– Betrag $v \propto 1/r$ (zwei Dimensionen)
bzw. $v \propto 1/r^2$ (drei Dimensionen)

- **Tensorfelder** etc. (Objekte höherer Ordnung)

5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral

- **Raumkurve** C : (vgl. 3.1.6.2) Charakterisiert über geeignete Parametrisierung:

$C: \vec{r}(s), s \in [s_0 : s_1]$ (s : Laufparameter, $\vec{r}(s)$ vektorwertige Funktion)

Parameter s ist im Prinzip beliebig, könnte z.B. die Zeit sein. Die Funktion $\vec{r}(s)$ soll differenzierbar sein, d.h. jede Komponente $r_i(s)$ ist differenzierbar $\rightarrow$ **glatte** Kurve.

- **Infinitesimales Wegelement** auf Kurvenstück zu ds : $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds$

$\Rightarrow$ **Infinitesimales Längenelement**: $dl = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|$

- **Kurvenintegral erster Art**:

Wegintegral über skalares Feld $\Phi(\vec{r})$: $\int_C dl \Phi(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| \Phi(\vec{r})$

Speziell $\Phi(\vec{r}) \equiv 1 \Rightarrow$ Bogenlänge $L = \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| =: \int_C dl$

NB: Notation für geschlossene Kurven oft $\oint dl$

Beispiele:

Umfang eines Kreises: (Benutze Kreiskoordinaten (r, ϕ))

$$\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0 : 2\pi], \quad \frac{d\vec{r}}{d\phi} = R \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = R \Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = 2\pi R.$$

Umfang einer Ellipse

Ellipsengleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; Sei $b > a$.

→ Einheitskreis, gestreckt um (a, b) in Richtung (x, y) .

→ Parametrisierung in Kreiskoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ b \sin \phi \end{pmatrix} = \vec{r}(\phi)$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} = b \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

mit $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$: Exzentrizität.

$$\Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = b \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} = bE(e, 2\pi).$$

- **Kurvenintegral zweiter Art:**

Wegintegral über Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$: $\int_C d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$

Beispiel: Berechnung der physikalischen Arbeit W (Kraft mal Weg), wenn man einen "punktförmigen" Körper entlang eines bestimmten Weges $\vec{r}(t)$ bewegt. Kraft hängt vom Ort ab ($\vec{F}(\vec{r})$)

$$\Rightarrow dW = d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}); W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}).$$

5.1.4 Flächenintegral

- **Fläche O** (i.A. gekrümmt):

Parametrisiert durch *zwei* Variablen (u, v) : $\vec{r}(u, v)$

- **Infinitesimales Flächenelement** zu du, dv :

Aufgespannt durch die beiden Vektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$.

- Definiere vektorielles Flächenelement $d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$
 - steht lokal senkrecht auf der Fläche O ,
 - Betrag ist Flächeninhalt des Flächenelements: $dA = |d\vec{A}|$

- **Skalares Oberflächenintegral:**

Oberflächenintegral über skalares Feld $\Phi(\vec{r})$:

$$\int_O dA \Phi(\vec{r}) := \int du dv \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}_{\text{Flächenelement}} \Phi(\vec{r})$$

$$\text{Speziell } \Phi(\vec{r}) \equiv 1 \quad \Rightarrow \text{Oberfläche } \int_O dA = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$$

Beispiel: Oberfläche einer Kugel vom Radius R .

Parametrisiere mit Kugelkoordinaten (θ, ϕ) :

$$\vec{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin \theta \vec{r}$$

$$\Rightarrow A = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -R^2 2\pi \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

• **Vektorielltes Oberflächenintegral:**

Oberflächenintegral über Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$:

$$\int_O d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int du dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Beispiele:

- Berechnung des (elektrischen) Stroms I durch Draht aus der lokalen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$. Strom fließt durch Querschnittsfläche O des Drahts. Nur der Anteil senkrecht zur Fläche trägt zum Strom bei. (Dabei ist es egal, wie die Fläche O genau gelegt wird)
- Allgemeiner: Berechnung eines Flusses $\vec{J}$ aus einer Flussdichte $\vec{j}(\vec{r})$
 $\vec{J} = \int_O d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r})$ (unabhängig von der genauen Wahl der Oberfläche).

5.2 Der Nabla-Operator

In diesem Abschnitt wird ein wichtiges Symbol der Vektoranalysis eingeführt: Der Ableitungsvektor

$$\nabla \equiv \vec{\partial} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

oder allgemeiner, für Koordinatensystem in d Raumdimensionen mit 'orthonormierten' Basisvektoren $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ (orthonormiert: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$)

$$\nabla = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial_{x_i}$$

Im Folgenden werden wir Anwendungen des Nabla-Operators diskutieren, zunächst für den einfachsten Fall der kartesischen Koordinaten (x, y) (in 2 Dimensionen) bzw. (x, y, z) (in 3 Dimensionen).

5.2.1 Skalare Felder und Gradient

Gegeben skalares Feld $\Phi(\vec{r})$, z.B. Höhe $h(x, y)$. Dann ist:

- (i) **Gradient:** $\nabla \Phi = \vec{\text{grad}} \Phi$ ein Vektor in Richtung des **steilsten Anstieges** von Φ mit dem Betrag $|\nabla \Phi|$: Wert der Steigung.
- (ii) **Richtungsableitung:** $\vec{n} \cdot \nabla \Phi$ mit Einheitsvektor $|\vec{n}| = 1$ entspricht Ableitung in Richtung $\vec{n}$, d.h. $\vec{n} \cdot \nabla \Phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r}))$.

Begründung:

Zunächst (ii): Ableitung in Richtung $\vec{n}$ am Ort $\vec{r}$:

$$\frac{1}{\epsilon} (\Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r})) = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \epsilon n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \epsilon n_z \right) = \vec{n} \cdot \nabla \Phi.$$

Dann (i): Richtung, in der Ableitung maximal wird, ist $\vec{n} \parallel \nabla \Phi$

Weitere Anwendung: **Totales Differential** der Funktion Φ

$$d\Phi = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = (\nabla \Phi) \cdot d\vec{r}.$$

Folgerung: Betrachte Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = \nabla\Phi$:

Für beliebige Kurve C zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ gilt:

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \cdot (\nabla\Phi) = \int_1^2 d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

hängt *nicht* vom Weg ab.

Speziell: $\oint d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$ für alle geschlossenen Kurven.

5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation

Sei nun ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$. Dann ist

(i) $\nabla \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$: **Divergenz** von $\vec{v}(\vec{r})$.

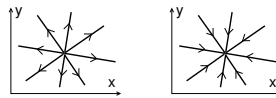
(ii) $\nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$: **Rotation** von $\vec{v}(\vec{r})$.

Interpretation : Etwas weniger offensichtlich als im Fall des Gradienten

(i) **Divergenz**: Feld "entsteht" oder "verschwindet".

Im Feldlinienbild:

Feldlinien entstehen
oder enden.



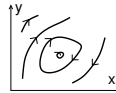
Begründung: Satz von Gauß (kommt noch, siehe 5.4.1)

Falls $\nabla \cdot \vec{v} = 0$: Alles, was reinfließt, fließt auch wieder raus $\rightarrow$ 'quellenfrei'.

(ii) **Rotation**: Feld hat im Raum "Wirbel".

Im Feldlinienbild:

geschlossene Feldlinien



Begründung: Satz von Stokes
(kommt bald, siehe 5.4.3)

Falls $\nabla \times \vec{v} = 0$: Feld ist "wirbelfrei".

5.2.3 Der Laplace-Operator

Besonders häufig auftretende Konstruktion:

$$\text{div grad } \Phi = \nabla^2 \Phi = \partial_{xx} \Phi + \partial_{yy} \Phi + \partial_{zz} \Phi =: \Delta \Phi$$

Bedeutung des Operators $\Delta = \nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$:

Linearer Differentialoperator mit hoher Symmetrie ($\pm x, \pm y, \pm z$ gleichwertig, de facto sogar isotrop).

$\Rightarrow$ Taucht in vielen wichtigen physikalischen Gesetzen auf (Schrödingergleichung, Diffusionsgleichung, Wellengleichung, siehe Kapitel 8).

5.2.4 Wichtige Zusammenhänge

- (a) $\boxed{\text{Div rot } \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0}$ (falls $\vec{v}$ zweimal differenzierbar)

$$\begin{aligned} \text{Rechnung: } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \stackrel{\substack{\text{Vertausche} \\ \text{Ableitungen}}}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_k v_j \\ &\stackrel{\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{kji} \partial_i \partial_k v_j \stackrel{k \leftrightarrow i}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Folgerung: Für Felder $\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$ (Vektorpotential) gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Anwendung: Elektrodynamik, siehe Theorie 1

- (b) $\boxed{\text{Rot grad } \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0}$ (falls Φ zweimal differenzierbar)

Rechnung: Analog (a)

Folgerung: Für **Potentialfelder** $\vec{v} = \nabla \Phi$ gilt automatisch $\nabla \times \vec{v} = 0$.
(Umgekehrt: Felder mit $\nabla \times \vec{v} = 0$ lassen sich im Allgemeinen als Potentialfelder schreiben. Mehr dazu in Theorie 1.)

- (c) Anwendung von ∇ auf Produkte von Feldern.

Produktregel wie üblich, z.B.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \cdot \vec{v} + \Phi \nabla \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \times (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \times \vec{v} + \Phi \nabla \times \vec{v} = -\vec{v} \times (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= -\vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) + \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} (\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} \\ &\quad \text{mit } (\vec{v} \cdot \nabla) = (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

5.3 Krummlinige Koordinaten

5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme (x, y, z) bzw. $(x_1, \dots, x_d)$ sind nur eine mögliche Form, den Raum zu parametrisieren.

Alternative, gern benutzte Koordinatensysteme, sind z.B. Polarkoordinaten (vgl. 3.3.5.2)

$$2 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Kreiskoordinaten} (r, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x &= & r \cos \varphi \\ y &= & r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Zylinderkoordinaten} (\rho, \varphi, z) \quad \begin{pmatrix} x &= & \rho \cos \varphi \\ y &= & \rho \sin \varphi \\ z &= & z \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Kugelkoordinaten} (r, \theta, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x &= & r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= & r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Formalismus:

- (i) Definiere Koordinaten $(u_1, \dots, u_d)$ (in d Dimensionen) durch Vektorfunktion $\vec{r}(u_1, \dots, u_d) = (x_1(u_1, \dots, u_d), \dots, x_d(u_1, \dots, u_d))$.

Bedingung: Vektoren $\partial \vec{r} / \partial u_i$ sind linear unabhängig, das heisst

$$\begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial u_1 & \cdots & \partial x_1 / \partial u_d \\ \vdots & & \vdots \\ \partial x_d / \partial u_1 & \cdots & \partial x_d / \partial u_d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (Jacobi-Determinante).}$$

- (ii) **Koordinatenlinien** Kurven $\vec{r}(u_1, \dots, u_d)$, die dadurch definiert sind, dass man alle u_i bis auf eines festhält.

(Beispiel: Kugelkoordinaten – Längen- und Breitengrade)

- (iii) **Orthogonale Koordinaten** liegen dann vor, wenn die Koordinaten sich immer senkrecht schneiden $\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = 0$ für $i \neq j$.

Alle oben als Beispiele genannten Koordinatensysteme sind orthogonal.

z.B. Polarkoordinaten $\vec{r}(r, \phi) = r(\cos \phi, \sin \phi)$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0$$

Analog für Zylinder- und Kugelkoordinaten.

- (iv) **Basissysteme** krummliniger Koordinaten

Basisvektoren parallel zu Koordinatenlinien $\vec{b}_i \propto \partial \vec{r} / \partial u_i$.

Variieren von Ort zu Ort.

Speziell orthogonale Koordinaten:

Man kann lokal normierte **Orthonormalbasis** definieren:

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

Konkret: Gebräuchliche Koordinatensysteme

- Kreiskoordinaten (r, φ)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und $h_r = 1, h_\varphi = r$

- Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1$$

- Kugelkoordinaten (r, θ, φ)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

(v) Volumenelement (vgl. 3.3.5.3)

Über Jacobi-Determinante:

Volumenelement, das von $(du_1, \dots, du_d)$ aufgespannt wird, entspricht $dV = du_1 \dots du_d |\det(J)|$ mit der Jacobi-Matrix $J_{ij} = (\partial x_i / \partial u_j)$.

Speziell orthogonale Koordinaten: $\partial \vec{r} / \partial u_i$ stehen senkrecht aufeinander
 $\Rightarrow |\det J| = \prod_i \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = |h_1 \dots h_d|$

z.B. Polarkoordinaten: $dV = r \, dr \, d\varphi$

Zylinderkoordinaten $dV = \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$

Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen

Vektoren: $\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{v}) =: \sum_i \vec{e}_i v_i$

Nabla-Operator Analog: $\nabla = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \nabla)$

Erinnerung: $\vec{e} \cdot \nabla f(\vec{r})$ ist Ableitung von $f(\vec{r})$ in Richtung $\vec{e}$.

$$\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \nabla f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial u_i} \left/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i}}$$

Laplace-Operator:

Kann im Einzelfall einfach durch Einsetzen berechnet werden.

Eleganter: Allgemeine Gleichung (in 3 Dimensionen)

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{h_i h_j}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right)}$$

bzw. ausgeschrieben

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right)}$$

Analog in 2 Dimensionen

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right)}$$

(Rechnung dazu:

Berechne zuerst $\nabla \cdot \vec{A}$ für beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \sum_k \vec{e}_k A_k \quad \text{mit} \quad A_k := (\vec{e}_k \cdot \vec{A}) \\
 | \quad \vec{e}_k &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) A_k \\
 | \quad \vec{e}_j &= h_j \nabla u_j \quad (\text{da} \quad h_j \nabla u_j = h_j \sum_i \underbrace{\vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial u_j}{\partial u_i}}_{\delta_{ij}} = \vec{e}_j \sqrt{ }) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (h_i (\nabla u_i) \times h_j (\nabla u_j)) A_k = \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \nabla (h_i h_j A_k ((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \underbrace{((\nabla(h_i h_j A_k)))}_{(\vec{e}_i/h_i) \times (\vec{e}_j/h_j)} \underbrace{((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))}_{\nabla u_j (\nabla \times \nabla u_i) - \nabla u_i (\nabla \times \nabla u_j = 0)} + h_i h_j A_k \underbrace{\nabla((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))}_{\nabla u_j (\nabla \times \nabla u_i) - \nabla u_i (\nabla \times \nabla u_j = 0)} \\
 | \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= \sum_l \epsilon_{ijl} \vec{e}_l \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl}}_{\epsilon_{ijk}^2 \delta_{kl}} \nabla (h_i h_j A_k) \frac{\vec{e}_l}{h_i h_j} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{1}{h_i h_j} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \nabla (h_i h_j A_k)}_{\frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)
 \end{aligned}$$

Nun Laplace-Operator in drei Dimensionen:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Phi &= \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{\partial}{\partial u_k} [\nabla \Phi]_k \\
 \text{mit} \quad [\nabla \Phi]_k &:= \vec{e}_k \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}
 \end{aligned}$$

Zwei Dimensionen: Benutze Formel für drei Dimensionen mit virtueller Koordinate z , von der nichts abhängt ($\partial/\partial z = 0, h_z = 1$.)

5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme

2D Kreiskoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_r = 1, \quad h_\varphi = r$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

3D Zylinderkoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3D Kugelkoordinaten

$$\text{Definition: } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Basisvektoren: } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normierungskonstanten: } h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

$$\text{Nabla-Operator: } \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Laplace-Operator: } \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

5.4 Integralsätze

Erinnerung: Hauptsatz der Integralrechnung in einer Dimension:

$$\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a)$$

Ziel dieses Kapitels: Verallgemeinerung(en) auf mehrere Dimensionen.

5.4.1 der Gaußsche Integralsatz

5.4.1.1 Der Satz

Satz: Sei V ein räumliches Gebiet mit Oberfläche ∂V , die sich aus endlich vielen regulären orientierbaren Flächenstücken zusammensetzt. Sei $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von V definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}}$$

Hier ist $\oint d\vec{A} \cdot \vec{F}$ das im Abschnitt 5.1.4 eingeführte vektorielle Oberflächenintegral, wobei der Normalenvektor nach außen zeigt.

Beweisskizze:

- 1) V sei achsenparalleler Quader der Seitenlängen a_x, a_y, a_z .
 Analysiere im Integral $\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \int_V dV (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)$ zunächst den Beitrag von $\partial_x F_x$.

$$\begin{aligned} \leadsto \int_V dV \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \underbrace{\int_0^{a_y} dy \int_0^{a_z} dz}_{=: \iint_{A_{yz}} dA} \underbrace{\left(\int_0^{a_x} dx \frac{\partial F}{\partial x} \right)}_{F_x(a_x, y, z) - F_x(0, y, z)} \\ &= \underbrace{\iint_{A_{yz}} dA \vec{e}_x \cdot \vec{F}(a_x, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = a_x} + \underbrace{\iint_{A_{yz}} dA (-\vec{e}_x) \cdot \vec{F}(0, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = 0} \end{aligned}$$

 Analog Beiträge von $\partial_y F_y$ und $\partial_z F_z$.
 Zusammen: Gaußscher Satz für Quader.
- 2) V sei nun beliebiges Gebiet. Setze es aus Quadern zusammen.
 - Volumenintegrale (linke Seite) addieren sich einfach auf.
 - Flächenintegrale (rechte Seite): Beiträge der "Zwischenwände" heben sich auf, da die Normalen entgegengesetzte Vorzeichen haben.
 - Die Beiträge an den *Oberflächen* des Gebietes werden von den gestückelt zusammengesetzten Quaderoberflächen korrekt approximiert wegen $d\vec{A} \cdot \vec{F} = \sum_i dA_i F_i$.

Bemerkung:

Der Beweis läßt sich ohne weiteres für beliebige (d) Dimensionen verallgemeinern. Dabei ist $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$ der d -dimensionale Nabla-Operator, und $d\vec{A}$ das infinitesimale "Flächen"-Element, das auf der $(d-1)$ -dimensionalen Oberfläche des Gebiets V senkrecht steht.

Anwendungsbeispiele**a) Kontinuitätsgleichung**

Betrachte Massefeld der Dichte $\rho(\vec{r}, t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Für Masse im Volumen M_V gilt:

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Andererseits: $\rho \vec{v}$ beschreibt Massenfluss, daher entspricht $\frac{\partial M_V}{\partial t}$ einem Nettofluss von Masse durch Oberfläche ∂V .

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} \stackrel{\text{Vorzeichen: d}\vec{A} \text{ zeigt nach außen}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\rho \vec{v}) \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} - \int_V dV \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Somit gilt $\int_V dV \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right\}$ für beliebige Gebiete V .

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ ("Massenerhaltung")

b) Feld einer Punktladung q

Betrachte elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ für $r \neq 0$.

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Kugelkoordinaten}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) \stackrel{:=q}{=} 0 \text{ für } r \neq 0.$$

Andererseits: Betrachte Kugel mit Radius R , die den Ursprung enthält:

$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{\vec{e}_r \sin \theta d\theta d\varphi} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \frac{q}{R^2} = 4\pi q$$

Somit: $\nabla \cdot \vec{E}$ ist überall Null außer bei $r = 0$.

Aber: Integral über $\nabla \cdot \vec{E}$ ist ungleich Null.

$\rightarrow$ Diracsche Deltafunktion, siehe Kapitel 6.

5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz

1) Volumensatz: $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r}.$

Wähle $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$. Benutze $\nabla \vec{r} = 3$ (in 3 Dimensionen).

Es folgt: $\int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V dV (\nabla \vec{r}) = 3 \int_V dV = 3V$

2) Für Skalarfeld Φ , das auf einer Umgebung von V definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \Phi = \oint_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

(Denn: Betrachte beliebigen Vektor $\vec{a} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot (\vec{a} \Phi) = \vec{a} \cdot (\nabla \Phi).$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \int_V dV \nabla \Phi = \int_V dV \nabla \cdot (\vec{a} \Phi) \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\vec{a} \Phi) = \vec{a} \cdot \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

Also: $\vec{a} \cdot \left\{ \int_V dV \nabla \Phi - \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi \right\} = 0$. Da $\vec{a}$ beliebig folgt Behauptung.)

3) Für Vektorfeld $\vec{F}$, das auf einer Umgebung von V definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \times \vec{F} = \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}$$

(Analog 2) mit $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{F}).$)

4) Integralsatz von Green

Seien u und v zweimal differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von V . Dann gilt

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$$

(Denn: $\nabla \cdot (u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$
 $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$
 $\rightarrow$ Differenz: $u \Delta v - v \Delta u = \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u)$. Rest folgt aus Gaußschem Satz.)

5) Koordinatenunabhängige Interpretation der Divergenz

Sei $\vec{r} \in V$ und $K_R \subset V$ Kugel um $\vec{r}$ mit Radius R .

Dann gilt für Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F} &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{K_R} dV \nabla \cdot \vec{F} \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung mit } \vec{r}^* \in K_R}{=} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}^*) V(K_R) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{V(K_R)} \underbrace{\oint_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F}}_{\text{Aus Volumeneinheit heraustretender Fluss}} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &\text{ ist die Quelldichte von } \vec{F} \text{ im Punkt } \vec{r}. \end{aligned}$$

5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene

Satz: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Rand ∂B , der aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht. Diese seien so parametrisiert, dass ∂B entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Sei $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von B definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\oint_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_B dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

Beweisskizze:

1) Betrachte zunächst *konvexe* Gebiete B .

Dann läßt sich ∂B aus zwei Funktionen $f_u(x_1)$ und $f_o(x_1)$ zusammensetzen, so dass für Punkte $(x_1, x_2) \in B$ gilt: $f_u(x_1) < x_2 < f_o(x_1)$. Für jedes $F_1(x_1, x_2)$ auf B gilt dann (mit $a = \min_{x_1}, b = \max_{x_1}$):

$$\begin{aligned} \int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= \int_a^b dx_1 \left(F_1(x_1, f_o(x_1)) - F_1(x_1, f_u(x_1)) \right) \\ &= - \underbrace{\int_b^a dx_1 F_1(x_1, f_o(x_1))}_{\text{Folge oberer Begrenzung}} - \underbrace{\int_a^b dx_1 F_1(x_1, f_u(x_1))}_{\text{Folge unterer Begrenzung}} \\ &= - \oint_{\partial B} dx_1 F_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \oint_{\partial B} dx_2 F_2(x_1, x_2)$.

Daraus folgt $\int_B dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \oint_{\partial B} (dx_1 F_1 + dx_2 F_2)$.

- 2) Sei B nun ein beliebiges Gebiet mit stückweise glattem Rand. Kann aus konvexen Gebieten zusammengesetzt werden..
- Flächenintegrale (rechte Seite) summieren sich auf.
 - Linienintegrale (linke Seite): Beiträge der Trennungslinien im Inneren von B heben sich auf, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

Folgerung: Flächensatz

Mit $\vec{F} = (-x_2, x_1)$ folgt aus dem Greenschen Satz

$$\underbrace{\int_B dx_1 dx_2}_{\text{Fläche von } B} = \frac{1}{2} \oint_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen a und b

Randkurve ist gegeben durch: $\{(x_1, x_2) : (x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = 1\}$.

$\leadsto$ Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\Rightarrow dx_1 = -a \sin t dt, \quad dx_2 = b \cos t dt$$

$\leadsto$ Ellipsenfläche:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \oint_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) = \pi ab.$$

5.4.3 Der Integralsatz von Stokes

Satz: Sei S eine zweiseitige stückweise reguläre Fläche mit (überschneidungsfreiem) geschlossenem Rand ∂S . Die Fläche sei orientiert und der Rand werde so durchlaufen, dass der Umlaufsinn mit der Flächennormalen auf S eine Rechtsschraube bildet. Sei weiterhin $\vec{F}$ ein auf einer Umgebung von S definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F})}$$

Beweisskizze:

- 1) Betrachte zunächst Flächen S , deren Projektion auf die (x_1, x_2) -Ebene umkehrbar eindeutig ist, d.h. sie lassen sich durch eine Funktion von (x_1, x_2) parametrisieren: $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$.

Die Projektionsfläche von S auf die (x_1, x_2) -Ebene werde mit D bezeichnet und ihr Rand ∂D .

Das vektorielle Flächenelement (vgl. 5.1.4 ist

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right) dx_1 dx_2.$$

Somit folgt für das Flächenintegral (rechte Seite des Stokes-Satzes)

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \int_D dx_1 dx_2 \\ &\quad \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \right) \end{aligned}$$

Das vektorielle Linienelement auf ∂S (vgl. 5.1.3) ist

$$d\vec{r} = (dx_1, dx_2, \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2).$$

Damit folgt für das Linienintegral (linke Seite des Stokes-Satzes)

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\partial S} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) \\ &= \oint_{\partial D} \left(\underbrace{(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_1})}_{=: G_1(x_1, x_2)} dx_1 + \underbrace{(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2})}_{=: G_2(x_1, x_2)} dx_2 \right)\end{aligned}$$

Für das Integral über ∂D gilt Greenscher Satz in der Ebene:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} (G_1(x_1, x_2) dx_1 + G_2(x_1, x_2) dx_2) &= \int_D dx_1 dx_2 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \right). \\ \text{mit } \frac{\partial}{\partial x_1} G_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{F}_2 + \tilde{F}_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}), \text{ wobei } \tilde{F}_i(x_1, x_1) = F_i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \\ &\quad \mid \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{F}_i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (i = 2, 3) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_2} G_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in das Linienintegral gibt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_D dx_1 dx_2 \\ &\quad \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)\end{aligned}$$

Das entspricht genau dem Flächenintegral.

- 2) Allgemeine Flächen S werden wieder stückweise aus Flächen zusammengesetzt, die sich wie in 1) umkehrbar eindeutig auf die (x_1, x_2) -Ebene, die (x_2, x_3) -Ebene oder die (x_1, x_3) -Ebene projizieren lassen.

Folgerung: Koordinatenunabhängige Interpretation der Rotation

Sei $\vec{r} \in S$ und $S_R \subset S$ die Fläche, die von Kugel um $\vec{r}$ mit Radius R aus S ausgeschnitten wird. Sie habe die Oberfläche $A(S_R)$ und Randkurve ∂S_R .

Dann gilt für Vektorfelder $\vec{F}(\vec{r})$

$$\oint_{\partial S_R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_R} d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung mit } \vec{r}^* \in S_R}{=} A_{S_R} (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}^*},$$

wobei $\vec{n}(\vec{r})$ der lokale Normalenvektor ist ($\vec{n} = d\vec{A}/dA$).

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}} = \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A_{S_R}} \oint_{\partial S_R} \vec{F} \cdot \vec{r}}_{\text{Zirkulation des Vektorfeldes (pro Flächeneinheit für Flächenstück senkrecht zu } \vec{n})}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}): \quad \text{Wirbelstärke von } \vec{F} \text{ um die Achse } \vec{n}.$$

Kapitel 6

Die Diracsche Delta-Funktion

6.1 Motivation und Einführung

Theoretische Physik:

Begriffe des "Massenpunktes" und der "Punktladung".

Dagegen: "Massendichte" und "Ladungsdichte"

Frage: Wie kann man diese beiden Konzepte verheiraten?

Heuristische Lösung: Eine Funktion $\delta(x)$ mit den Eigenschaften

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \text{für alle } \epsilon > 0$$

(genauere Definition siehe 6.2)

$\leadsto$ Massenpunkt bei $\vec{r}_0$ entspricht dann einfach der Dichteverteilung

$$\rho(\vec{r}, t) = m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = m \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

Probleme:

- δ -Funktion ist eine ziemlich seltsame Funktion
- Integrierbarkeit? ($\lim_{\text{Untersumme}} \neq \lim_{\text{Obersumme}}$!)

Aber:

- Physiker ignorieren das!
Funktion ist einfach "sehr scharf" gepeakt, d.h. so scharf, wie man es für die konkrete Anwendung braucht. (Peak schmaler als jede andere Längenskala im System).
- Mathematiker haben mittlerweile eine saubere Theorie der δ -Funktion und ähnlicher Konstrukte konstruiert: Die Distributionentheorie.

Historie

- $\sim$ 1920: Einführung der δ -Funktion durch Dirac
(im Kontext der Quantenmechanik)
- $\sim$ 1950: U. Schwartz, Theorie der Distributionen
(erhielt dafür die Fields-Medaille)

Heute wird δ -Funktion in der Physik praktisch überall verwendet. Un-
erlässlich zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte, aber auch
zur Behandlung mathematischer Probleme, z.B. Fouriertransforma-
tion (Kapitel 7), inhomogene Differentialgleichungen (Kapitel 8.2.4)
u.v.a.

6.2 Definition

Zunächst in einer Dimension.

δ -Funktion muss offenbar gemeinsam mit Integral definiert werden.

Formale Definition

δ definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} C_\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\longrightarrow \int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) := f(x_0) \quad \text{für } a < x_0 < b \end{aligned}$$

im Raum C_∞ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Damit ist $\delta(x)$ strenggenommen keine Funktion. Diese Subtilität kann in der
Praxis aber in den allermeisten Fällen ignoriert werden. Als Physiker kann man
sich unter $\delta(x)$ eine "normale" Funktion mit einem Peak vorstellen, der so
schmal und hoch ist, wie man es eben braucht.

6.3 Darstellungen der Delta-Funktion

6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen

Ziel:

- Bessere Veranschaulichung
- Gleichungen für δ -Funktion für praktische Anwendungen
- Umgekehrt: Aussagen über Grenzverhalten bestimmter Funktionen

Allgemeine Form: $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ oder $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$,
wobei $\delta_n(x)$ bzw. $\delta_\epsilon(x)$ differenzierbare (glatte) Funktionen sind, typi-
scherweise mit den Eigenschaften $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$ und $\lim \delta_{n,\epsilon}(x) = 0$
für $x \neq 0$.

Konkrete Darstellungen (Beweis von $\int dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$ weiter unten).

- (i) $\delta_\epsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$
- (ii) $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$
- (iii) $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}, \quad n \rightarrow \infty$
- (iv) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2, \quad n \rightarrow \infty$
- (v) $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{x} \right), \quad n \rightarrow \infty$

Bemerkungen:

- (ii), (iii) mit Vorsicht zu benutzen, da $\delta_{n,\epsilon}(x)$ als Funktion von x im Unendlichen sehr langsam abfällt.
Daher ist z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 = \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \approx \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rightarrow \infty$
obwohl $\int dx \delta(x) x^2 = 0$ sein sollte.
Problem tritt nicht auf, wenn man Integrationsgrenzen endlich wählt.
 $(\int_{-M}^M dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \ll M).$
- In Darstellung (v) verschwindet $\delta_n(x)$ strenggenommen nicht für $x \neq 0, n \rightarrow \infty$. Aber: oszilliert so schnell, dass Beiträge zu Integralen verschwinden. Diese Darstellung ist in der Praxis besonders wichtig.

Beweise von $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$ in den Darstellungen (i)–(v)

- (i) folgt aus $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \sqrt{\pi}$ (3.3.5) nach Substitution $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\epsilon}$.
- (ii) folgt aus $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{1+\tau^2} = \arctan|_{-\infty}^{\infty} = \pi$ nach Substitution $\tau = x/\epsilon$.
- (iii) Analog (ii) mit $\epsilon = 1/n$.
- (v) Zeige zunächst $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \pi$. Rest folgt nach Substitution $\tau = \pi x$.
Benutze dazu Theorie analytischer Funktionen (siehe Anhang A).

Falls $f(z)$ analytisch innerhalb eines Gebietes G in der komplexen Ebene, das von einer Kurve C umschlossen wird, dann gilt:

$$\oint_C dz f(z) = 0 \quad (\text{Cauchyscher Integralsatz})$$

$$\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w) \quad \text{für Punkte } w \in G$$

(Cauchysche Integralgleichung).

Dabei wird Kurve C in $\oint_C$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau - i\epsilon} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} - \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} \right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} = \oint_C dz \frac{e^{iz}}{z - i\epsilon} & \begin{array}{l} \text{mit } C: \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber obere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Oberer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{i(i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \end{array} \\ \quad \quad \quad = 2\pi i e^{i(i\epsilon)} = 2\pi i e^{-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i & \\ \quad \quad \quad \text{Cauchysche} & \\ \quad \quad \quad \text{Integralgleichung} & \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} = - \oint_{C'} dz \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} & \begin{array}{l} \text{mit } C': \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber untere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Unterer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{-i(-i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \end{array} \\ \quad \quad \quad = 0 & \\ \quad \quad \quad \text{Cauchyscher} & \text{da } \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} \text{ analytisch innerhalb von } C' \\ \quad \quad \quad \text{Integralsatz} & \text{(einziger Pol } z_0 = i\epsilon \text{ liegt au\ss erhalb von } C') \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi \quad \checkmark.$$

- (iv) Zeige $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 = \pi$. Rest folgt nach Substitution $\tau = n\pi$.

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \left[\tau \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \frac{d}{d\tau} \left(\left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \right) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau \cos \tau}{\tau} = 2I - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau} \\ \Rightarrow I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau} \stackrel{\tau' = 2\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left(\frac{\sin \tau'}{\tau'} \right) = \pi \quad \text{nach (v)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

6.3.2 Darstellung als Integral

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

(Begründung:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{k=-n}^n = \frac{1}{2\pi ix} (e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$$

entspricht Grenzwert (v) in 6.3.1.

$$\begin{aligned} \text{Alternativ: } \delta_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \epsilon|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx e^{-\epsilon x} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon - ik} + \frac{1}{\epsilon + ik} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

entspricht Grenzwert (ii) in 6.3.1.)

NB: Mit dem uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ ist hier eigentlich ein Hauptwertintegral gemeint.

6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion

Zusammenstellung der wichtigsten Regeln

(i) • $\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & : x_0 \in]a, b[\\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$
für alle stetigen "Testfunktionen" f (laut Definition).

(ii) • $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$
• $x \cdot \delta(x) = 0$ (denn: $\int dx x \delta(x) f(x) = 0 \quad \forall f(x)$)
• $\delta(x - y) f(x) = \delta(x - y) f(y)$ (denn: $\int dx \delta(x - y) f(x) = f(y) = \int dx \delta(x - y) f(y)$)

(iii) • $\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ (Beweis folgt am Ende des Abschnitts)
• $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ (Folgerung mit $\phi(x) = ax$.)

(iv) "Stammfunktion" :

$$\bullet \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \theta(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 1/2 & : x = 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \quad \text{Heaviside-Funktion}$$

Umgekehrt: $d\theta/dx = \delta(x)$.

(v) "Ableitungen" :

$$\bullet \int_a^b dx \delta'(x - x_0) f(x) = \begin{cases} -f'(x_0) & : x_0 \in]a, b[\\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

für alle differenzierbaren Testfunktionen f
(denn: $\delta_a^b f(x) \delta'(x - x_0) = \underbrace{[\delta(x - x_0) f(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b dx f'(x) \delta(x - x_0) = -f'(x_0)$).

$$\bullet \int_a^b dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0) & : x_0 \in]a, b[\\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

für alle n -fach differenzierbaren Testfunktionen f (denn: analog)

(vi) Symmetrien :

- $\delta(-x) = \delta(x)$: $\delta(x)$ ist gerade (Folgerung aus (iii-b) mit $a = -1$.)
- $\delta'(-x) = -\delta'(x)$ (Kettenregel)
- $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$ (Kettenregel)

Nachtrag: Beweis von (iii): $\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} f(x_i) \delta(x - x_i)$

Zerlege $\phi(x)$ in monotone Teilstücke $I_\alpha = [x_{\alpha-1}, x_\alpha]$.

In jedem Teilstück ist ϕ umkehrbar. Umkehrfunktion $g_\alpha(\phi)$ ist definiert im Intervall zwischen $\phi_{\alpha-1} := \phi(x_{\alpha-1})$ und $\phi_\alpha := \phi(x_\alpha)$.

$\Rightarrow$ Für stetige Testfunktionen $f(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_{\alpha} \int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} dx \delta(\phi(x)) f(x) \\ &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \sum_{\alpha} \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} d\phi \frac{1}{|\phi'(x)|_{x=g_{\alpha}(\phi)}} \delta(\phi) f(g_{\alpha}(\phi)). \end{aligned}$$

Nur Teilstücke, auf denen Nullstelle liegt, tragen zum Integral bei.

Jedes Teilstück hat maximal eine Nullstelle x_i .

Beitrag, falls ϕ monoton steigt ($\phi_{\alpha-1} < \phi_{\alpha}, \phi'(x) > 0$)

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} \frac{d\phi}{\phi'(x)} \delta(\phi) f(g_{\alpha}(\phi)) = f(x_i) \frac{1}{\phi'(x_i)} \stackrel{\phi' > 0}{=} f(x_i)/|\phi'(x_i)|$$

Beitrag, falls ϕ monoton fällt ($\phi_{\alpha-1} > \phi_{\alpha}, \phi'(x) < 0$)

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} d\phi \dots \stackrel{\text{Sortiere}}{=} \stackrel{\text{Integrationsgrenzen}}{=} - \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi_{\alpha-1}} d\phi \dots = - \frac{f(x_i)}{\phi'(x_i)} \stackrel{\phi' < 0}{=} f(x_i)/|\phi'(x_i)|.$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} f(x_i)/|\phi'(x_i)| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i) f(x) \quad \text{für alle Testfunktionen } f. \checkmark \end{aligned}$$

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Die Funktion $\Theta(x)$ ist die Heavisidesche Stufenfunktion (Kapitel 1.3.1.7)

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x + \alpha) \sinh(x)$
- $\int_0^{\infty} dx \delta(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - \beta) e^{-2x}$
- $\int_0^{\infty} dx \delta'(x)$
- $\int_a^{\infty} dx \Theta(\alpha - x)$
- $\int_a^{\infty} dx \delta(x) \Theta(x - \alpha) \cos^2(x)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^3 - a^3) e^{i\beta x}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^2 - a^2) \cos(x/\sqrt{x + 2a})$

6.5 Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen

Ortsvektoren $\vec{r} = (x_1, \dots, x_d)$.

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) \equiv \delta^d(\vec{r} - \vec{a}) := \delta(x_1 - a_1) \delta(x_2 - a_2) \cdots \delta(x_d - a_d)$$

mit Integraldarstellung
$$\delta(\vec{r}) \equiv \delta^d(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int d^d k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

NB: Die Notationen $\delta(\vec{r})$ und $\delta^d(\vec{r})$ werden beide verwendet, die erste ist jedoch häufiger. Ob eine Delta-Funktion ein- oder mehrdimensional ist, ergibt sich dann aus der Dimension des Arguments.

Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Integrale im dreidimensionalen Raum.

- $\iiint_{\infty} d^3 r \, \delta(\vec{r} - \vec{R})$
- $\iiint_{\infty} d^3 r \, \delta(|\vec{r}| - R)$

Kapitel 7

Die Fouriertransformation

Motivation:

In Kapitel 3.2: Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen $\Rightarrow$ Taylor-Reihe. $\leadsto$ kann für praktische Rechnungen sehr nützlich sein.

In diesem Kapitel fast noch wichtigere Entwicklung: Zerlegung in Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. $e^{i\omega t} \Rightarrow$ Fourierreihe oder Fourierintegral. Fülle von Anwendungen in Mathematik (Differentialgleichungen) und Technik (Elektrotechnik, Signalverarbeitung, Bildverarbeitung). Konkrete physikalische Bedeutung in vielen Bereichen der Physik (Optik, Akustik, Quantenmechanik, Streuung)

Beispiele:

- Lichtbrechung am Prisma bzw. Regenbogen:
Weißes Licht setzt sich aus einem Spektrum an reinen Farben / Wellenlängen zusammen. Diese werden durch das Prisma sichtbar gemacht $\leadsto$ entspricht einer *Fourierzerlegung*.
- Akustik
Geräusche $\hat{=}$ Dichteschwankungen der Luft $\delta\rho(t)$
 $\rightarrow$ Frequenzspektrum
Teilweise nimmt Ohr/Gehirn selbst Zerlegung in Frequenzen vor.
(Dreiklänge, Stimmengewirr etc.)
Teilweise wird Gemisch von Frequenzen als ein Ton mit bestimmter charakteristischer "Klangfarbe" wahrgenommen.
- Streuexperimente
Meßgrößen sind im Allgemeinen Fouriertransformierte von Korrelationsfunktionen.

7.1 Diskrete Fouriertransformation

Beginne mit dem mathematisch unproblematischsten Fall: Transformation eines endlichen Satzes von Zahlen (Datenpunkten).

Numerische Bedeutung: Datensätze im Computer sind immer endlich.

Für diskrete Fouriertransformationen gibt es ultraschnelle Algorithmen (Fast Fourier Transformation).

7.1.1 Definition

Gegeben Zahlenfolge $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}$.

Diskrete Fouriertransformierte:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i k j / N} a_j \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Inverse Transformation: Ursprüngliche Daten können zerlegt werden in

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} \hat{a}_k$$

Verbindung über Darstellung des Kronecker-Deltas

$$\delta_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i p n / N} e^{-2\pi i p m / N} \quad \text{für } n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

(Check: Erst Gleichung für δ_{nm} :

$$\begin{aligned} n \neq m: & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}})^p \\ &= \underbrace{(e^{2\pi i \frac{n-m}{N} N} - 1)}_{\text{Summe}} / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = (1 - 1) / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = 0 \\ n = m: & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} 1 = N \\ \Rightarrow & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = N \delta_{nm} \quad \checkmark. \end{aligned}$$

Nun inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{k j}{N}} \hat{a}_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} e^{-2\pi i k j' / N} a_{j'} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} a_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k j / N} e^{-2\pi i k j' / N}}_{\delta_{j j'}} = a_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bemerkung: Vorfaktoren $(1/\sqrt{N})$ in den Gleichungen für $\hat{a}_k$ bzw. a_j sind Konventionssache und von Anwendung zu Anwendung verschieden. Hier wurden sie so gewählt, dass die diskrete Fouriertransformation und die inverse Transformation symmetrisch sind. Eine andere häufige Wahl wäre z.B. $\hat{a}_k = \sum_j e^{-2\pi i k j / N} a_j$ und dementsprechend $a_j = \frac{1}{N} \sum_k e^{2\pi i k j / N} \hat{a}_k$.

Interpretation: Datensatz $(a_0, \dots, a_{N-1})$ wird durch "Frequenz-Anteile" $e^{i\omega_k j}$ charakterisiert mit $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$. Amplituden $\hat{a}_k$ zu kleinen Frequenzen enthalten Information über großräumige Datenstruktur (z.B. $k = 0 \leftrightarrow$ Mittelwert).

7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

Vorab: Von nun an Konvention: Periodische Fortsetzung.

Für $k \notin [0, \dots, N-1]$ definiere $\hat{a}_k := \hat{a}_{k \bmod N}$

Für $j \notin [0, \dots, N-1]$ definiere $a_j := a_{j \bmod N}$

(NB: $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{(k+lN)j}{N}} a_j \quad \forall l \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$ Konvention ist konsistent. Dasselbe gilt für a_j).

(i) **Linearität:** $c_j = \alpha a_j + \beta b_j$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \hat{c}_k = \alpha \hat{a}_k + \beta \hat{b}_k$.

(ii) **Translation:** $c_j = a_{j-n} \Leftrightarrow \hat{c}_k = e^{2\pi i kn/N} \hat{a}_k$

$$\begin{aligned} (\text{denn: } \hat{c}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_{j-n} = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(j-n)}{N}} a_{j-n} \\ &= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-n}^{N-1-n} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \\ &\quad | \quad a_j \text{ und } e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} \text{ sind periodisch modulo } N \\ &= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \hat{a}_k \quad \checkmark) \end{aligned}$$

(iii) **Symmetrien:**

$$\begin{aligned} a_j \text{ reell} &\Leftrightarrow \hat{a}_0 \text{ reell, } \hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = \hat{a}_k^* \\ (\text{denn: } \hat{a}_{-k} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \right)^* = \hat{a}_k^*) \\ a_j \text{ rein imaginär} &\Leftrightarrow \hat{a}_0 = 0, \hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = -\hat{a}_k^* \\ &(\text{analog}) \end{aligned}$$

(iv) **Parsevalsche Gleichung:**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} |a_j|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{a}_k|^2} \quad \text{bzw. allgemeiner} \quad \boxed{\sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k}$$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}} a_j^* b_{j'} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} a_j^* b_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}}}_{\delta_{jj'}} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j \quad \checkmark) \end{aligned}$$

(v) **Faltungssatz:** Für $c_l = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j}$ gilt $\hat{c}_k = \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k$

$$\begin{aligned} (\text{Beweis: } \hat{c}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} c_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j} \underbrace{e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}}_{e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j}_{\hat{a}_k} \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} b_{l-j}}_{\sum_{l=-j}^{N-1-j} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sqrt{N} \hat{b}_k} = \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k \quad \checkmark) \end{aligned}$$

7.2 Fourierintegral

Betrachte nun statt diskreter Datenpunkte kontinuierliche Funktion $f(x)$.

Fourierintegral: Kontinuierliche Variante der diskreten Fouriertransformation.

7.2.1 Definition

Gegeben Funktion $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Eigenschaften (Dirichlet-Jordan):

- Absolut integrierbar: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$
- Hat in jedem endlichen Teilintervall nur endlich viele Sprungstellen, endlich viele Maxima und Minima und beschränkte Schwankung.

Dann ist:

Fouriertransformierte:
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

Inverse Transformation:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Verbindung über Darstellung der Delta-Funktion

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ipy} e^{-ip'y}$$

(Check: Gleichung für Delta-Funktion: Siehe Kapitel 6.3.2)

Inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx' f(x') e^{ikx} e^{-ikx'} \\ &= \int dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} e^{-ikx'}}_{\delta(x-x')} = f(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier wieder völliger Wildwuchs in der Literatur bezüglich Vorfaktoren! Deshalb: Immer überprüfen, über welche Gleichung die Fouriertransformation konkret definiert ist.

Verallgemeinerung auf d Dimensionen:

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d k \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

7.2.2 Eigenschaften und Rechenregeln

(Beweise völlig analog dem Fall der diskreten Fouriertransformationen)

(i) **Linearität:** $h(\vec{r}) = \alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \alpha \hat{f}(\vec{k}) + \beta \hat{g}(\vec{k})$

(ii) **Translation:** $h(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}} \hat{f}(\vec{k})$

(iii) **Symmetrien:** $f(\vec{r})$ reellwertig $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}^*(\vec{k})$
 $f(\vec{r})$ rein imaginär $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = -\hat{f}^*(\vec{k})$

(iv) **Parsevalsche Gleichung:** $\int d^d r |f(\vec{r})|^2 = \int d^d k |\hat{f}(\vec{k})|^2$

bzw. verallgemeinert

$$\int d^d r f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) = \int d^d k \hat{f}^*(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$$

(v) **Faltungssatz:** $h(\vec{r}) = \int d^d r' f(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \sqrt{2\pi}^d \hat{f}(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$

Zusätzliche wichtige Eigenschaften

(vi) **Produkt:** $h(\vec{r}) = f(\alpha \vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}(\vec{k}/\alpha)$

(denn: $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d \vec{r} f(\alpha \vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$
 $\stackrel{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d \tau \underbrace{\frac{1}{|\alpha|^d}}_{\text{Jacobi-Determinante}} f(\vec{\tau}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\tau}/\alpha} \quad \checkmark$)

(vii) **Ableitungen:** $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i k_\alpha \hat{f}(\vec{k})$
 $h(\vec{r}) = \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n k_{\alpha_1} \dots k_{\alpha_n} \hat{f}(\vec{k})$

(denn: Für $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r})$ gilt
 $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \partial_\alpha f(\vec{r}) \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d r f(\vec{r}) \partial_\alpha (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}})$
 $= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d r f(\vec{r}) (-i k_\alpha) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i k_\alpha \hat{h}(\vec{k})$
 Höhere Ableitungen analog.)

(viii) **Momente:** $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k})$
 $h(\vec{r}) = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n \frac{\partial^n}{\partial k_{\alpha_1} \dots \partial k_{\alpha_n}} \hat{f}(\vec{k})$

(Herleitung: Analog zu (vii) wegen Symmetrie von Fouriertransformation und inverser Fouriertransformation, oder, für $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r})$

$$\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d r \underbrace{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} r_\alpha}_{i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}} f(\vec{r}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k}) \quad \checkmark$$

Höhere Momente analog.)

7.2.3 Paare von Fourier-Transformierten

in einer Dimension

	$f(x)$	$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x)$	
(i) Delta-Funktion	$\delta(x)$	$1/\sqrt{2\pi}$	laut 6.3.2
(ii) Konstante	C	$C \sqrt{2\pi} \delta(x)$	laut 6.3.2
(iii) Kosinus Sinus	$\cos(\omega x)$ $\sin(\omega x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(k + \omega) + \delta(k - \omega) \right)$ $\sqrt{\frac{\pi}{2}} i \left(\delta(k + \omega) - \delta(k - \omega) \right)$	Euler- formel
(iv) Gaußkurve	$e^{-x^2/2\sigma^2}$	$\sigma e^{-k^2\sigma^2/2}$	siehe unten
(v) Lorentzkurve	$1/(x^2 + a^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ a } e^{- ka }$	siehe unten
(vi) Exponentialfunktion	$e^{-a x } \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2}$	Invers zu (v)
(vii) Rechteckfunktion	$\theta(a - x) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}$	Übungsaufgabe

Bemerkungen:

- Manche der obigen Funktionen erfüllen das Kriterium der absoluten Integrierbarkeit $\int dx |f(x)| < \infty$ *nicht!* (z.B. Konstante, Sinus, Kosinus). In diesem Fall kann man sich einfach einen infinitesimalen "Dämpfungsterm" $e^{-\epsilon|x|}$ im Integral dazudenken mit $\epsilon \rightarrow 0^+$ (vgl. 6.3.2).
- Aus schmalen Peaks werden breite Peaks und umgekehrt.
Zum Beispiel Gaußfunktion: $f(x)$ hat Breite σ , $\hat{f}(k)$ hat Breite $1/\sigma$.

Generell gilt: $\left(\int dx x^2 |f(x)|^2 \right) \left(\int dk k^2 |\hat{f}(k)|^2 \right) \geq \frac{1}{4}$

(ohne Beweis,

Spezialfall der Unschärferelation, Stoff von Theorie III).

Rechnungen zu (iv)-(vi)

Brauche Theorie der analytischen Funktionen (Anhang A)

Falls $f(z)$ analytisch (differenzierbar) innerhalb eines Gebietes G in der komplexen Ebene, das von einer Kurve C umschlossen wird, gilt:

– Cauchyscher Integralsatz: $\oint_C dz f(z) = 0$

– Cauchysche Integralgleichung: $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$ für $w \in G$

Dabei wird Kurve C gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Nun Rechnungen:

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad f(x) &= e^{-x^2/2\sigma^2} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2\sigma^2} \stackrel{\substack{\text{Quadratische} \\ \text{Ergänzung}}}{=} e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+ik\sigma^2)^2} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Substituiere } \tilde{x} = x + ik\sigma^2 \\ \text{Verschiebe Integrationsweg parallel zur reellen Achse} \\ \rightarrow \text{Wert des Integrals gleich, da keine Singularität überstrichen wird.} \end{array} \right. \\
 &= e^{-k^2\sigma^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2/2\sigma^2}}_{\sqrt{2\pi}\sigma} = \sigma e^{-k^2\sigma^2/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad f(x) &= e^{-a|x|} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a|x|} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{k^2+a^2}
 \end{aligned}$$

(v) Folgt im Prinzip aus (vi) wegen Symmetrie der Fouriertransformation und der inversen Fouriertransformation.

Alternative Herleitung: Betrachte $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left(\frac{1}{x-i|a|} - \frac{1}{x+i|a|} \right) \frac{1}{2i|a|} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{SchlieÙe Integrationsweg in komplexer Ebene über Halbkreis} \\ \text{im Unendlichen in oberer oder unterer Halbene} \\ k < 0: \text{Weg } C \text{ oben herum (über } i\infty), \text{ da } e^{-ikx} \sim e^{-ik i\infty} \sim e^{-|k|\infty} = 0. \\ k > 0: \text{Weg } C' \text{ unten herum (über } -i\infty), \text{ da } e^{-ikx} \sim e^{ik i\infty} \sim e^{-k\infty} = 0. \\ \text{Achtung: Damit Integral über } C' \text{ gegen den Uhrzeigersinn} \\ \text{läuft, dreht sich dabei Vorzeichen um!} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow k < 0: \hat{f}(k) &= \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_C dz e^{-ikz} \left(\frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_C dz \frac{e^{-ikz}}{z-i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag} \\
 k > 0: \hat{f}(k) &= -\frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{C'} dz e^{-ikz} \left(\frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_{C'} dz \frac{e^{-ikz}}{z+i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(-i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag}
 \end{aligned}$$

$$\text{Zusammen: } \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-|ka|} \quad \checkmark$$

7.2.4 Anwendungsbeispiele

Neben ihrer physikalischen Bedeutung ist die Fouriertransformation sehr nützlich zum Lösen linearer Differentialgleichungen. (Das begründet natürlich ihre Bedeutung, da die wichtigsten Gleichungen in der Physik lineare Differentialgleichungen sind).

7.2.4.1 Wellengleichung

(Beispiel (k) in Kapitel 4)

Gesucht: Allgemeine Lösung $u(x, t)$ der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Im Fourierraum: $u(x) \rightarrow \hat{u}(k)$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \rightarrow -k^2 \hat{u}$; $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \hat{u}$: gewöhnliche Schwingungsgleichung

In Kapitel 4 gelöst (4.2.3)

Allgemeine Lösung: $\hat{u}(k, t) = a(k)e^{-i\omega t} + b(k)e^{i\omega t}$ mit $\omega = |k|c$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung im Realraum:

$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \{a(k)e^{i(kx-|k|ct)} + b(k)e^{i(kx+|k|ct)}\}$
entspricht linearer Überlagerung von Wellen $e^{i(kx \pm |k|ct)}$.

7.2.4.2 Diffusionsgleichung

(Beispiel (j) in Kapitel 4)

Gesucht: Lösung $\rho(x, t)$ der Gleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ im unbegrenzten Raum mit Anfangsbedingung $\rho(x, t=0) = \delta(x)$

Im Fourierraum: $\rho(x) \rightarrow \hat{\rho}(k)$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho \rightarrow -k^2 \hat{\rho}$; $\frac{\partial}{\partial t} \rho \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}$; $\delta(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -Dk^2 \hat{\rho}$ mit $\hat{\rho}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$: entspricht Zerfallsgleichung

In Kapitel 4 gelöst (4.1.1)

Lösung: $\hat{\rho}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Dk^2 t}$

$\Rightarrow$ Lösung im Realraum:

$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikr} \hat{\rho}(k, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$
entspricht zerfließender Gaußfunktion

7.2.4.3 Greensche Funktion

Häufige Problemstellung, z.B. in der Elektrodynamik (Theorie II):

Lösung der Gleichung $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ in beliebigen Dimensionen d .

Im Fourierraum: $G(\vec{r}) \rightarrow \hat{G}(\vec{k})$, $\Delta G(\vec{r}) \rightarrow -k^2 \hat{G}(\vec{k})$, $\delta(\vec{r}) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}^d$.

$\Rightarrow$ Gleichung: $-k^2 \hat{G}(\vec{k}) = 1/\sqrt{2\pi}^d$

Lösung: $\hat{G}(k) = -1/(\sqrt{2\pi}^d k^2)$

Rücktransformation in den Realraum $\vec{r}$ $d > 2$ Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^{d-1} k_{\perp} \int dk_{\parallel} e^{ik_{\parallel} r} \underbrace{\frac{1}{k_{\parallel}^2 + \vec{k}_{\perp}^2}}_{\frac{\pi}{k_{\perp}} e^{-|\vec{k}_{\perp}| |r|}} \\
&\quad \left| \begin{array}{l} \text{mit } k_{\parallel}: \text{ parallel zu } \vec{r}, \\ \vec{k}_{\perp}: \text{ senkrechte Richtungen} \end{array} \right. \\
&= -\frac{\pi}{(2\pi)^d} \Omega_{d-1} \underbrace{\int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^{d-3} e^{-k_{\perp} |r|}}_{r^{2-d} (d-3)!} =: r^{2-d} \frac{1}{2-d} C_d \\
&\quad \text{mit } \Omega_d: \text{ Oberfläche der } d\text{-dimensionalen Einheitskugel} \\
&\quad \Omega_d = \frac{d\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(1+d/2)}; \quad C_d = \pi^{1-d} 2^{-d} \Omega_{d-1} (d-2)! = \dots = 1/\Omega_d
\end{aligned}$$

 $d = 2$ Problem mit obiger Lösung: $\int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp}^{d-3} e^{-k_{\perp} |r|}$ divergiert!Ausweg: Regularisierung - Schneide $\hat{G}(\vec{k})$ ab.

$$\begin{aligned}
&\text{Ersetze } \hat{G}(\vec{k}) \text{ durch } \hat{G}_{\epsilon}(\vec{k}) = -1/(\sqrt{2\pi}^d (\vec{k}^2 + \epsilon^2)) \text{ mit } \epsilon \rightarrow 0^+. \\
\Rightarrow G_{\epsilon}(\vec{r}) &= -\frac{\pi}{(2\pi)^2} \Omega_1 \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + \epsilon^2} e^{-\sqrt{k_{\perp}^2 + \epsilon^2} r} \\
&\quad \stackrel{\Omega_1=1, u:=k_{\perp}^2}{=} -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{u+\epsilon^2} e^{-\sqrt{u+\epsilon^2} r} \\
&\quad \stackrel{\tau:=r\sqrt{u+\epsilon^2}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon r}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau} = \frac{1}{2\pi} \text{Ei}(-\epsilon r) \\
&\quad \left| \begin{array}{l} \text{mit Ei}(x): \text{ Integralexponentialfunktion} \\ \text{Grenzverhalten für } x \rightarrow 0 \text{ (siehe Integraltafeln):} \\ \text{Ei}(x) = C + \ln|x| + \mathcal{O}(x) \text{ mit } C = 0.5772... \text{ (Euler Konstante)} \end{array} \right. \\
&\quad \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{const.} + \frac{1}{2\pi} \ln(r) + \mathcal{O}(\epsilon)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $\Delta G = \delta(x)$ definiert G bis auf eine Konstante (und eine konstante Steigung), deshalb darf man die Konstante const. abziehen.

$$\Rightarrow G(\vec{r}) = C_2 \ln(r) \text{ mit } C_2 := \frac{1}{2\pi} = 1/\Omega_2$$

 $d = 1$ Regularisierung ebenfalls notwendig

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{\epsilon}(k) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} / (k^2 + \epsilon^2) \xrightarrow{7.2.3(v)} G_{\epsilon}(x) = -\frac{1}{2\epsilon} e^{-|x|\epsilon} \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\epsilon} + |x|/2 + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Ziehe Konstante wieder ab $\Rightarrow G(x) = C_1 |x|$ mit $C_1 = 1/2 = 1/\Omega_1$ Überprüfung der Lösung mittels Gaußschem SatzGenerell gilt alle d für die Lösung: $\nabla G = \frac{1}{\Omega_d} r^{1-d} \frac{\vec{r}}{r}$ (Übungsaufgabe)Daraus folgt für $\vec{r} \neq 0$: $\Delta G = \nabla(\nabla G) = 0$ ✓ (Übungsaufgabe)Zu $\vec{r} = 0$: Integriere über Kugel um Ursprung mit beliebigem Radius.

$$\rightarrow \int_V d^d r \Delta G \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \nabla G = \frac{1}{\Omega_d} \Omega_d = 1 = \int_V d^d r \delta(\vec{r}) \quad \checkmark$$

7.3 Fourierreihe

Zum Abschluss und zur Vervollständigung:

Fouriertransformation von Funktionen auf *endlichen Intervallen* oder von *periodischen Funktionen* → **Fourierreihen**

7.3.1 Definition

Gegeben periodische Funktion $f(t+nT) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ mit Eigenschaften (Dirichlet-Bedingungen): Auf Intervall $[0:T]$ hat $f(t)$ nur endlich viele Sprungstellen und endlich viele Minima/Maxima. An jeder Unstetigkeitsstelle existiert linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert.

Dann läßt sich $f(t)$ schreiben als:

Fourierreihe:
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

mit **Fourierkoeffizienten:**
$$c_n = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) e^{-2\pi i n t / T}$$

($C \in \mathbb{R}$ beliebig).

Verbindung über

$$\delta_{nm} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt e^{-2\pi i n t / T} e^{2\pi i m t / T} \quad (*)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t / T} e^{-2\pi i n t' / T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t' + Tm) \quad (**)$$

(Check:

(*): Klar (einfach Integral ausrechnen!)

(**): Betrachte $S_M = \sum_{n=-M}^M (e^{2\pi i n t / T})^n = x^{-M} \sum_{n=0}^{2M} x^n$ mit $x := e^{2\pi i t / T}$

$$= \underset{\text{geometrische Summe}}{x^{-M} \frac{x^{2M+1}-1}{x-1}} = \underset{x \text{ einsetzen}}{\frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)}}$$

im Grenzwert $M \rightarrow \infty$:

Interessant sind t -Werte mit $\sin(\pi t/T) \rightarrow 0 \Rightarrow t^* = mT$

Entwickle $t = mT + x, x \ll 1$

$$\Rightarrow \sin(\pi t/T) \approx \pi \frac{x}{T} \cos(\pi m) = (-1)^m \pi \frac{x}{T}$$

$$\sin(\pi(2M+1)\frac{t}{T}) = \sin(\pi m + \pi(2M+1)\frac{x}{T}) = (-1)^m \sin(\pi(2M+1)\frac{x}{T})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)} \approx \frac{\sin(\pi(2M+1)x/T)}{\pi x/T} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pi \delta(\pi \frac{x}{T}) = T \delta(x)$$

$$\Rightarrow S_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} T \sum_m \delta(t - mT) \quad \checkmark$$

Rest ergibt sich durch Einsetzen und Benutzen von (*) und (**).

Bemerkung: Fourierreihenentwicklung kann ohne weiteres auf nichtperiodische Funktionen angewendet werden, die nur in einem Intervall $[0:T]$ definiert sind. Diese werden dann einfach periodisch fortgesetzt.

7.3.2 Darstellung in trigonometrischen Funktionen

Im Prinzip dieselbe Entwicklung, aufgespalten in Sinus- und Kosinus-Funktionen.

Definition: Gegeben eine *reelle* Funktion $f(t)$, die periodisch mit der Periode T ist und die Dirichlet-Bedingungen erfüllt. Sie kann dann geschrieben werden als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + b_n \sin(2\pi n \frac{t}{T}) \right\}$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) = c_n + c_{-n} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) = i (c_n - c_{-n}) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) = 2c_0. \end{aligned}$$

Speziell $f(t)$ gerade $(f(t) = f(-t))$: Reine Kosinusreihe $(b_n = 0 \forall n)$
 $f(t)$ ungerade $(f(t) = -f(-t))$: Reine Sinusreihe $(a_n = 0 \forall n)$

Wichtigste weitere Eigenschaft: **Parseval-Gleichung**

$$\frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt |f(t)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Kapitel 8

Partielle Differentialgleichungen

8.1 Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik

Partielle Differentialgleichungen: Differentialgleichungen für Funktionen $u(\vec{x})$ mit Ableitungen nach mehreren Variablen x_i .

In der Physik sind sie

- In der Regel *linear*: $L u(\vec{x}) = f(\vec{x})$
mit L : Linearer Differentialoperator
$$L = \left\{ \sum_i A_i^{(1)}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{ij} A_{ij}^{(2)}(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right\}$$

 $\Rightarrow$ Es gilt das Superpositionsprinzip:
Falls $u_j(\vec{x})$ Lösung von $LU_j = f_j$, dann ist $u(\vec{x}) = \sum_j \alpha_j u_j(\vec{x})$ Lösung von $Lu = \sum_j \alpha_j f_j(\vec{x})$.
- In der Regel *zweiter Ordnung*:
Die höchste Ableitung ist zweiter Ordnung.
Ausnahme z.B. Dirac-Gleichung: Nur erster Ordnung.
Höhere Ordnungen treten praktisch nicht auf.

Die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden in drei Kategorien eingeteilt: Elliptisch, Hyperbolisch, Parabolisch.

Betrachte dafür nur die Terme mit zweiten Ableitungen:

$$L = \sum_{ij} A_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \text{ mit } A_{ij}^{(2)} = A_{ji}^{(2)} \text{ symmetrisch}$$

(kann symmetrisiert werden, da Ableitungen vertauschen.)

Diagonalisiere Matrix $(A_{ij}^{(2)}) \rightarrow$ Eigenwerte λ_α

Klassifizierung auf Basis der Eigenwerte:

- Alle gleiches Vorzeichen: Elliptischer Typ
- Verschiedene Vorzeichen: Hyperbolischer Typ
- Einige Eigenwerte sind Null: Parabolischer Typ

Nun: Kurze Charakterisierung dieser drei Typen mit Beispielen.

Danach: Wichtige Lösungsverfahren anhand von Beispielen.

8.1.1 Elliptischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

Laplace-Gleichung für Funktion $u(\vec{r})$: $\Delta u = 0$

bzw **Poisson-Gleichung**: $\Delta u = -4\pi f(\vec{r})$

(inhomogene Laplace-Gleichung).

Anwendungen in der Physik: Statische Zustände, z.B.

- Elektrostatik und Magnetostatik: Gleichungen für Potentiale
- Wärmelehre: Temperaturverteilung im Gleichgewicht
- Strömungslehre: Ideale Flüssigkeiten ohne Wirbel (Potentialströmung)

Lösung hängt von Randbedingungen am Rand ∂G des Definitionsgebietes ab (Randwertproblem).

Wichtigste Typen von Randbedingungen:

- Dirichletsche Randbedingungen: u auf ∂G vorgegeben.
- von-Neumannsche Randbedingung: Normalenableitung von u auf ∂G vorgegeben, also $\frac{\partial u}{\partial n} := \vec{n} \cdot \nabla u$ mit $\vec{n}$: Einheitsvektor senkrecht zu ∂G .
- Cauchysche Randbedingung: $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$ vorgegeben.

Für elliptische partielle Differentialgleichungen kann man zeigen:

Bei vorgegebenen Dirichletschen oder von-Neumannschen Randbedingungen ist die Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung eindeutig (evtl. bis auf Konstante).

↪ Man kann an einem Randpunkt nicht beides gleichzeitig vorgeben, man darf allenfalls mischen (teils Dirichlet, teils von-Neumann)

8.1.2 Hyperbolischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

Wellengleichung für Funktionen $u(\vec{r}, t)$: $(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 0$

bzw. inhomogene Wellengleichung $(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 4\pi f(\vec{r})$

Anwendungen in der Physik: Schwingungszustände

(Schall, elektromagnetische Wellen, Wasserwellen, ...)

Lösung hängt wieder von Randbedingungen ab. Diese schließen in der vierdimensionalen Raumzeit auch Anfangsbedingungen ein, aber i.A. nicht "Endbedingungen" (keine Vorgaben an die Zukunft!)

→ Randwertproblem nur für einen offenen Teil des Randes. Dafür müssen aber sowohl u als auch Ableitungen von u angegeben werden.

→ Cauchy-Problem:

– $u(\vec{r}, t=0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ im (3 dimensionalen) Definitionsbereich G vorgegeben (Anfangsbedingungen)

– $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$ auf dem Rand ∂G des Definitionsbereiches vorgegeben. (Cauchy-Randbedingung)

$\alpha = 1$ und $\beta = 0 \rightarrow$ Dirichlet

$\alpha = 0$ und $\beta = 1 \rightarrow$ von-Neumann

NB: Rand kann auch im Unendlichen liegen.

8.1.3 Parabolischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

Diffusionsgleichung für Funktion $u(\vec{r}, t)$: $\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(\vec{r}, t) = 0$

Anwendungen in der Physik: – Diffusionsgleichung – Wärmeleitungsgleichung

– Schrödingergleichung

(freie Teilchen: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) \rightarrow$ Diffusionsgleichung mit $D = i\hbar/2m$.)

Teilchen im Potential: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})) \psi(\vec{r}, t)$

$\rightarrow$ Zusatzterm, aber nach wie vor parabolische Gleichung.)

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ stellt sich ein statischer Zustand ein (siehe 8.2.3), in dem u einfach die Laplace-Gleichung erfüllt (anders als bei 8.1.2).

Anfangsbedingungen bei $t = 0$ sollten vorgegeben sein.

→ Wieder Cauchy-Problem:

– $u(\vec{r}, t=0)$ vorgegeben (reicht hier!)

– $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$ auf dem Rand ∂G des Definitionsbereiches vorgegeben. (Cauchy-Randbedingung)

8.2 Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen

Im Folgenden: Wichtige Lösungsverfahren für lineare partielle Differentialgleichungen anhand von Beispielen.

Methoden, die gleich praktisch erläutert werden:

– Separation der Variablen

– Fouriertransformation

– Greensfunktion

(– Ansatzweise numerische Verfahren)

8.2.1 Laplace-Gleichung

Löse konkret folgende Aufgabe:

Wärmeverteilung in einer rechteckigen Platte (quasi 2D), deren Ränder auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden.

⇒ Gesucht ist Funktion $u(x, y)$ mit $\Delta u = 0$ in einem rechteckigen Gebiet $(x, y) \in [0 : L] \times [0 : L]$ und Dirichlet-Randbedingungen:

$$u(x = 0, y) \equiv T_1; \quad u(x = L, y) \equiv T_2; \quad u(x, y = 0) \equiv T_3; \quad u(x, y = L) \equiv T_4.$$

8.2.1.1 Numerische Lösung

Einfachstes Verfahren: Relaxationsverfahren

Schritte:

- 1) Diskretisierung: Zerlege Gebiet G in $N \times N$ Pixel, Länge $\epsilon = L/N$
 ⇒ Funktion $u(x, y)$ ersetzt durch Matrix u_{ij} .
 Diskretisierung des Laplace-Operators (einfachste, nicht beste Art):
 In 1D wäre $u(x) \rightarrow u_i, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\epsilon^2} (u(x + \epsilon) + u(x - \epsilon) - 2u(x)) \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2} (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)$.
 In 2D: $\Delta u \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij})$.
- 2) Diskretisierte Laplace-Gleichung $u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- 3) Lösung mit Relaxationsverfahren
 - Starte mit beliebiger Matrix $u_{ij}^{(0)}$ (nur Rand muss stimmen!)
 - Iteration: $u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)})$
 (alles außer Rand!)
 - So lange, bis $u_{ij}^{(n+1)} = u_{ij}^{(n)}$ im Rahmen der gewünschten Genauigkeit.

8.2.1.2 Lösung mit Separation der Variablen

Einfache Geometrie des Problems ermöglicht analytische Lösung.

Beginne mit einfacherem Problem: $T_1 = T_2 = T_3 = 0, T_4 \neq 0$.

- 1) Separationsansatz: Setze an $u(x, y) = f(x) g(y)$;
 Randbedingungen: $u(x, 0) = u(0, y) = u(L, y) \equiv 0$
 ⇒ $f(0) = f(L) = 0, g(0) = 0$.
 Randbedingung $u(x, L) =: u_0(x) \equiv T_4$ vorerst nicht berücksichtigt.
 Einsetzen in $\Delta u = 0 \Rightarrow g(y) \frac{d^2}{dx^2} f(x) + f(x) \frac{d^2}{dy^2} g(y) = 0$
 Teile durch $u(x, y) = f(x) g(y) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f(x) / f(x) + \frac{d^2}{dy^2} g(y) / g(y) = 0$.
- 2) Separation der Variablen
 Argumentiere: $F(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) / f(x)$ hängt nur von x ab.
 $G(y) = \frac{d^2}{dy^2} g(y) / g(y)$ hängt nur von y ab.

Aus $F(x) + G(y) \equiv 0$ folgt $F(x) = \text{const.}$, $G(y) = \text{const.}$

Konkret sogar $F = -G =: -k^2$

$\Rightarrow$ Reduktion auf zwei unabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k^2 f(x), \quad \frac{d^2}{dy^2} g(y) = k^2 g(y) \quad \text{mit } k: \text{ Separationskonstante}$$

NB: Separierte Gleichungen haben die Form von Eigenwertgleichungen

$L f = \lambda f$. Lösungen: f Eigenfunktionen zum Eigenwert λ .

(Analog Eigenwert/Eigenvektor bei Matrizen).

3) Lösung der separierten Gleichungen

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f \quad \text{mit Randbedingung } f(0) = f(L) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \propto \sin(kx) \quad \text{und Einschränkung } kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{d^2 g}{dy^2} = k^2 g \quad \text{mit Randbedingung } g(0) = 0$$

$$\Rightarrow g(y) \propto \sinh(ky).$$

$$\Rightarrow \text{Zusammen: } u_n(x, y) \propto \sin(kx) \sinh(ky) \quad \text{mit } k = \pi n/L$$

$\leadsto$ Satz unabhängiger Lösungen von $\Delta u = 0$

mit Randbedingung $u(x, 0) = u(0, y) = u(L, y) = 0$.

$\leadsto$ Kann zur vollständigen Lösung so zusammengesetzt werden, dass auch letzte Randbedingung $u(x, L) = u_0(x)$ erfüllt ist.

4) Vollständige Lösung für $T_1 = T_2 = T_3 = 0, T_4 = T_0$

$$u(x, y) = \sum_n c_n u_n(x, y) = \sum_n c_n \sin(\pi n x/L) \sinh(\pi n y/L),$$

wobei Koeffizienten c_n so gewählt, daß $u(x, L) = u_0(x)$

$$\rightarrow u_0(x) := \sum_n c_n \sin(\pi n x/L) \sinh(\pi n)$$

$\rightarrow$ Fast die Form einer Fourier-Sinus-Reihe (7.3.2)

Ergänze $u_0(x) = -u_0(-x)$ für $-L < x < 0 \leadsto u_0$ ungerade auf $[-L : L]$.

$$\Rightarrow u_0 = \sum_n b_n \sin(2\pi n \frac{x}{2L}) \quad \text{mit } b_n = c_n \sinh(\pi n).$$

$$(7.3.2) \quad b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin(2\pi n \frac{x}{2L}) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L}) dx.$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{\sinh(\pi n)} \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L}) dx.$$

$$\text{Konkret } u_0(x) \equiv T_4 \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} \frac{1}{\sinh(\pi n)} T_0 & : n \text{ ungerade} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\text{Ergebnis:}} \quad u(x, y) = \sum_{n \text{ ungerade}} T_4 \frac{4}{\pi n} \frac{\sinh(\pi n y/L)}{\sinh(\pi n)} \sin(\pi n x/L) =: T_4 \tilde{u}(x, y)$$

5) Allgemeine Lösung für beliebige T_i auf den vier Rändern

Aus $\tilde{u}(x, y)$ kann man durch Drehung/Translation vier Lösungen konstruieren, bei denen jeweils an einem anderen Rand die Temperatur $T_i \neq 0$ ist und $T_j = 0$ für $j \neq i$.

$$T_1 \neq 0 \Rightarrow u_1(x, y) = T_1 \tilde{u}(y, L - x);$$

$$T_3 \neq 0 \Rightarrow u_3(x, y) = T_3 \tilde{u}(x, L - y);$$

$$T_2 \neq 0 \Rightarrow u_2(x, y) = T_2 \tilde{u}(y, x);$$

$$T_4 \neq 0 \Rightarrow u_4(x, y) = T_4 \tilde{u}(x, y)$$

Diese kann man wieder superponieren und erhält schließlich die allgemeine Lösung für beliebige Temperaturen auf allen Seiten.

NB: Man kann so auch Lösung für allgemeine, beliebige Dirichletsche Randbedingungen bestimmen. Dabei ändert sich nur der Wert der Integrale für c_n in 4).

Zusammenfassung zum Separationsansatz:

- Kann man probieren, wenn die Geometrie einfach ist.
- Zerlegung der partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen (oder partielle Differentialgleichungen mit weniger Variablen). Resultierende Differentialgleichungen sind im Allgemeinen Eigenwertgleichungen.
- Liefert Schar von möglichen Lösungen für verschiedene Eigenwerte. Kann dann zur Gesamtlösung zusammengesetzt werden (Unter Berücksichtigung der Randbedingungen).

8.2.2 Wellengleichung

Betrachte hier drei Probleme:

- Freie Welle im unbegrenzten Raum: $u(\vec{r}, t)$ erfüllt $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Anfangsbedingung: $u(\vec{r}, t=0)$ und $\partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0}$ vorgegeben.
- Schwingende Saite: Ausdehnung $u(x, t)$ erfüllt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
mit Randbedingung $u(0, t) = u(L, t) = 0$ (fest eingespannt)
und Anfangsbedingung $u(x, t=0), \partial_t u(x, t)|_{t=0}$ vorgegeben.
- Kreisförmig eingespannte Membran:
Zweidimensionale Auslenkung $u(\vec{r}, t)$ erfüllt $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
mit Randbedingung $u(\vec{r}, t) = 0$ für $|\vec{r}| = R$ (fest eingespannt)
und Anfangsbedingung: $u(\vec{r}, t=0), \partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0}$ vorgegeben.

8.2.2.1 Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation

Im unbegrenzten Raum führt Fouriertransformation am direktesten zum Ziel.

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{u}(\vec{k}, t) \quad \text{mit} \quad \hat{u}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} u(\vec{r}, t).$$

- Wellengleichung im Fourierraum
 $u \rightarrow \hat{u}; \Delta u \rightarrow -k^2 \hat{u}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}$
 $\rightarrow \boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -k^2 \hat{u}} : \text{Gewöhnliche Schwingungsgleichung.}$
- Anfangsbedingungen im Fourierraum: Kann man direkt ausrechnen
 $\hat{u}(\vec{k}, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} u(\vec{r}, t=0) =: \hat{u}_0(\vec{k})$
 $\partial_t \hat{u}(\vec{k}, t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0} =: \hat{u}_1(\vec{k})$

- Lösung im Fourierraum:

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = a(\vec{k}) e^{-i\omega t} + b(\vec{k}) e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \boxed{\omega = |\vec{k}|v}$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}(\vec{k}) &= \hat{u}_0 \\ \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}(\vec{k}) &= \frac{i}{\omega} \hat{u}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{a}(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left(\hat{u}_0 + \frac{i}{\omega} \hat{u}_1 \right) \\ \hat{b}(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left(\hat{u}_0 - \frac{i}{\omega} \hat{u}_1 \right) \end{aligned}.$$

- Lösung im reellen Raum:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k \{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + b(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k \{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + b(-\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \} \quad \text{mit } \omega = |\vec{k}|v. \end{aligned}$$

8.2.2.2 Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz

- Schwingende Saite: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Separationsansatz: $u(x, t) = f(x) T(t)$

$$\text{Einsetzen: } T \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} f \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2}{dx^2} f}_{=-k^2} - \underbrace{\frac{1}{v^2} \frac{d^2 T}{dt^2} T}_{=-k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Separierte Gleichungen: } \frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 v^2 T$$

mit Randbedingung $f(0) = f(L) = 0$.

$$\Rightarrow f(x) \propto \sin(kx) \text{ mit Einschränkung } k = n\pi/L$$

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \text{ mit } \omega = kv.$$

$\Rightarrow$ Vollständige Lösung:

$$u(x, t) = \sum_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) \left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right) \text{ mit } \omega_n = n\pi \frac{v}{L}.$$

Koeffizienten A_n, B_n bestimmt durch Anfangsbedingungen.

- Schwingende kreisförmig befestigte Membran:

Auslenkung $u(x, y, t)$ erfüllt $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ mit $u(\vec{r}, t)|_{r=R} = 0$.

Separationsansatz in zwei Schritten:

- Raum und Zeit: $u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) T(t)$

$$\text{Einsetzen: } \underbrace{\frac{1}{U} \Delta U}_{-k^2} - \underbrace{\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}}_{-k^2} = 0 \Rightarrow \Delta U = -k^2 U, \quad T'' = -k^2 v^2 T$$

- Raum: Wegen der Geometrie bieten sich Polarkoordinaten an.

$$U(\vec{r}) = R(r) \Phi(\varphi) \text{ einsetzen in } \Delta U = \left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) U \stackrel{!}{=} -k^2 U$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0$$

const. da sonst nichts
von ϕ abhängt: $-n^2$

$$\Rightarrow \Phi''(\varphi) = -n^2 \Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi \sim \sin(n\varphi) \text{ oder } \cos(n\varphi) \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0$$

$$r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - n^2) R = 0: \text{ Besselsche Differentialgleichung}$$

Wird in Kapitel 9.3 besprochen. Lösung sind Besselfunktionen.

Beispiel für Anwendung des Separationsansatzes in einem etwas komplizierteren Problem.

8.2.3 Diffusionsgleichung

Diskutiere hier allgemeines Problem: $(\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 0$ auf Gebiet G mit Dirichletschen Randbedingungen am Rand ∂G und beliebigen Anfangsbedingungen $u(\vec{r}, t_0) = u_0(\vec{r})$.

8.2.3.1 Separationsansatz und asymptotisches Verhalten

Separationsansatz: $u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) T(t) + U^{(0)}(\vec{r})$ mit $U^{(0)}$: Löst $\Delta U^{(0)} = 0$ mit den gewünschten Randbedingungen (Laplace-Gleichung, 8.2.1).

$$\text{Einsetzen} \rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{D} \frac{d}{dt} T\right) / T}_{=:-\lambda} - \underbrace{\Delta U / U}_{-\lambda} = 0$$

mit Randbedingungen: $U = 0$ auf ∂G .

$$\Rightarrow \text{Separierte Gleichungen } \Delta U_\lambda = -\lambda U_\lambda, T'_\lambda(t) = -\lambda D T_\lambda(t)$$

$$\Rightarrow T_\lambda(t) = e^{-\lambda D t}$$

U_λ : Eigenfunktion von Δ zum Eigenwert λ

mit den vorgegebenen Randbedingungen $U = 0$ auf ∂G .

Bemerkung: Eigenwert λ muss positiv sein.

$$\text{Argument: } -\int_G d^3r U_\lambda \Delta U_\lambda = -\underbrace{\int_G d^3r \nabla \cdot (U_\lambda \nabla U_\lambda)}_{\text{Gauss: } \int_{\partial G} dA (\vec{n} \cdot \nabla U_\lambda) U_\lambda = 0} + \underbrace{\int_G d^3r (\nabla U_\lambda)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\text{Vgl. mit } -\int_G d^3r U_\lambda \Delta U_\lambda = \lambda \underbrace{\int_G d^3r U_\lambda^2}_{\geq 0}.$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Für $\lambda = 0$ ist die Eigenwertgleichung einfach die Laplace-Gleichung $\Delta U_0 = 0$. Mit den vorgegebenen Randbedingungen ist die Lösung eindeutig (vgl. 8.1.1) und somit "trivial", $U_0 \equiv 0$. Eigenwerte mit nichttrivialen Eigenfunktionen müssen somit echt positiv sein.

Allgemeine Lösung:

$$u(\vec{r}, t) = U^{(0)}(\vec{r}) + \sum_\lambda U_\lambda(\vec{r}) e^{-\lambda D t} C_\lambda \text{ mit } C_\lambda \Leftrightarrow \text{Anfangsbedingungen.}$$

Asymptotisches Verhalten bei $t \rightarrow \infty$

Beitrag $U^{(0)}(\vec{r})$ dominiert, Rest verschwindet exponentiell.

$$\Rightarrow u(\vec{r}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U_{(0)}(\vec{r}) \text{ mit } \Delta U_{(0)}(\vec{r}) = 0.$$

$\Rightarrow$ Unabhängig von Anfangsbedingung erfüllt asymptotische Lösung die Laplace-Gleichung!

NB: Nächstwichtiger Beitrag (falls $U^{(0)} \equiv 0$) : Kleinster Eigenwert λ_0

$$\Rightarrow u(\vec{r}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U_{(0)}(\vec{r}) + C_{\lambda_0} U_{\lambda_0}(\vec{r}) e^{-\lambda_0 D t}.$$

8.2.3.2 Propagatordarstellung

Illustriert am Beispiel des unbegrenzten Raumes

- Löse zunächst

$$\left[\left(\frac{1}{D} \partial_t - \Delta \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = 0 \right] \quad \text{mit} \quad \left[G(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right]$$

Unbegrenzter Raum: $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$

Fouriertransformation: $G(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{G}(\vec{k}, t); \quad \Delta \tilde{G} \rightarrow -k^2 \tilde{G}$

$\tilde{G}(\vec{k}, t)$ erfüllt $(\frac{1}{D} \partial_t + k^2) \tilde{G}(\vec{k}, t) = 0$ mit $\tilde{G}(\vec{k}, 0) = 1/\sqrt{2\pi}^3$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{-k^2 D t}$$

Rücktransformation in den realen Raum:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3 k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \, e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-k^2 D t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi D t}} e^{-r^2/4Dt} \end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung für $u(\vec{r}, t)$

$$\begin{array}{lcl} u(\vec{r}, t_0) & = & \int d^3 r_0 \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) u(\vec{r}_0, t_0) \\ \downarrow \text{Zeitentwicklung } t_0 \rightarrow t & & \downarrow \\ u(\vec{r}, t) & = & \int d^3 r_0 \, G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) u(\vec{r}_0, t_0) \end{array}$$

Konkret im unbegrenzten Raum:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \int d^3 r_0 \, G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) u(\vec{r}_0, t_0) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}} \int d^3 r_0 \, \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4D(t-t_0)}\right) u(\vec{r}_0, t_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Mit G kann Lösung für beliebige Anfangsbedingungen konstruiert werden.

$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)$ nennt man **Propagator** oder **Greens-funktion**

8.2.4 Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion

Prominente Beispiele

- Poisson-Gleichung: $\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$
- Inhomogene Wellengleichung: $(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$

Allgemeines Lösungskonzept: Greensfunktion

Ausführlich diskutiert in "Theorie 1", hier nur kurz rekapituliert.

Verfahren analog dem Propagatorformalismus (8.2.3.2)

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \text{Gegeben inhomogene lineare Differentialgleichung } L\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi f(\mathbf{x}) \\ \text{mit Randbedingung } \alpha\Phi + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g(\mathbf{x}) \\ \text{(z.B. Poisson-Gleichung: } \mathbf{x} = \vec{r}, L = -\Delta \\ \text{Wellengleichung: } \mathbf{x} = (\vec{r}, t), L = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) \\ \text{Löse zunächst } LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ \text{mit Randbedingung } \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \equiv 0 \\ \text{und: } L\Phi^{(0)}(\mathbf{x}) = 0 \text{ mit den gewünschten Randbedingungen} \\ \Rightarrow \text{Allgemeine Lösung: } \Phi(\mathbf{x}) = \int d^d x_0 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) + \Phi^{(0)}(\mathbf{x}) \\ \text{(Beweis: Einsetzen)} \end{array} \right. \end{array}$$

Konkret für obige Beispiele: Greensfunktionen im unbegrenzten Raum

- Poissongleichung: $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0)$ mit $\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r})$
 $\rightarrow G(\vec{r}) = 1/r$ (hergeleitet in Kapitel 5.4.1.1)

- Wellengleichung: $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$

$$\text{mit } \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) G(\vec{r}, t) = 4\pi\delta(\vec{r})\delta(t)$$

$$\rightarrow G(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \delta(t \mp r/v)$$

(Herleitung und Check: Siehe Übungsaufgaben)

$$\text{Interpretation: } \Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int dt' \delta(t - t' \mp \frac{r}{v})$$

$$\rightarrow G_{\text{ret}} = \frac{1}{r} \delta(t - r/v): \text{retardierte Greensfunktion:}$$

Φ wird dargestellt als Funktion der Vergangenheit

$$G_{\text{av}} = \frac{1}{r} \delta(t + r/v): \text{avancierte Greensfunktion:}$$

Φ wird dargestellt als Funktion der Zukunft

Kapitel 9

Orthogonale Funktionen

9.1 Allgemeiner Rahmen

9.1.1 Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme

Voriges Kapitel: Separationsansatz, lieferte typischerweise Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} \text{z.B. (i)} \quad D f(x) + k^2 f(x) &= 0 \quad \text{mit} \quad D = \frac{d^2}{dx^2} & (8.2.1.2) \\ \text{(ii)} \quad D f(r) + k^2 r^2 f(r) &= 0 \quad \text{mit} \quad D = r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + n^2 & (8.2.2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit Randbedingungen} \quad \text{(i)} \quad f(0) = f(L) = 0 \\ \text{(ii)} \quad f(R) = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Randbedingungen sind die Gleichungen i.A. nur für bestimmte k -Werte lösbar $\rightarrow$ Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen.

Implizit oder explizit wurde angenommen/benutzt: Aus Eigenfunktionen lassen sich beliebige andere Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, zusammensetzen. (z.B. (i): Randbedingung für $y = L$, (ii): Anfangsbedingung).

$\rightarrow$ Jede Funktion, die die Randbedingungen erfüllt, soll sich nach Eigenfunktionen entwickeln lassen.

$$\text{z.B. (i): Gleichung } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k^2 f(x) \text{ mit } f(0) = f(L) = 0.$$

(Wiederholung von 8.2.1.2 mit anderen Schwerpunkten)

$\Rightarrow$ Eigenwerte $k = \pi n/L$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$

Eigenfunktionen $f_n(x) = \sin(\pi n x/L)$

Beliebige Funktion $u_0(x)$ kann nach den $f_n(x)$ entwickelt werden:

$$u_0(x) = \sum_n b_n f_n(x).$$

Weiterhin gilt: $\frac{2}{L} \int_0^L dx f_n(x) f_m(x) = \delta_{nm}$.

$\Rightarrow$ Funktionen $\{f_n(x)\}$ sind orthonormal

bzgl. Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) g(x)$ ($\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm}$)

NB: Skalarprodukt ist kommutativ ($\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$)

und bilinear: Linear bzgl. beider Argumente f, g .

Damit gilt in der Entwicklung $u_0(x) = \sum_n b_n f_n(x)$ automatisch:

$$b_n = \sum_m \delta_{mn} b_m = \sum_m \langle f_n, f_m \rangle b_m \underset{\text{Bilinearität}}{=} \langle f_n, \sum_m b_m f_m \rangle = \langle f_n, u_0 \rangle$$

Zusammen: Eigenfunktionen f_n bilden vollständiges orthogonales Funktionensystem.
 Beliebige Funktion $u_0(x)$, die kompatibel mit den Randbedingungen ist,
 kann entwickelt werden gemäß $u_0(x) = \sum_n f_n(x) \langle f_n, u_0 \rangle$.

Konkret: Fourier-Sinus-Reihe: $f_n(x) = \sin(\pi n \frac{x}{L})$
 $\langle f_n, u_0 \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})$

In diesem Kapitel: Klasse von Differentialgleichungen, in denen sich ein solcher Formalismus realisieren läßt, und wichtige konkrete Beispiele.

9.1.2 Das Sturm-Liouville-Problem

Allgemeine Klasse von Differentialgleichungen, aus denen sich orthogonale Funktionensysteme herleiten lassen:

Auf dem Intervall $[a, b]$ gelte $S f(x) + \lambda r(x) f(x) = 0$ (*)

mit dem Sturm-Liouville-Operator

$$S f(x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} f(x) \right) + q(x) f(x)$$

$q(x)$: stetig und reell in $[a, b]$
 $p(x) > 0$, zweimal stetig differenzierbar in $[a, b]$
 $r(x) > 0$, stetig in $[a, b]$

und Randbedingungen: $p(x)(u(x) v'(x) - u'(x) v(x)) \Big|_a^b = 0$
 für je zwei verschiedene unterschiedliche Lösungen $u(x), v(x)$.

NB: Beinhaltet Dirichlet ($u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$)
 und von-Neumann ($u'(a) = u'(b) = v'(a) = v'(b) = 0$).

Definiere Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx r(x) f(x) g(x) \quad (**)$$

wieder kommutativ ($\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$) und bilinear.

Dann gilt für die Eigenvektoren der Differentialgleichung (*)

Orthogonalität: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bzgl. des Skalarproduktes (**).

(Beweis: Für verschiedene Eigenwerte λ_m, λ_n gilt:

$$\begin{aligned} S f_n + \lambda_n r f_n = 0 &\Rightarrow (p f_n')' = -(q + \lambda_n r) f_n, \text{ analog } f_m \\ \Rightarrow \int_a^b dx f_m (p f_n')' &= [p f_m f_n']_a^b - \int_a^b dx p f_m' f_n' = - \int_a^b (q + \lambda_n r) f_m f_n \\ \int_a^b dx f_n (p f_m')' &= [p f_n f_m']_a^b - \int_a^b dx p f_n' f_m' = - \int_a^b (q + \lambda_m r) f_m f_n. \end{aligned}$$

Ziehe beide Gleichungen voneinander ab.

$$\Rightarrow \underbrace{[p(f_m f_n' - f_n f_m')]_a^b}_{0 \text{ lt. Voraussetzung}} = \underbrace{(\lambda_m - \lambda_n)}_{\neq 0} \underbrace{\int_a^b dx r f_m f_n}_{\langle f_m, f_n \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle f_m, f_n \rangle = 0 \text{ für } \lambda_m \neq \lambda_n \quad \checkmark$$

Normiere $f_n \rightarrow \hat{f}_n = f_n / \langle f_n, f_n \rangle \Rightarrow \langle \hat{f}_n, \hat{f}_m \rangle = \delta_{nm}$

Vollständigkeit: Eigenfunktionen bilden vollständiges Orthogonalsystem,
d.h. alle Funktionen lassen sich nach Eigenfunktionen entwickeln.

(ohne Beweis. Stichwort: Differentialgleichung ist "selbstadjungiert")

⇒ Beliebige Funktionen $g(x)$ können entwickelt werden gemäß

$$\boxed{g(x) = \sum_n \hat{f}_n(x) c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \langle \hat{f}_n, g \rangle = \int_a^b dx \, r(x) \hat{f}_n(x) g(x)}$$

$$(\text{wg. } c_n = \sum_m \delta_{nm} c_m = \sum_m \langle \hat{f}_n, \hat{f}_m \rangle c_m = \langle \hat{f}_n, \sum_m c_m \hat{f}_m \rangle = \langle \hat{f}_n, g \rangle)$$

9.1.3 Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen

- **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} f(x) + k^2 f(x) = 0}$$

mit $x \in [0 : L]$, $f(0) = f(L) = 0$.

entspricht $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $r(x) \equiv 1$, $\lambda =: k^2$

Eigenfunktionen: $f_n(x) = \sin(\pi n x / L)$

(siehe 9.1.1)

- **Legendresche Differentialgleichung**

$$\boxed{\frac{d}{dx}((1-x^2) \frac{d}{dx} f(x)) + l(l+1) f(x) = 0}$$

mit $x \in [-1, 1]$, $f(x)$ regulär am Rand.

entspricht $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) \equiv 0$, $r(x) \equiv 1$, $\lambda =: l(l+1)$

Eigenfunktionen: Legendresche Polynome $P_l(x)$

(siehe 9.2.1: Werden immer dann wichtig, wenn mit Kugelkoordinaten gearbeitet wird, vgl. 9.2.4.)

- **Besselsche Differentialgleichung**

$$\boxed{x \frac{d}{dx} (x \frac{d}{dx} f(x)) + (k^2 x^2 - n^2) f(x) = 0}$$

mit $x \in [0 : a]$

entspricht $p(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $r(x) = x$, $\lambda =: k^2$

(nach Division durch x).

Eigenfunktionen: Besselfunktionen $J_n(kr)$

(siehe 9.3: Wichtig bei Problemen mit Zylindergeometrie)

- **Sphärische Bessel-Gleichung**

$$\boxed{\frac{d}{dx} (x^2 \frac{d}{dx} f(x)) + (k^2 x^2 - l(l+1)) f(x) = 0}$$

mit $x \in [0 : a]$

entspricht $p(x) = x^2$, $q(x) = -l(l+1)$, $r(x) = x^2$, $\lambda =: k^2$

(nach Division durch x).

Eigenfunktionen: Sphärische Besselfunktionen $j_n(kr)$

(Probleme mit sphärischer Symmetrie, vgl. auch wieder 9.2.4.)

• **Hermite'sche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2} \frac{d}{dx} f(x)) + 2n e^{-x^2} f(x) = 0$$

mit $x \in [0, \infty]$, $\int_0^\infty dx x^2 f(x) < \infty$.

entspricht $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) \equiv 0$, $r(x) = 2e^{-x^2}$, $\lambda =: n$

Eigenfunktionen: Hermite-Polynome $H_n(x)$

(Lösung der Schrödingergleichung für Schwingungsprozesse)

• **Laguerresche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} \frac{d}{dx} f(x)) + n e^{-x} f(x) = 0$$

mit $x \in [0, \infty]$, $\int_0^\infty dx x^2 f(x) < \infty$.

entspricht $p(x) = x e^{-x}$, $q(x) \equiv 0$, $r(x) = e^{-x}$, $\lambda =: n$

Eigenfunktionen: Laguerre-Polynome $L_n(x)$

(Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom)

Nun: spezielle Differentialgleichungen und Funktionensysteme

9.2 Legendre-Polynome

9.2.1 Die einfache Legendresche Differentialgleichung

Gleichung : Bereits in 9.1.3 eingeführt. Alternative Schreibweise:

$$(1-x^2)f''(x) - 2x f'(x) + l(l+1)f(x) = 0$$

für $x \in [-1 : 1]$, Randbedingungen: $f(x)$ regulär.

Lösungsweg: Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= l(l+1)f(x) - 2x f'(x) + (1-x^2)f''(x) \\ &= l(l+1) \sum_n a_n x^n - 2 \sum_n a_n n x^n + \sum_n a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_n a_n n(n-1) x^n \\ &\quad | \text{Sammle gleiche Potenzen} \\ &= \sum_n x^n [a_n(l(l+1) - 2n - n(n-1)) + a_{n+2}(n+1)(n+2)] \\ \text{Koeffizientenvergleich} &\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{l(l+1)-n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Summe zweier "unabhängiger" Reihen: Eine mit geraden, eine mit ungeraden Potenzen von x . Sind durch den jeweils ersten Koeffizienten a_0 bzw. a_1 vollständig bestimmt.

Möglichkeiten für diese beiden Beiträge:

- Unendlich, Reihe bricht nicht ab.
Konvergenzradius $R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+2}} \right|$
 $\Rightarrow$ Singularität am Rand des Intervalls $[-1, 1]$
 $\leadsto$ Nicht kompatibel mit Randbedingung!
- Reihe bricht ab $\Rightarrow n = l$ oder $n = -(l+1)$ für ein $n = n_c$
 $\Rightarrow l$ muss ganzzahlig sein.
OBdA $l \geq 0$
(anderenfalls ersetze $\tilde{l} = -(l+1) \geq 0 \Rightarrow l(l+1) = \tilde{l}(\tilde{l}+1)$)
 $\Rightarrow$ Abbruchbedingung ist $n_c = l \Rightarrow$ Polynom
 l gerade: Gerades Polynom
 l ungerade: Ungerades Polynom

Lösung (Zusammenfassung)

- Eigenwerte $l \in \mathbb{N}_0$
- Eigenfunktionen: Polynome $P_l(x)$
 - gerade für gerade l , ungerade für ungerade l
 - Rekursionsrelation $a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n$
 - Übliche Normierung: $P_l(1) = 1$
 - Konkret: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

9.2.2 Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome

(1) Orthogonalität $\langle P_l, P_m \rangle := \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_m(x) = 0$ für $l \neq m$

(2) Erzeugende Funktion $\Phi(x, t) := \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$

kann durch einfachen analytischen Ausdruck dargestellt werden:

$$\Phi(x, t) = 1/\sqrt{1 - 2xt + t^2} \quad (*)$$

(Beweis: Erzeugende Funktion erfüllt Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) - 2x \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t \Phi(x, t)) = 0 \text{ mit Randbedingungen:}$$

$$\Phi(0, t) = 1, \Phi(1, t) = \frac{1}{1-x}, \Phi(x, 0) = P_0(x) = 1, \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t)|_{t=0} = P_1(x) = x.$$

Diese Gleichung wird durch (*) erfüllt.)

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion kann eine Reihe weiterer wichtiger Eigenschaften hergeleitet werden, z.B.

(3) Normierung: $\langle P_l, P_l \rangle = \frac{2}{2l+1}$

$$(\text{Dazu: Berechne } \int_{-1}^1 dx \Phi^2(x, t) = \sum_{l, l'} t^{l+l'} \langle P_l, P_{l'} \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_l t^{2l} \langle P_l, P_l \rangle:$$

$$\int_{-1}^1 dx \Phi^2(x, t) = \int_{-1}^1 dx / (1 - 2xt + t^2) = \frac{1}{t} \ln \frac{(1+t)}{(1-t)} = \dots = \sum_0^{\infty} t^{2l} \frac{2}{2l+1}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} \rightarrow \langle P_l, P_l \rangle = 2/(2l+1) \checkmark$$

(4) Rekursionsformeln, z.B.

- $(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$
(Herleitung: Zeige zunächst $(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial}{\partial t} \Phi = (x - t)\Phi$.
Dann Reihendarstellung einsetzen und Koeffizientenvergleich.)
- $xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) + lP_l(x)$
(Herleitung: Zeige zunächst $(x - t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi = t \frac{\partial}{\partial t} \Phi$.
Dann Reihendarstellung einsetzen und Koeffizientenvergleich.)

(5) Formel von Rodriguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

(Beweis:

★: Zeige, dass $f(x) = \frac{d^l}{dx^l} v(x)$ mit $v(x) = (x^2 - 1)^l$ die Legendresche Differentialgleichung erfüllt.

$$\text{Zunächst: } (x^2 - 1)v'(x) = (x^2 - 1)l(x^2 - 1)^{l-1}2x = 2lxv(x)$$

Dann leite diese Gleichung $(l+1)$ mal ab

unter Berücksichtigung von $\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0$ für $n > m$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} ((x^2 - 1)v') &= (x^2 - 1) \frac{d^{l+1}}{dx^{l+2}} v + (l+1)2x \frac{d^{l+1}}{dx^l} v + \frac{l(l+1)}{2} 2 \frac{d^l}{dx^l} v \\ &\stackrel{!}{=} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (2lxv) = 2lx \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} v + 2l(l+1) \frac{d^l}{dx^l} v \\ \Rightarrow (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) - l(l+1)f(x) &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star: \text{Berechne } f(1) &= \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \frac{d^l}{dx^l} ((x-1)^l (x+1)^l) \Big|_{x=1} \\ &= (x+1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x-1)^l \Big|_{x=1} = 2^l l! \quad \checkmark \\ &\quad \frac{d^l}{dx^l} (x-1)^m \Big|_{x=1} = 0 \quad \text{für } m < l \end{aligned}$$

(6) Explizite Gleichung (ohne Beweis)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \binom{l}{m} \binom{2l-m}{l} x^{l-2m}$$

mit $[l/2]$: kleinste ganze Zahl $> l/2$.

(7) Reihenentwicklung beliebiger Funktionen auf $[-1 : 1]$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (2l+1) P_l(x) \Leftrightarrow c_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x) f(x)$$

$\Leftrightarrow$ Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{1}{2} \sum_l (2l+1) P_l(x) P_l(x') = \delta(x - x')$$

9.2.3 Zugeordnete Legendre-Polynome

Gleichung: **Verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right) + \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right) f(x) = 0$$

mit $|x| \leq 1$, $|m| \leq |l|$ ganzzahlig.

NB: $m = 0 \rightarrow$ Einfache Legendresche Differentialgleichung, Lösung $P_l(x)$!

Lösungsweg für $m \neq 0$, OBdA $m > 0$.

- Singularität bei $x \rightarrow \pm 1$ (im Term $-m^2/(1-x^2)$)

Analysiere zunächst asymptotisches Verhalten bei $x \rightarrow \pm 1$:

$$\frac{m}{1-x^2} \gg l(l+1), (1-x^2) \approx 2(1 \mp x)$$

$$\leadsto \text{Nähere Differentialgleichung durch } \frac{d}{dx} 2(1 \mp x) \frac{d}{dx} f - \frac{m^2}{2(1 \mp x)} f \approx 0$$

$$\text{Substituiere } y = \ln(1 \mp x) \Rightarrow \frac{d}{dy} (1 \mp x) \frac{d}{dx} \rightarrow 4 \frac{d^2}{dy^2} f - m^2 f \approx 0$$

$$\Rightarrow \text{Asymptotische Lösung: } f \approx e^{\frac{m}{2} y} = (1 \mp x)^{\frac{m}{2}}$$

- Motiviert Ansatz: $f(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}} (1+x)^{\frac{m}{2}} v_m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} v_m(x)$
 Einsetzen ... $\Rightarrow (1-x^2)v_m''(x) - 2(m+1)xv_m'(x) + (l(l+1) - m(m+1))v_m(x) = 0$
 Trick: Diese Gleichung ableiten und sortieren
 $\Rightarrow (1-x^2)v_m''' - 2(m+2)xv_m'' + (l(l+1) - (m+1)(m+2))v_m' = 0$
 Vergleich $\rightarrow u_m' = u_{m+1}$: Ableiten entspricht Hochsetzen von $m \rightarrow m+1$!
 $\Rightarrow$ Rekursiv erhält man Lösung: $v_m(x) = v_{m-1}'(x) = \dots = \frac{d^m}{dx^m} v_0(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$

Lösung: **Zugeordnete Legendre-Polynome** $P_l^m(x)$ mit $\boxed{-l \leq m \leq l}$

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l^m(x) \\ P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \end{aligned}$$

(Faktor $(-1)^m$ und Definition für P_l^{-m} : Konvention)

Eigenschaften

- Formel von Rodriguez $\boxed{P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (-1)^l (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l}$
 (abgeleitet aus 9.2.2)
- Orthogonalität $\boxed{\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_n^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lm}}$
 (– Orthogonalität: Für festes m ist die Differentialgleichung vom Sturm-Liouville-Typ mit $p = 1-x^2, q = -m^2/(1-x^2)$)
 – Normierung: Übungsaufgabe)

9.2.4 Kugelflächenfunktionen

Nun nachgeliefert Motivation: Bedeutung der Legendre-Polynome.

Häufige Fragestellung in der Physik: Partielle Differentialgleichung mit Δ -Operator an prominenter Stelle. Lösungen sollen nach Radial- und Winkelanteil separiert werden.

Beispiele: Fernfeldentwicklungen (Multipole, Streuung), sphärische Geometrie ...

$\rightarrow$ Suche nach Eigenfunktionen von Δ in Polarkoordinaten, d.h. Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta u = \underbrace{\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]}_{=:\Delta_r} u(r, \theta, \phi) = -k^2 u(r, \theta, \phi)$$

Separationsansatz: $u(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \Delta_r R - \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{1}{Y} \hat{L}^2 Y}_{\substack{\text{unabhängig von } r \\ =: l(l+1)}} = -k^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Radialgleichung: } \left(\Delta_r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) &= -k^2 R(r) \\ \text{Winkelgleichung: } \hat{L}^2 Y(\theta, \phi) &= l(l+1) Y(\theta, \phi) \end{aligned}$$

NB: Radialgleichung ist eine sphärische Besselgleichung (vgl. 9.1.3).

Hier: Schwerpunkt auf Lösung der Winkelgleichung.

→ Zweiter Separationsansatz: $Y(\theta, \phi) = f(\theta) \Phi(\phi)$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{\substack{\text{unabhängig von } \theta \\ \text{Konstante: } -m^2}} \right) = l(l+1)$$

$$\Rightarrow \text{Azimuthale Gleichung: } \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = -m^2 \Phi \text{ für } \phi \in [0 : 2\pi]$$

mit (2π) -periodischen Randbedingungen

$$\Rightarrow \Phi \sim e^{im\phi}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Polare Gleichung: } \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right) f(\theta) = 0$$

$$\text{Substituiere } x = \cos \theta \Leftrightarrow \frac{d}{dx} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}, \quad \sin^2 \theta = (1-x^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right) f(x) = 0$$

⇒ Verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung!

⇒ Lösung bekannt: Eigenwerte $l(l+1)$ mit $l \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Eigenfunktionen: } P_l^m(x) = P_l^m(\cos(\theta))$$

Zusammenfassend: Kugelflächenfunktionen

Der Winkelanteil des Laplace-Operators

$$\hat{L}^2 := -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

hat die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \phi) &= \mathcal{N}_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (m > 0) \\ Y_{l,-m}(\theta, \phi) &= (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \quad (m < 0 : \text{Konvention}) \end{aligned}$$

mit Eigenwerten $l \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, -l \leq m \leq l$

Normierung $\mathcal{N}_{lm}$ so gewählt, dass $\int \sin \theta d\theta \int d\phi |Y_{lm}|^2 = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Die Funktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ heißen **Kugelflächenfunktionen**.

Wichtigste Eigenschaften

Orthonormal:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^* Y_{l'm'} \sim \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m')\phi} = 0 \text{ für } m \neq m' \right)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^* Y_{l'm} \sim \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0 \text{ für } l \neq l'$$

Normierung: Per Definition.)

Vollständig:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

(d.h., man kann alle Funktionen $f(\theta, \phi)$ nach Y_{lm} entwickeln:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\text{mit } c_{lm} = \iint \sin \theta d\theta d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi).$$

Additionstheorem: (ohne Beweis)

Gegeben Einheitsvektoren $\vec{e}, \vec{e}'$ mit Winkelkoordinaten $(\theta, \phi), (\theta', \phi')$.

$$\text{Dann gilt } \boxed{\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')}$$

Konkret:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} & Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ Y_{22} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{aligned}$$

9.3 Die Besselsche Differentialgleichung

Ergibt sich als Radialgleichung in zweidimensionalen Problemen oder bei Verwendung von Zylinderkoordinaten (z.B. 8.2.2.2)

Entsprechung in drei Dimensionen (Radialgleichung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) → sphärische Besselgleichung (vgl. 9.1.3).

Gleichung: Nach 9.1.3

$$\boxed{x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} f(x) \right) + (k^2 x^2 - n^2) f(x) = 0}$$

bzw. definiere $\rho = kx$ und schreibe etwas um

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right) f(\rho) = 0}$$

Lösungsweg: Wieder Potenzreihenansatz $f(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j$

→ Rekursionsformel $a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+n)} a_{2j-2}$ und $a_j = 0$ für j ungerade.

Konvention: $a_0 = [2^n n!]^{-1}$

Lösung:

$$\boxed{J_n(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (n+j)!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2j+n}}$$

Besselfunktion erster Art der Ordnung n .

Weitere Lösungen (Reihen): Besselfunktion 2. Art, Hankelfunktion, ...

Für ganzzahlige n ist $J_n(x)$ als einziges regulär bei $n = 0$.

Orthogonalität: Gehe wieder zurück zur ursprünglichen Gleichung ($\rho = kx$).

Laut 9.1.3 Sturm-Liouville-Gleichung zum Eigenwert k für festes n .

→ Für jedes n erhält man einen Satz orthogonaler Funktionen $J_n(kr)$.

Auswahl der k aus Randbedingung. Sei zum Beispiel Bedingung $f(R) = 0$

⇒ Orthogonales Funktionensystem ist $\{f_n(x)\} = \{J_n(a_l) \frac{x}{R}\}$ mit $\{a_l\}$: Satz der Nullstellen von $J_l(x)$. (davon gibt es unendlich viele)!

Orthogonalitätsrelation: $\int_0^R dx x J_n(a_l \frac{x}{R}) J_n(a_{l'} \frac{x}{R}) = 0$ für $l \neq l'$.

(vgl. 9.1.3: Skalarprodukt muss hier mit Faktor x definiert werden!)

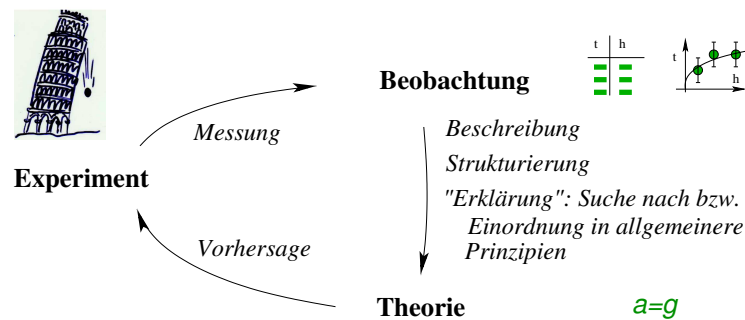
Man könnte noch vieles zu Besselfunktionen sagen, aber wir lassen es hier einmal dabei bewenden! (weitere Gleichungen siehe z.B. Mathworld)

Kapitel 10

Fehlerrechnung und Statistik

10.1 Motivation und Einführung

Erinnerung Kapitel 1.1: Kreislauf der empirischen Wissenschaften

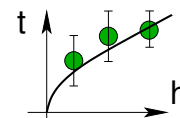


Quantifizierung der Beobachtungen:

Typischerweise Werte mit Fehlerbalken

z.B. Fallversuche: Wertetabelle

Fallhöhe h	Fallzeit t
1 m	$(4.9 \pm 0.9) \text{ s}$
2 m	$(7.2 \pm 0.9) \text{ s}$
3 m	$(7.5 \pm 0.5) \text{ s}$



Ziel: – Auffinden/Test von Gesetzmäßigkeiten, z.B. $t = \sqrt{2gh}$
 – Bestimmung von Naturkonstanten, z.B. $g = (9.81 \pm 0.5) \text{ m/s}^2$

Dieses Kapitel: Diskussion dieser Fehler

- 1) Was versteht man unter einem Fehler?
(Interpretation? Mathematische Beschreibung?)
- 2) Wie bestimmt man Fehler in Experimenten (oder Simulationen)?

Zunächst zur ersten Frage:

Was versteht man unter Fehlern und warum gibt es sie überhaupt?

Beobachtung: Führt man Experimente mehrfach durch oder misst man eine Größe (z.B. g) mehrfach auf verschiedene Weise, so kommt fast nie genau dasselbe heraus.

Ursachen

- Fehler im Versuchsaufbau, ungünstiger Versuchsaufbau, schlechte Kalibrierung, unvollständige Theorie
(z.B. Fallexperiment: Uhr geht falsch, Wind, Luftreibung)

~ Systematische Fehler

Können im Prinzip behoben werden (wenn auch nicht unbedingt in der Praxis), z.B. durch Verbesserung des Versuchsaufbaus, bessere Kalibrierung und/oder Verbesserung der Theorie

Verzerren die Messergebnisse in der Regel systematisch!

- Selbst in durchoptimierten Versuchen streuen Messergebnisse immer noch. Das läßt sich nie ganz beheben.

Die Gründe sind vielfach: Zumindest die Messapparatur ist ein nicht vollständig kontrollierbares Vielteilchensystem, thermisches Rauschen spielt immer eine Rolle (Temperatur Null ist nicht erreichbar), Umwelteinflüsse können nie ganz abgeschirmt werden, Weltall, quantenmechanische Unschärfe, ...

~ Statistische Fehler

Können nicht behoben werden.

Aber: Mitteln sich weg!

In diesem Kapitel geht es um die statistischen Fehler

Interpretation: Wofür steht die Aussage ” $y = y_0 \pm \Delta y$ ”?

Mögliche Antworten:

- Aussage über die Wahrscheinlichkeit, in einem künftigen identischen Experiment zur Messung von y einen Wert im Intervall $y \in [y_0 - \Delta y : y_0 + \Delta y]$ zu finden (unter bestimmten Voraussetzungen 0.68 %, siehe Kapitel 10.4.3).
- oder: Aussage über die Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Wert von y im Bereich $y \in [y_0 - \Delta y : y_0 + \Delta y]$ liegt.

~ Aussagen über **Wahrscheinlichkeiten**

Das heisst: Als erstes müssen wir uns mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit befassen!

10.2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

10.2.1 Konzept und Interpretation von Wahrscheinlichkeit

Wir beginnen mit zwei Beispielen.

Beispiel 1: Wurf eines perfekten Würfels

Aussage: "Die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 2 zu würfeln, ist $1/6$."

Gemeint ist im Allgemeinen:

"Das Ergebnis des Wurfes ist offen. Wenn ich den Wurf $N \rightarrow \infty$ mal wiederhole und die Zahl n_2 der Fälle zähle, in denen die Zahl 2 gewürfelt wurde, dann ist fast immer $p_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_2}{N} = \frac{1}{6}$."

~ **Frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff**

Wahrscheinlichkeit wird interpretiert als eine objektive Größe, die die relative Häufigkeit eines Ereignisses nach einer großen Zahl gleicher, unabhängiger Zufallsexperimente beschreibt.

Beispiel 2: Fallexperiment

Aussage: "Die Erdbeschleunigung g liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % im Intervall $g \in [9.80 : 9.82] \text{ m/s}^2$ "

Gemeint ist im Allgemeinen

" g ist eine Naturkonstante und hat natürlich einen festen Wert, der unabhängig von Experimenten ist. Aber: Ich kenne den Wert von g nicht. Basierend auf meinen Experimenten wette ich 0.68:0.32, dass er im Intervall $g \in [9.80 : 9.82] \text{ m/s}^2$ liegt!"

~ **Bayes-scher Wahrscheinlichkeitsbegriff**

Wahrscheinlichkeit wird interpretiert als subjektive Aussage im Sinne einer Prognose für den Wert einer Größe basierend auf dem Grad des persönlichen Wissens.

~ Zwei verschiedene Auffassungen von Wahrscheinlichkeit, in der Vergangenheit kontrovers diskutiert.

- Aussagen über Fehlerabschätzungen in der Physik liegt oft implizit eine Bayessche Auffassung zugrunde. (Die frequentistische Alternative wäre eine Vielweltheorie, in der Naturkonstanten viele mögliche Werte annehmen können!)
- Bei der Herleitung statistischer Aussagen und der Konzeption statistischer Tests ist es oft einfacher, mit einem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu arbeiten.
- Beide kann man in demselben mathematischen Formalismus einbetten: Dem Formalismus des **Wahrscheinlichkeitsraums**.

10.2.2 Der Wahrscheinlichkeitsraum

Axiomatischer Zugang zum Begriff Wahrscheinlichkeit.

Mathematische Struktur, die den intuitiven Begriff von "Wahrscheinlichkeit" und "Messergebnis" präzisiert.

Wichtig im Zusammenhang mit Messungen: Die physikalische Welt ist weitgehend kontinuierlich. Punkte im Kontinuum sind nicht messbar, deshalb liefern Messungen de facto immer Intervalle. Eine dazu passende mathematische Struktur muss auf Intervallen bzw. allgemeiner auf Teilmengen von Ergebnismengen aufbauen (Kolmogorov, 1903-1987)

★ Der **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ist definiert durch

- Einer Menge Ω der möglichen Ergebnisse eines Versuchs.
- Einer sogenannten σ -Algebra $\mathcal{F}$ der möglichen Ereignisse, d.h. eine Menge von Teilmengen von Ω mit den Eigenschaften
 - $\Omega \in \mathcal{F}$
 - Falls $A \in \mathcal{F}$, ist auch $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
 - Falls $A_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, 2, \dots$, ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
- Ein "Wahrscheinlichkeitsmaß" μ : Eine Funktion $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit
 - $\mu(\emptyset) = 0$
 - $\mu(\Omega) = 1$
 - $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, falls $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$
(d.h., μ definiert normiertes Integral über die Gebiete $A \in \mathcal{F}$)

★ Beispiele

(i) Wurf einer Münze

$\Omega = \{B, Z\}$ (Bild oder Zahl)

$\mathcal{F} = \{\{\}, \{B, Z\}, \{B\}, \{Z\}\}$ (alle Teilmengen von Ω)

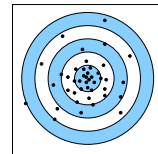
$\mu: \mu(\{\}) = 0, \mu(\{B, Z\}) = 1, \mu(\{B\}) = \mu(\{Z\}) = 1/2$

(ii) Wurf auf Schießscheibe

$\Omega = \mathbb{R}^2$ (Ebene)

$\mathcal{F}$: Alle zweidimensionalen integrierbaren Teilgebiete von Ω

μ : Für $G \in \mathcal{F}$ ist $\mu(G) = \mathcal{N} \int_G d^2r f(\vec{r}) =: \int_G d\mu$
mit $d\mu = d^2r f(\vec{r})$



10.2.3 Wahrscheinlichkeit und Zufallsvariablen

Basierend auf dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums kann man nun zentrale Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie definieren.

- **Zufallsvariable:** μ -integrable Funktion $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \rightarrow Z(\omega)$

z.B. Schießscheibe: Errungene Punktzahl nach einem Wurf

- **Unbedingte Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses $A \in \mathcal{F} : P(A) = \mu(A)$

Angewendet auf Zufallsvariablen Z :

$$P(Z \in [z_1 : z_2]) = \mu(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in [z_1 : z_2]\})$$

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit** Betrachte zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$

Die Wahrscheinlichkeit von A , gegeben B , ist $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

Beispiel: Europawahl 2019 in Deutschland

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p , dass ein Jungwähler (unter 25) DIE PARTEI gewählt hat

– 7% der Wähler waren unter 25

– 0.56% der Wähler waren unter 25 und haben DIE PARTEI gewählt

$$\Rightarrow p = \frac{0.0056}{0.07} = 0.08 = 8\%.$$

(Zum Vergleich: Insgesamt hat DIE PARTEI 2.4% der Stimmen erhalten).

Wichtige Folgerung: **Satz von Bayes**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

(Beweis fast trivial: $P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)$)

Beispiel: Sie haben eine Reise in ein exotisches Land gemacht und lassen sich auf eine Krankheit testen, die 0.1% der Rückkehrer sich eingefangen haben. Der Test hat eine Spezifität von 99% und eine Sensitivität von 98%. Er ist bei Ihnen positiv. Besteht Grund zur Panik?

Erklärung: Spezifität $\triangleq$ correct positive, Sensitivität $\triangleq$ correct negative

Rechnung: Gesucht ist $P(A|B)$, wobei $A \triangleq$ "krank", $B \triangleq$ "Test positiv".

Gegeben ist: $P(A) = 0.001$, $P(B|A) = 0.99$, $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.98$

Daraus folgt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.999$ und $P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.02$

$$\Rightarrow P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.021$$

$$\Rightarrow P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B) = 0.99 \cdot 0.001/0.021 = 0.047 = 4.7\%$$

$\leadsto$ Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie tatsächlich infiziert sind, liegt nur bei 4.7%.

Also nicht verzagen und weitere Tests machen!

- **Statistische Unabhängigkeit:**

Zwei Ereignisse A, B sind statistisch unabhängig,

wenn $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

10.3 Verteilungen

Als nächstes diskutieren wir Verteilungen von Zufallsgrößen.

Beispiele:

- Wurf eines Würfels mit Zufallsvariable: Geworfene Zahl n
 → Verteilung p_n (idealerweise gleichverteilt: $p_n = 1/6 \forall n \in [1 : 6]$).
- Radioaktiver Zerfall mit Zufallsvariable: Zerfallszeit T_L
 → Definition der Verteilung nicht so klar
 (Histogramm? Aber mit welcher Binsgröße?)

Wir wissen allerdings aus Kapitel 4: Bei vorgegebener Zerfallsrate k ist der Anteil der Atome, die nach der Zeit t noch nicht zerfallen sind, gegeben durch $N(t)/N_0 = e^{-kt}$.

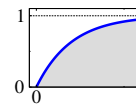
→ Konstruiere Verteilung aus wohldefinierter kumulativer Verteilung

10.3.1 Definitionen

- (i) **Kumulative Verteilungsfunktion:** Gegeben Zufallsvariable Z

$$F_Z(z) := P(Z \leq z) := \mu(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq z\})$$

Beispiel radioaktiver Zerfall: $F_{T_L}(t) = 1 - e^{-kt}$
 $\triangleq$ Anteil Atome, die zur Zeit t zerfallen sind.

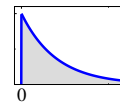


- (ii) **Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung**

Englisch PDF (probability density function)

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) \Leftrightarrow P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dz f_Z(z)$$

Beispiel radioaktiver Zerfall: $f_{T_L}(t) = ke^{-kt}\theta(t)$



→ Wohldefinierte Definition auch für kontinuierliche Zufallszahlen.

Im diskreten Fall (d.h. wenn Z nur diskrete Werte z_i annehmen kann), ist $f_Z(z) = \sum_i p_i \delta(Z - z_i)$

NB: $dz f_Z(z) = \mu(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in [z, z+dz]\})$ kann man als Wahrscheinlichkeit auffassen, die Dichtefunktion $f_Z(z)$ dagegen nicht. Zum Beispiel hat $f_Z(z)$ im Allgemeinen eine Einheit, und der Wert hängt von der Einheit ab.

- (iii) Erweiterung auf multidimensionale Verteilungen

$$dz_1 \dots dz_n f_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n) = \mu(\{\omega \in \Omega : Z_i(\omega) \in [z_i, z_i + dz_i]\})$$

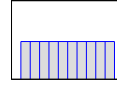
ermöglicht die Definition **statistisch unabhängiger** Zufallsvariablen: $Z_1, \dots, Z_n$ heißen statistisch unabhängig, wenn $f_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n)$ faktorisiert, d.h. $f_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n f_{Z_i}(z_i)$.

Beispiel: Wurf auf Schießscheibe: Die x - und y -Komponente des Auftreffpunktes sind in der Regel statistische unabhängig.

10.3.2 Wichtige Verteilungen

Diskrete Verteilungen

- Gleichverteilung: $p_n = \text{const.}$

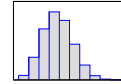


- Binomialverteilung: $p_n = q^n (1-q)^{(N-n)} \binom{N}{n}$

Beispiel: N Würfe eines Würfels

Mit Wahrscheinlichkeit $q = 1/3$ würfelt man 1 oder 2

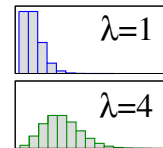
p_n : Wahrscheinlichkeit, n Mal 1 oder 2 zu würfeln



- Poissonverteilung: Grenzfall der Binomialverteilung

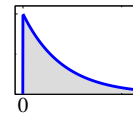
für $p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $pN = \text{const.} = \lambda \Rightarrow p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit für n seltene Ereignisse,
z.B. atomare Zerfälle pro Zeiteinheit



Kontinuierliche Verteilungen

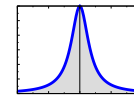
- Exponentialverteilung: $f(z) = \Theta(z) \frac{1}{\beta} e^{-z/\beta}$



- Lorentzverteilung: bzw. Cauchy-Verteilung:

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (z-\mu)^2}$$

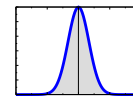
Beispiel: Linienbreiten in der Physik



- Gaußverteilung: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

Die wichtigste aller Verteilungen

Grund: Siehe Kapitel 10.3.6, zentraler Grenzwertsatz



10.3.3 Charakterisierung von Verteilungen

Gegeben eine Zufallsvariable Z mit Verteilungsfunktion $f_Z(z)$. Wir werden nun verschiedene Kenngrößen diskutieren, mit denen man die Verteilung charakterisieren kann.

Am bekanntesten sind

- **Erwartungswert** $\langle Z \rangle = \int dz f_Z(z) z$ bzw. diskret $\langle n \rangle = \sum_n p_n n$

Verallgemeinert $\langle g(Z) \rangle = \int dz f_Z(z) g(z)$

- **Varianz** oder **Streuung**

$$\sigma_Z^2 = \langle (Z - \langle Z \rangle)^2 \rangle = \langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2$$

Verallgemeinerung: Korrelation zwischen zwei Zufallszahlen Z_1, Z_2 :

$$\langle Z_1 Z_2 \rangle = \langle (Z_1 - \langle Z_1 \rangle) (Z_2 - \langle Z_2 \rangle) \rangle = \langle Z_1 Z_2 \rangle - \langle Z_1 \rangle \langle Z_2 \rangle$$

Indikator, ob Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 statistisch unabhängig sein könnten. Statistisch unabhängige Zufallsvariablen sind sicher unkorreliert. Umgekehrt sind unkorrelierte Zufallsvariablen nicht immer unkorreliert.

Der Erwartungswert und die Varianz charakterisieren den dominierenden Wert von z in der Verteilung und die Streuung darum. Bei manchen Verteilungen ist $\langle Z \rangle$ jedoch nicht so aussagekräftig, da extreme Werte zu sehr ins Gewicht fallen. Daher gibt es noch andere Kenngrößen

- **Modus:** Maximum der Verteilung

- **Median oder Zentralwert:**

”Zahl z_m , so dass $Z < z_m$ gleichwahrscheinlich ist wie $Z > z_m$ ”

$\leadsto$ Kontinuierliche Verteilung: $\int_{-\infty}^{z_m} dz f_Z(z) \stackrel{!}{=} \int_{z_m}^{\infty} dz f_Z(z)$

Allgemeiner: $P(Z < z_m) \leq 1/2 \leq P(Z \leq z_m)$

(kann auch auf diskrete Verteilungen angewendet werden)

(NB: Nicht immer eindeutig, kann auch für ein Intervall stehen).

- Verallgemeinerung: **Quantile**

p -Quantil: Zahl z_p mit $\int_{-\infty}^{z_p} dz f_Z(z) = p$ (kontinuierliche Verteilung)

bzw. allgemeiner: $P(Z < z_m) \leq p \leq P(Z \leq z_m)$

Der Median ist das 1/2-Quantil. Andere öfter gebrauchte Quantile sind die Quartile, d.h. das 1/4-Quantil und das 3/4-Quantil, sowie die Perzentile, bei denen p als Prozentzahl angegeben wird.

Weitere, umfassendere Charakterisierungsmöglichkeiten:

- **Charakteristische Funktion:** $\chi_Z(k) = \langle e^{ikZ} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f_Z(z) e^{ikZ}$

Im Prinzip Fouriertransformierte von $f_Z(z)$ (unnormiert)

- **Kumulanten:**

Entwicklungskoeffizienten einer Entwicklung von $\ln(\chi_Z(k))$ nach k

$$\ln \chi_Z(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} C_Z^{(n)} \quad \text{bzw.} \quad C_Z^{(n)} = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dk^n} \ln \langle e^{ikZ} \rangle \Big|_{k=0}$$

Konkret: $C_Z^{(0)} = 1$

$$(\ln \langle e^{ikZ} \rangle \Big|_{k=0})$$

$$C_Z^{(1)} = \langle Z \rangle$$

$$(\ln \langle e^{ikZ} \rangle \Big|_{k=0})$$

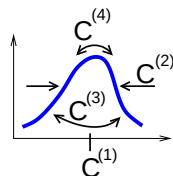
$$C_Z^{(2)} = \sigma_Z^2$$

$$C_Z^{(3)} = \langle (Z - \langle Z \rangle)^3 \rangle$$

$$C_Z^{(4)} = \langle (Z - \langle Z \rangle)^4 \rangle - 3\sigma_Z^4$$

(Übungsaufgabe)

Anschaulich:



$C^{(1)}$: Mittelwert der Verteilung

$C^{(2)}$: Varianz der Verteilung

$C^{(3)}$: Asymmetrie der Verteilung

$C^{(4)}$: Schärfe der Verteilung

verglichen mit Gaußverteilung

NB: In der Gaußverteilung sind alle Kumulanten ab $C^{(3)}$ Null.

10.3.4 Beispiele: Verteilungen aus 10.3.2

Name	Verteilungs- funktion	Erwartungs- wert	Streuung	Charakteristi- sche Funktion
Allgemein	$f_Z(z) = \langle \delta(Z - z) \rangle$	$\langle Z \rangle$	$\langle Z^2 \rangle - \langle Z \rangle^2$	$\chi_Z(k) = \langle e^{ikZ} \rangle$
Einpunkt- Verteilung	$\delta(Z - a)$	a	0	e^{ika}
Gleich- Verteilung	$\sum_{n=1}^N \delta(z - n) \frac{1}{N}$	$(N + 1)/2$	$(N^2 - 1)/12$	$\frac{1 - e^{ikN}}{N(e^{-ik} - 1)}$
Binomial- Verteilung	$\sum_{n=0}^N \delta(z - n) \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}$	Np	$Np(1 - p)$	$[1 - p(1 - e^{ik})]^N$
Poisson- Verteilung	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(z - m) e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^{ik} - 1))$
Gauß- Verteilung	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(z - \mu)^2}{\sigma^2}\right)\right]$	μ	σ^2	$\exp\left[i\mu k - \frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]$
Exponential- Verteilung	$\theta(z) \frac{1}{\beta} e^{-z/\beta}$	β	β^2	$1/(1 - ik\beta)$
Cauchy- (Lorentz-) Verteilung	$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (z - \mu)^2}$	„ μ “ (eigentlich nicht definiert)	∞	$\exp(i\mu k - \lambda k)$

(Rechnungen dazu: Übungsaufgabe)

10.3.5 Umrechnung von Verteilungen

Frage: Gegeben eine Zufallsvariable mit Verteilung $f_Z(z)$.Definiere neue Zufallsvariable über $Y = h(Z)$ Wie ist dann Y verteilt?

Antwort: Einfacher Trick

$$f_Y(y) = \langle \delta(h(Z) - y) \rangle = \int dz \delta(h(z) - y) f_Z(z)$$

(Denn: Dann gilt für alle Erwartungswerte $\langle g(Y) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle g(Y) \rangle &= \int dy g(y) f_Y(y) = \int dy \int dz g(y) \delta(h(z) - y) f_Z(z) \\ &= \int dz f_Z(z) h(g(z)) = \langle h(g(z)) \rangle \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{Speziell: } f_Z(z) = \langle \delta(Z - z) \rangle, \quad F_Z(z) = \langle \Theta(Z - z) \rangle$$

10.3.6 Der zentrale Grenzwertsatz

Grund, warum die Gaußverteilung die mit Abstand wichtigste Verteilung ist: Der Mittelwert von n gleichverteilten Zufallszahlen ist unter bestimmten Voraussetzungen im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ gaussverteilt!

Satz (zentraler Grenzwertsatz nach Lindenberg-Lévy)

Seien n unabhängige Zufallsvariablen alle nach derselben Verteilungsdichte f_Z verteilt: f_Z besitze einen Erwartungswert $\langle Z \rangle$ und eine Varianz $\sigma_Z^2 < \infty$. Dann strebt die Verteilungsdichte $f_{Y_n}(y)$ der Zufallsvariablen

$$Y_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i - \langle Z \rangle \right) / \frac{\sigma_Z}{\sqrt{n}}$$

im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ gegen eine **Normalverteilung**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{Y_n}(y) = \mathcal{N}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

(Für praktische Zwecke: Normalverteilung gut ab etwa $n \sim 30$)

Beweis: Über charakteristische Funktion $\chi_Z(k) = \langle e^{ikZ} \rangle$

– Definiere $X = \frac{Z - \langle Z \rangle}{\sigma_Z \sqrt{n}} \Rightarrow \chi_X(k) = \langle e^{ik(Z - \langle Z \rangle)/\sigma_Z \sqrt{n}} \rangle = e^{-ik\langle Z \rangle/\sigma_Z \sqrt{n}} \chi_Z\left(\frac{k}{\sigma_Z \sqrt{n}}\right)$

– Damit ist $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \chi_{Y_n}(k) = \left\langle e^{ik \sum_{i=1}^n X_i} \right\rangle = \prod_{i=1}^n \left\langle e^{ik X_i} \right\rangle = \left(\chi_X(k) \right)^n$

– Kumulantenentwicklung: $\ln \chi_X(k) = C_X^{(0)} + i C_X^{(1)} k - \frac{1}{2} C_X^{(2)} k^2 + \dots$
mit: $C_X^{(0)} = 0$; $C_X^{(1)} = \langle X \rangle = 0$; $C_X^{(2)} = \langle X^2 \rangle - \underbrace{\langle X \rangle^2}_{=0} = \frac{1}{\sigma_Z^2 n} \underbrace{\langle (Z - \langle Z \rangle)^2 \rangle}_{\sigma_Z^2} = \frac{1}{n}$

$$C_X^{(m)} = (-i)^m \frac{d^m}{dk^m} \ln \left\langle e^{ikX} \right\rangle \Big|_{k=0}$$

$$\stackrel{q:=k/\sigma_Z \sqrt{n}}{=} (-i)^m \left(\frac{1}{\sigma_Z \sqrt{n}} \right)^m \frac{d^m}{dq^m} \ln \left\langle e^{iq(Z - \langle Z \rangle)} \right\rangle \Big|_{q=0} \propto n^{-\frac{m}{2}} C_Z^{(m)}$$

– Einsetzen: $\chi_X(k) = \exp\left(-\frac{k^2}{2n} + \mathcal{O}(n^{-3/2})\right)$

$$\chi_{Y_n}(k) = \left(\chi_X(k) \right)^n = \exp\left(-\frac{k^2}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2})\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi_Y(k) := e^{-k^2/2}$$

– Ursprüngliche Verteilung aus Fourier-Rücktransformation (siehe 7.2.3)

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \chi_Y(y) e^{iky} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad \checkmark$$

Bemerkung: Der zentrale Grenzwertsatz gilt auch für nicht identisch verteilte Zufallsvariablen. Man muss dann eine Zusatzbedingung an die dritten

Momente stellen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\langle Z_1^3 \rangle + \dots + \langle Z_n^3 \rangle)}{(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)^{3/2}} = 0$

Ergänzung: Eine Verteilung, gegen die die Verteilung des Mittelwerts von n identisch verteilten Zufallsvariablen im Limes $n \rightarrow \infty$ strebt, heißt stabile Grenzverteilung. Auch Verteilungen ohne zweites Moment (z.B. Cauchy-Verteilung) können stabile Grenzverteilungen haben
 $\rightarrow$ Lévy-Verteilungen (Lévy, Khintchin).

10.4 Stichproben und Beobachtungsfehler

Wir kommen nun zur ursprünglichen Fragestellung dieses Kapitels zurück: Der Auswertung von Datensätzen.

Angenommen, eine Größe x wurde N Mal unabhängig und auf identische Weise gemessen $\rightarrow$ Messreihe (Datensatz) $(x_1, \dots, x_N)$ mit N unabhängigen Punkten.

Wir fassen die x_i als Zufallsvariablen auf. Sie wurden aus einer identischen Verteilung $f_X(x_i)$ gezogen, die jedoch nicht bekannt ist. Wir haben nur die Stichprobe $(x_1, \dots, x_N)$.

Frage: Wie wertet man diese Stichprobe optimal aus?

Konkret: Wie schätzt man daraus den Erwartungswert $\langle X \rangle$ und die Varianz σ_X^2 der Verteilung ab, und wie bestimmt man den Fehler, den man dabei macht?

10.4.1 Charakterisierung von Stichproben

Für Stichproben definiert man ähnliche charakteristische Größen wie für Verteilungen (10.3.3):

- **Median oder Zentralwert:**

”Zahl x_m , so dass es gleich viele Datenpunkte oberhalb und unterhalb von x_m gibt”

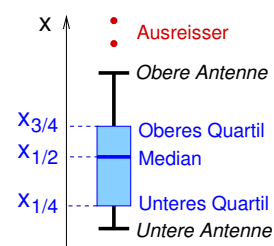
bzw. genauer: Zahl x_m mit $\sum_{x_i < x_m} \leq N/2 \leq \sum_{x_i \leq x_m}$.

- **p -Quantile:** Analog: $\sum_{x_i < x_p} \leq pN \leq \sum_{x_i \leq x_p}$

Beliebte Auftragung bei kleinen Stichproben (z.B. in der Medizin): **Boxplot**

Schnelle Art, Datenverteilungen zu visualisieren, z.B., um Datensätze zu vergleichen

- 50 % der Datenpunkte liegen in der Box
- Mittelstrich: Median
- Antennen: charakterisieren restliche Daten
Definition nicht einheitlich,
z.B. 2.5%-Quantil und 97.5%-Quantil
- Punkte: Ausreißer



- **Stichprobenmittelwert:** $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

- **Stichprobenvarianz:** $\tilde{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

(Erklärung für den Faktor $\frac{1}{N-1}$: Nächster Abschnitt 10.4.2)

10.4.2 Schätzung von Erwartungswert und Varianz

Da die Stichprobe ein endlicher Satz von Zufallsvariablen ist, sind die charakteristischen Größen (Mittelwert etc.) selbst wieder Zufallsgrößen.

Die nächste Frage lautet also: Wie kann man daraus die Parameter der Grundverteilung $f_X(x)$ abschätzen, insbesondere den Erwartungswert $\mu_X := \langle X \rangle$ und die Varianz σ_X^2 ? (die zwei Parameter, die eine Gaußverteilung charakterisieren)

→ Gesucht: **Schätzer** $\tilde{\mu}_X$ und $\tilde{\sigma}_X^2$ für μ und σ_X^2

Bedingung: Soll **erwartungstreu** sein, d.h. $\langle \tilde{\mu}_X \rangle = \mu_X$, $\langle \tilde{\sigma}_X^2 \rangle = \sigma_X^2$

★ Erwartungswert

Ansatz: $\tilde{\mu}_X = A_\mu \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ (mit A_μ : anpassbarer Parameter)

Rechnung: $\langle \tilde{\mu}_X \rangle = A_\mu \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underbrace{\langle x_i \rangle}_{\mu_X} = A_\mu \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^N \mu_X}_N = A_\mu \mu_X \stackrel{!}{=} \mu_X \Rightarrow A_\mu = 1$

⇒ Erwartungstreuer Schätzer für μ_X : $\tilde{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x}$

★ Varianz

Ansatz: $\tilde{\sigma}_X^2 = A_\sigma \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

Rechnung: $\langle \tilde{\sigma}_X^2 \rangle = A_\sigma \langle \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rangle$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \underbrace{\sum_i x_i}_{N\bar{x}} + \sum_i \bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - N\bar{x}^2 \right. \\ & = A_\sigma N (\langle x^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2) \\ & \left| \langle x^2 \rangle = \mu_X^2 + \sigma_X^2, \langle \bar{x}^2 \rangle = \mu_X^2 + \sigma_X^2/N \text{ (Nebenrechnung unten)} \right. \\ & = A_\sigma N (\mu_X^2 + \sigma_X^2 - \mu_X^2 - \sigma_X^2/N) = A_\sigma N \sigma_X^2 (1 - \frac{1}{N}) \stackrel{!}{=} \sigma_X^2 \\ & \Rightarrow A_\sigma = \frac{1}{N(1-1/N)} = \frac{1}{N-1} \end{aligned}$$

→ Erwartungstreuer Schätzer für σ_X^2 : $\tilde{\sigma}_X^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

Interpretation: Warum der Faktor $\frac{1}{N-1}$?

- Die Varianz der "wahren" Verteilung $f_X(x)$ ergibt sich als Summe der mittleren Streuung der Messdaten um den Stichprobenmittelwert, $\Delta^2 := \langle \frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \rangle$, und der Streuung des Stichprobenmittelwertes: $\sigma_X^2 = \Delta^2 + \sigma_{\bar{x}}^2$ mit $\Delta^2 = \frac{N-1}{N} \sigma_X^2$ und $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_X^2/N$.
- Die mittlere Streuung der Messdaten um den Stichprobenmittelwert, muss mit der Zahl der Freiheitsgrade $(N-1)$ normiert werden.

Nebenrechnung: Zeige $\langle \bar{x}^2 \rangle = \mu_X^2 + \sigma_X^2/N$ bzw. $\sigma_{\bar{x}}^2 = \langle \bar{x}^2 \rangle - \langle \bar{x} \rangle^2 = \sigma_X^2/N$

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}^2 \rangle &= \langle (\frac{1}{N} \sum_i x_i)(\frac{1}{N} \sum_j x_j) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \langle x_i x_j \rangle \quad \left| \text{mit } \langle x_i x_j \rangle = \begin{cases} \langle x^2 \rangle & : i = j \\ \langle x \rangle^2 & : i \neq j \text{ (unabhängig)} \end{cases} \right. \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\underbrace{\sum_{i \neq j} \langle x \rangle^2}_{N(N-1)} + \underbrace{\sum_i \langle x^2 \rangle}_N \right] = \frac{1}{N^2} [N(N-1) \mu_X^2 + N(\sigma_X^2 + \mu_X^2)] = \mu_X^2 + \sigma_X^2/N \end{aligned}$$

10.4.3 Fehlerabschätzung und Verteilung des Mittelwertes

Wir betrachten wieder eine Stichprobe wie in 10.4.2.

Aus 10.3.6 wissen wir: Wenn die Stichprobe hinreichend groß ist, sollte der Mittelwert $\bar{x}$ gaußverteilt sein. Die Breite der Gaußverteilung gibt den Fehler $\Delta\tilde{\mu}_X$ unserer Schätzung $\tilde{\mu}_X = \bar{x}$ für μ_X an.

Aus dem zentralen Grenzwertsatz bzw. den Rechnungen in Abschnitt 10.4.2 wissen wir: $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_X/\sqrt{N}$. Die Varianz σ_X schätzen wir mit $\tilde{\sigma}_X$ ab.

→ Abschätzung mit Fehler für den Erwartungswert der Verteilung $f_X(x)$:

$$\langle X \rangle = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} \quad \text{mit} \quad \Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Unter der Annahme, dass $\bar{x}$ tatsächlich gaußverteilt ist, können wir noch weitere statistische Aussagen machen. Zum Beispiel können wir **Konfidenzintervalle** bestimmen, d.h. Intervalle, innerhalb derer sich der "wahre" Erwartungswert μ_X mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit befindet (Vertrauensbereiche):

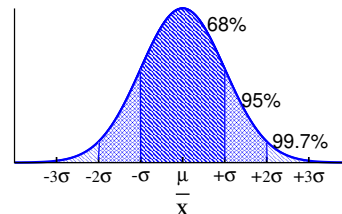
Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert μ_X im Bereich $\bar{x} \pm \alpha \Delta\bar{x}$ liegt, beträgt $P_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} dy e^{-y^2/2}$

(bzw. nach der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung:

Bei unendlich häufiger Wiederholung der N Experimente liegt der Anteil der Mittelwerte $\bar{x}$, die dann im Intervall $[\bar{x} - \alpha \Delta\bar{x} : \bar{x} + \alpha \Delta\bar{x}]$ landen, bei $P_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} dy e^{-y^2/2}$.)

Konkret: Der wahre Wert μ_X liegt mit der Wahrscheinlichkeit ...

- 68% im Bereich $\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$
- 95% im Bereich $\bar{x} \pm 2\Delta\bar{x}$
- 99.7% im Bereich $\bar{x} \pm 3\Delta\bar{x}$



NB: Die Zahl 99.7% hört sich nach viel an. Aber sie besagt auch, dass immerhin in jedem 300. Datensatz der Mittelwert außerhalb des "3 σ "-Intervalls $\bar{x} \pm 3\Delta\bar{x}$ liegt! Das heißt, wenn man sehr intensiv nach einer solchen "signifikanten" Abweichung sucht, sind die Chancen, eine zu finden, doch recht hoch.

10.4.4 Fehlerfortpflanzung

Nächste Frage: Angenommen, aus Experimenten kennen wir eine oder mehrere Messgrößen x_α mit Genauigkeit (Fehler) Δx_α . De facto interessieren wir uns aber für eine abgeleitete Größe $y(x_1, \dots, x_n)$

→ Welchen Fehler Δy hat dann y ?

Beispiel: Fallexperiment liefert fehlerbehaftete Messgrößen $t = \bar{t} \pm \Delta t$, $h = \bar{h} \pm \Delta h$

Bestimme $g = 2h/t^2 \rightarrow$ Welchen Fehler Δg hat g ?

Annahme im Folgenden: Δx_α sei so klein, dass man eine Taylorentwicklung nach der ersten Ordnung abbrechen darf:

$$\begin{aligned}\langle y \rangle &\approx y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \mathcal{O}(\Delta x_\alpha^2) \\ y - \langle y \rangle &\approx \sum_\alpha \left. \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right|_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha} (x_\alpha - \langle x_\alpha \rangle) + \mathcal{O}(\Delta x_\alpha^2)\end{aligned}$$

Fehlerabschätzungen:

(i) Konservative Abschätzung: **Maximalfehler** $\Delta y \lesssim \sum_\alpha \left| \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right|_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha} \Delta x_\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y \lesssim \sum_\alpha \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right)_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha} \right| \sigma_{x_\alpha}}$$

(ii) **Gaußsche Fehlerfortpflanzung:**

Zusätzliche Annahme: x_α unkorreliert $\leadsto$ reduziert den Fehler!

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta y^2 &= \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle \approx \left\langle \left(\sum_\alpha \frac{\partial y}{\partial x_\alpha} (x_\alpha - \langle x_\alpha \rangle) \right)^2 \right\rangle = \sum_\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right)_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha}^2 \langle (x_\alpha - \langle x_\alpha \rangle)^2 \rangle \\ &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right)_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha}^2 \sigma_{x_\alpha}^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y = \sqrt{\sum_\alpha \left(\frac{\partial y}{\partial x_\alpha} \right)_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha}^2 \sigma_{x_\alpha}^2}}$$

Konkret:

- Additive Fehler: $y = \sum_\alpha x_\alpha$
 Maximalfehler: $\Delta y = \sum_\alpha \Delta x_\alpha$
 Gaußscher Fehler: $\Delta y = \sqrt{\sum_\alpha (\Delta x_\alpha)^2}$
 $\leadsto$ Absolute Fehler addieren sich auf!
- Multiplikative Fehler: $y = \prod_\alpha x_\alpha$
 Maximalfehler: $\Delta y = \sum_\alpha \Delta x_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} x_\beta \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \sum_\alpha \frac{\Delta x_\alpha}{x_\alpha}$
 Gaußscher Fehler: $\Delta y/y = \sqrt{\sum_\alpha (\Delta x_\alpha/x_\alpha)^2}$
 $\leadsto$ Relative Fehler addieren sich auf!

Beispiele:

- Fallexperiment: Bestimme Fehler von $g = 2h/t^2$
 aus Kenntnis der Fehler von $t \pm \Delta t$ und $h \pm \Delta h$
 Maximalfehler: $\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \Delta t + \left| \frac{\partial g}{\partial h} \right| \Delta h = 4 \frac{h}{t^3} \Delta t + 2 \frac{1}{t^2} \Delta h$
 Gaußscher Fehler: $\Delta g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \Delta t^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial h} \right)^2 \Delta h^2 = 16 \frac{h^2}{t^6} \Delta t^2 + 4 \frac{1}{t^4} \Delta h^2$
 $\Rightarrow (\Delta g/g)^2 = 4(\Delta t/t)^2 + (\Delta h/h)^2$
- Kleine Differenz von großen Messgrößen
 $y = x_1 - x_2 \ll x_1 \approx x_2$
 $\Rightarrow y \ll \max(x_1, x_2); \Delta y > \max(\Delta x_1, \Delta x_2)$
 $\Rightarrow$ Relativer Fehler $\Delta y/y$ wird sehr groß !

10.5 Parameter-Fitting

Häufige Problemstellung:

Gegeben Messreihe (Datensatz) $D = \{(y_i; \Delta y_i, \underline{x}_i)\}$

mit y_i : Gemessene Größen (evtl. bereits mit Fehler Δy_i)

$\underline{x}_i$: Vektor von zugehörigen Kontrollparameter

evtl. systematisch variiert

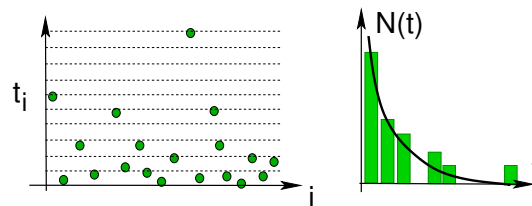
und Hypothese H dazu, wie die y_i für gegebene Kontrollparameter $\underline{x}_i$ verteilt sein sollten. H hängt von Modellparametern c_α ab

→ Aufgabe: Abschätzen der Modellparameter $\{c_\alpha\}$ aus den Daten D
"Fitten der Parameter $\{c_\alpha\}$ an die Daten D !"

Beispiele

(i) Radioaktiver Zerfall; Messreihe: Satz von Zerfallszeiten $\{t_i\}$

- Daten: $\{t_i\}$ (keine Fehler, keine Kontrollparameter)
- Hypothese: Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $f_{T_L}(t) = ke^{-kt}$
- Modellparameter: Zerfallsrate k

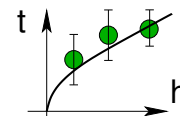


→ Beispiel, in dem eine Verteilung gefittet werden soll.

(ii) Fallexperiment; Messreihe: $t_i \pm \Delta t_i$ bei Fallhöhe h_i

- Daten: $\{(t_i; \Delta t_i, h_i)\}$ (Fehler Δt_i , Kontrollparameter h_i)
- Hypothese: Für gegebenes h_i ist t_i gaußverteilt mit Varianz Δt_i und Erwartungswert $\langle t_i \rangle = \sqrt{2h_i/g}$.
- Modellparameter: g

→ Beispiel, in dem eine Gleichung zu einem funktionalen Zusammenhang zwischen Größen gefittet werden soll.



Dieses Kapitel: Einführung in einige Methoden des Parameter-Fittings

10.5.1 Bayes-Schätzer und Maximum Likelihood (ML)

- ★ Ausgangspunkt: Fasse Fitparameter $\{c_\alpha\}$ nach Bayes als Zufallsvariablen auf, für die eine Prognose gemacht werden soll.

Wende Satz von Bayes an:

$$P(\{c_\alpha\}|D) = \frac{P(D|\{c_\alpha\}) P(\{c_\alpha\})}{P(D)}$$

mit: $P(D|\{c_\alpha\})$: **Likelihood**

Wahrscheinlichkeit, mit der bei gegebenen Parameter $\{c_\alpha\}$ unter der Hypothese H der Datensatz D eintritt
(als bekannt vorausgesetzt)

$P(\{c_\alpha\})$: **Prior**

A-Priori Wahrscheinlichkeit für die Verteilung der Parameter (Vorwissen)

$P(D)$: **Marginal** oder **Base rate**

De facto einfach Normierung

”Wahrscheinlichkeit von D für alle möglichen Parameter $\{c_\alpha\}$ ”

$P(\{c_\alpha\}|D)$: **Posterior**

Wahrscheinlichkeit für Parameter $\{c_\alpha\}$, gegeben dass der Datensatz D existiert und unter Berücksichtigung des Priors

Idee: Wähle als Schätzer für die Parameter $\{c_\alpha\}$ diejenigen, die laut Posterior am wahrscheinlichsten sind!

→ Maximiere $P(\{c_\alpha\}|D)$ bzgl. c_α für den gegebenen Datensatz D .

(NB: Es reicht offensichtlich, $P(D|\{c_\alpha\}) P(\{c_\alpha\})$ zu maximieren. $P(D)$ muss dafür nicht bekannt sein!)

- ★ Speziell: Maximum Likelihood

Falls es keinen Prior (Vorwissen) gibt, dann nimmt man für $P(\{c_\alpha\})$ einfach eine Gleichverteilung an (innerhalb sinnvoller Grenzen)

→ $P(\{c_\alpha\}|D) \propto P(D|\{c_\alpha\})$

⇒ Maximiere $P(D|\{c_\alpha\})$ bzgl. der c_α ,

d.h. optimiere die Modellparameter $\{c_\alpha\}$ so, dass der Datensatz D in der zugehörigen Hypothese der wahrscheinlichste Datensatz ist.

↪ **Maximum Likelihood (ML)-Methode**

- ★ Beispiele

– Radioaktiver Zerfall:

Datensatz $\{t_i\}$ ($i = 1, \dots, N$), Hypothese $f_{T_L}(t) = k e^{-kt}$

$$\Rightarrow P(\{t_i\}|k) \propto \prod_i (k e^{-kt_i}) = k^N e^{-k \sum_i t_i}$$

Da $\ln P$ monotone in P ist, kann man statt P auch $\ln P$ maximieren.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial k} \ln P = \frac{N}{k} - \sum_i t_i \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow k = N / \sum_i t_i = 1/\bar{t}$$

↪ Nach der ML-Methode ist $k = 1/\bar{t}$

(Ohne Zweifel ein sinnvolles Ergebnis!)

– Gaußsche Verteilung

Datensatz $\{y_i\}$ ($i = 1, \dots, N$), Hypothese $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}$

$$\Rightarrow P(\{y_i\}|\{\mu, \sigma\}) \propto \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\sum_i \frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right)$$

Maximiere $\ln P = -\frac{N}{\sigma} - \sum_i \frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2} + \text{const.}$ bzgl. μ und σ

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu} \ln P = \sum_i \frac{(y_i-\mu)}{\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{N} \sum_i y_i = \bar{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln P = -\frac{N}{\sigma} + \sum_i \frac{(y_i-\mu)^2}{\sigma^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \mu)^2$$

Fasse zusammen $\leadsto$ ML-Schätzung $\mu = \bar{y}$, $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - \bar{y})^2$

Vergleiche mit den Schätzern aus 10.4.3

→ Die Schätzer für μ stimmen überein.

→ Die Schätzer für σ^2 unterscheiden sich um den Faktor $\frac{N-1}{N}$.

Der ML-Schätzer für σ^2 ist nicht optimal, da er nicht erwartungstreu ist. Allerdings geben im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ (unendlich viele Datenpunkte) beide wieder dasselbe Ergebnis.

10.5.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Nun kommen wir konkret zum Fitten von Gleichungen

Ziel: Datensatz $\{y_i; \Delta y_i; \underline{x}_i\}$ mit Kontrollparametern $\underline{x}_i$, und Messdaten $y_i \pm \Delta y_i$ an eine Funktion $y = \phi(\underline{x}; \{c_\alpha\})$ anfitzen (z.B. Gerade, Polynom, auch kompliziertere Funktionen)

Verfahren: Ausgangspunkt ist die ML-Methode mit zusätzlicher Annahme: Für feste $\underline{x}_i$ ist y_i gaußverteilt mit Erwartungswert $\langle y_i \rangle = \phi(\underline{x}_i, \{c_\alpha\})$ und Varianz $\sigma_i = \Delta y_i$.

(Motivation: Die Daten y_i sind selber Mittelwerte, so dass der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann.)

$$\leadsto P(D|\{c_\alpha\}) \propto \exp\left(-\sum_i \frac{1}{2\sigma_i^2} (y_i - \phi(\underline{x}_i, \{c_\alpha\}))^2\right)$$

Maximiere $\ln P(D|\{c_\alpha\})$ bzgl. c_α

$$\Rightarrow \underline{\text{Minimiere Funktion}} \quad \boxed{\chi^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - \phi(\underline{x}_i, \{c_\alpha\}))^2}$$

$\leadsto$ Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Engl. **"Least squares fitting"**

★ Bemerkungen

- Die Varianzen σ_i werden nicht mitgefittet. Dort setzt man die Schätzer Δy_i ein. Falls keine Fehler bekannt sind (z.B., weil nur einzelne Datenpunkte vorliegen), setzt man einfach $\sigma_i \equiv 1$.
- Der Vektor von Kontrollparametern $\underline{x}_i$ kann auch mehrdimensional sein - d.h., man kann ohne weiteres mehrere Kurven gleichzeitig fitten.

★ Konkretes Vorgehen: Was ist zu tun?

- Definiere $\chi^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - \phi(\underline{x}_i, \{c_\alpha\}))^2$
- Minimiere χ^2 bzgl. $\{c_\alpha\}$
 - Satz von Gleichungen $\frac{\partial}{\partial c_\alpha} \chi^2 \stackrel{!}{=} 0$
 - Schätzer $\tilde{c}_\alpha$ für den optimalen Wert von c_α
(Explizite oder implizite Gleichungen)
- Bestimme Schätzer Δc_α für den Fehler von $\tilde{c}_\alpha$ aus den Fehlern Δy_i
z.B. über Gaußsche Fehlerfortpflanzung
(NB: Erfahrungsgemäß oft zu klein.
Alternativ konservativere Abschätzung:
Variiere y_i innerhalb der Fehlergrenzen und fitte neu.)
- Überprüfe Fit: Wichtig, nicht vergessen !!
 - 1) Wenn es kein Routine-Fit ist: Unbedingt Ergebnis anschauen!
→ Geht die gefittete Kurve auch wirklich durch die Daten?
 - 2) "Residuen" $(y_i - \phi(\underline{x}_i, \{\tilde{c}_\alpha\}))/\sigma_i$ auftragen.
→ Sind sie wirklich normalverteilt ?
(Normalverteilung: Gaußverteilung um 0 mit Breite 1,
 $\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)$, siehe 10.3.6)

10.5.3 Lineare Regression

Wichtiger Spezialfall der Methode der kleinsten Fehlerquadrate:

Fitfunktion $\phi(\underline{x}; \{c_\alpha\})$ ist lineare Funktion der Parameter c_α . Dann kann das Fitproblem mit Methoden der linearen Algebra gelöst werden.

Gegeben sei ein Datensatz $\{y_i; \Delta y_i; \underline{x}_i\}$ mit n Datenpunkten und eine lineare Fitfunktion mit k Parametern c_α , d.h. $\phi(\underline{x}; \{c_\alpha\}) = \sum_{\alpha=1}^k c_\alpha a_\alpha(\underline{x})$

★ Bestimmung der Fitparameter $\tilde{c}_\alpha$

- Aufgabe: Minimiere $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - \sum_\alpha c_\alpha a_\alpha(\underline{x}_i))^2$
 - Lösung in Matrixnotation
 - Definiere Vektoren $y = (y_1, \dots, y_n)$, $c = (c_1, \dots, c_k)$
und Matrizen A, Σ mit $A_{i\alpha} := a_\alpha(\underline{x}_i)$ und $\Sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_i^2$
→ $\chi^2 = (y - Ac)^T \Sigma^{-1} (y - Ac)$
 - Minimiere $\chi^2 \Rightarrow \frac{\partial \chi^2}{\partial c_\alpha} \stackrel{!}{=} 0$
Rechnung: $\frac{\partial \chi^2}{\partial c_\alpha} = -2 \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - \sum_\beta c_\beta a_\beta(\underline{x}_i)) a_\alpha(\underline{x}_i) = -2 [A^T \Sigma^{-1} (y - Ac)]_\alpha$
 $\Rightarrow \frac{\partial \chi^2}{\partial c_\alpha} \stackrel{!}{=} 0$ führt zu Gleichungssystem $A^T \Sigma^{-1} Ac = A^T \Sigma^{-1} y$
- $\Rightarrow$ Lösung: $\tilde{c} = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} y$
(Voraussetzung: $(A^T \Sigma^{-1} A)$ invertierbar.
Anderenfalls ist Lösung nicht eindeutig!)

★ Fehlerabschätzung

Bestimme Fehler von $\tilde{c}_\alpha$ mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung

Rechnung: Definiere $B = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1} \Rightarrow C = By$

$$\Rightarrow \Delta c_\alpha^2 = \sum_i \underbrace{(\partial c_\alpha / \partial y_i)^2}_{B_{\alpha i}} \underbrace{\Delta y_i^2}_{\Sigma_{ii}} = \sum_{ij} B_{\alpha i} \underbrace{\Sigma_{ij}}_{\Sigma_{ii} \delta_{ij}} B_{\alpha j}$$

$\Rightarrow \Delta c_\alpha^2$ sind die Diagonalelemente von $\Delta c \Delta c^T = B \Sigma B^T$

Setze $B = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1}$ ein und verwende:

$(A^T \Sigma^{-1} A)$ und Σ sind symmetrisch, ebenso damit auch ihre Inverse.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta c \Delta c^T &= [(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1}] \Sigma [(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1}]^T \\ &= [(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma^{-1}] \Sigma [\Sigma^{-1} A (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1}] = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta c_\alpha)^2 = \left[(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} \right]_{\alpha\alpha}}$$

★ Anmerkungen

- Auch wenn die y_i unabhängig sind, sind die c_α i. A. nicht mehr unabhängig. Die Korrelation der Parameter $\tilde{c}_\alpha$ und $\tilde{c}_\beta$ wird durch die Nebendiagonalen $\left[(A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} \right]_{\alpha\beta}$ angegeben.
- Die obigen Formeln können auch dann noch verwendet werden, wenn die y_i nicht unabhängig sind. Man ersetzt dann $\Sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_i^2$ durch die Korrelationsmatrix $\Sigma_{ij} = \langle y_i y_j \rangle - \langle y_i \rangle \langle y_j \rangle$

★ Anwendungsbeispiel: Regressionsgerade (vgl. Übungsaufgabe)

Aufgabe: Fit eines Datensatzes an eine Gerade

$$\boxed{\phi(x) = c_1 + c_2 x}$$

$\leadsto$ Entspricht linearer Regression mit Fitfunktion $\phi(x) = \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha a_\alpha(x)$

mit $a_1(x) = 1$, $a_2(x) = x \Rightarrow A_{i1} = 1$, $A_{i2} = x_i$

$$\text{bzw. } A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T \Sigma^{-1} A) = \dots = \begin{pmatrix} S_e & S_x \\ S_x & S_{xx} \end{pmatrix} \text{ und } A^T \Sigma^{-1} y = \dots = \begin{pmatrix} S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } S_e &= \sum_i 1/\sigma_i^2, \\ S_x &= \sum_i x_i/\sigma_i^2, \\ S_y &= \sum_i y_i/\sigma_i^2, \\ S_{xx} &= \sum_i x_i^2/\sigma_i^2, \\ S_{xy} &= \sum_i x_i y_i/\sigma_i^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{1}{S_e S_{xx} - S_x^2} (S_{xx} S_y - S_x S_{xy} \pm S_{xx}) \\ \tilde{c}_2 &= \frac{1}{S_e S_{xx} - S_x^2} (S_{xy} S_e - S_x S_y \pm S_e) \end{aligned}}$$

Anhang A

Anhang: Analytische Funktionen

In diesem Anhang: Spezielle Eigenschaften *komplexer* differenzierbarer Funktionen $f(z)$ ($f(z), z \in \mathbb{C}$).

Komplexe Differenzierbarkeit ist eine viel stärkere Forderung als Differenzierbarkeit im Reellen, da der Grenzwert für den Differenzenquotienten für Differenzen in der komplexen Ebene erfüllt sein muss.

Im Gegenzug haben komplex differenzierbare Funktionen eine Reihe erstaunlicher Eigenschaften $\rightarrow$ Gegenstand der *Funktionentheorie*.

A.1 Definitionen

Analytische Funktion: $f(z)$ heißt **analytisch bei** $z = a$, wenn $f(z)$ differenzierbar für alle Punkte innerhalb eines (möglicherweise kleinen) Kreis um $z = a$, d.h. der Grenzwert $\frac{df}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz}$ existiert und ist eindeutig für alle Richtungen von dz in der komplexen Ebene.

Eine Funktion $f(z)$ heißt **analytisch in einem (offenen) Gebiet**, wenn $f(z)$ bei jedem Punkt in diesem Gebiet analytisch ist.

Reguläre Punkte von $f(z)$ sind Punkte, wo $f(z)$ analytisch ist.

Singuläre Punkte oder **Singularitäten** sind Punkte, an denen $f(z)$ nicht analytisch ist.

Falls $f(z)$ bei $z = a$ singulär ist, aber rund um a analytisch, dann ist a eine **isolierte Singularität**.

Ein **Pol** ist eine isolierte Singularität, bei der die reziproke Funktion $1/f(z)$ regulär ist und eine Nullstelle hat. An einem **Pol nter Ordnung** hat $1/f(z)$ eine n -fache Nullstelle.

Beispiele:

Die Funktion $f(z) = z^2$ ist analytisch.

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ hat einen zweifachen Pol bei $z = 0$.

Die Funktion $f(z) = |z|^2$ ist nicht analytisch.

(Nicht differenzierbar im Komplexen:

In Polardarstellung sei $z = |z|e^{i\phi}$, $dz = |dz|e^{i\psi}$.

Dann ist $\lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = 2|z| \cos(\phi - \psi)e^{-i\psi}$ nicht eindeutig:

Hängt von ψ ab.)

A.2 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Es gilt:

Cauchy-Riemann-Relationen Wenn $f(z)$ analytisch ist, dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

(Beweisskizze: $df = du + idv$; $dz = dx + idy$.

$$\Rightarrow df = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \stackrel{!}{=} \frac{df}{dz} dz = \frac{df}{dz} (dx + idy),$$

$$\text{wobei } \frac{df}{dz} \text{ eindeutig sein soll. } \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \stackrel{!}{=} \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Rest folgt aus Vergleich von Real- und Imaginärteil.)

Umgekehrt gilt: Falls die u und v stetig und stetig differenzierbar sind und ihre partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Relationen erfüllen, ist $f(z) = u + iv$ analytisch.

(Beweisskizze: Eindeutigkeit der Ableitung läßt sich zumindest für

Grenzwerte $dz \rightarrow 0$ entlang gerader Pfade von dz zeigen.

Schreibe $dz = dx + idy = |dz|e^{i\phi} \rightarrow dx = |dz| \cos \phi$, $dy = |dz| \sin \phi$.

$$df = |dz| \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \phi + i \frac{\partial v}{\partial x} \cos \phi + i \frac{\partial v}{\partial y} \sin \phi \right]$$

$$= |dz| (\cos \phi + i \sin \phi) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right], \text{ wegen Cauchy-Riemann-Relation.}$$

Damit ist $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ eindeutig.)

NB: Daraus folgt unmittelbar, dass für analytische $f = u + iv$ die Funktionen u und v im Analytizitätsgebiet die sogenannte **Laplace-Gleichung** erfüllen: $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ mit $\Delta g(x, y) := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \text{ Herleitung für } v \text{ analog.} \right)$$

Beispiele:

$$f(z) = z^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \text{analytisch!}$$

$$f(z) = |z|^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 + y^2, v \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{nicht analytisch!}$$

A.3 Integralsätze

Cauchyscher Integralsatz: Wenn $f(z)$ auf einer 'einfachen' geschlossenen Kurve C und in dem darin eingeschlossenen Gebiet G analytisch ist, dann gilt: $\oint_C dz f(z) = 0$.

Dabei ist eine 'einfache' Kurve eine Kurve, die sich nicht selbst kreuzt, und das Integral $\int_C dz f(z)$ ist als *Kurvenintegral* definiert: Die Kurve C sei durch eine Funktion $z(s)$ mit irgendeinem Parameter s parametrisiert ($s \in [s_0, s_1]$). Dann ist $\int_C dz f(z) = \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{dz}{ds} f(z(s))$

(Beweisskizze: Betrachte Einfachkeitshalber konvexes Gebiet

(anderenfalls Zerlegung in konvexe Teilgebiete).

Betrachte in $\oint_C dz f(z) = \oint_C (dx + i dy) f(z)$ zunächst den Term $\oint_C dx f(z)$.

Weg C kann in oberen und unteren Teilweg $y_u(x)$ und $y_o(x)$ zerlegt werden.

$$\oint_C dx f(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (f(x, y_u(x)) - f(x, y_o(x))) dx = - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} dy \frac{\partial f}{\partial y} = - \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{Analog: } \oint_C dy f(z) = \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$\text{Zusammen: } \oint_C dz f = - \iint_G dA \left(\frac{\partial f}{\partial y} - i \frac{\partial f}{\partial x} \right) = - \iint_G dA \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \text{ wegen Cauchy-Riemann Relationen}$$

Folgerung: Solange man Anfangs- und Endpunkt gleich lässt und keinen Pol überstreicht, darf man Integrationspfade in der komplexen Ebene verschieben. (Altes und neues Kurvenintegral unterscheiden sich dann um eine geschlossene Kurve, die nach dem Cauchyschen Integralsatz keinen Beitrag liefert.)

Beispiel: Berechnung des Integrals $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} e^{ikx}$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-ik/2)^2} e^{-k^2/4} = e^{-k^2/4} \int_{-(\infty-ik/2)}^{\infty-ik/2} dy e^{-y^2}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{=} e^{-k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = e^{-k^2/4} \sqrt{\pi}.$$

Cauchysche Integralgleichung: Sei eine einfache geschlossene Kurve C , die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wenn $f(z)$ auf C und dem von C eingeschlossenen Gebiet G analytisch ist, dann gilt für Punkte w in dem Gebiet G : $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$.

(Beweisskizze: Ziehe Integrationskurve so weit zusammen (Cauchyscher Integralsatz!),

bis sie nur einen Kreis von infinitesimalem Radius ϵ um den Pol $z = w$ ist. Parametrisiere sie mit $\phi \in [0 : 2\pi]$: $z(\phi) = w + \epsilon e^{i\phi}$.

$$\Rightarrow \oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi i\epsilon e^{i\phi} \frac{f(w)}{\epsilon e^{i\phi}} = f(w) i \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i f(w)$$

Residuensatz Folgt direkt aus dem Cauchyschen Integralsatz.

C sei eine einfache geschlossene Kurve, die ein Gebiet G umschließt. Die Funktion $f(z)$ sei auf C und G analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten z_j im Inneren von G .

$$\text{Dann ist } \oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}[f(z); z_j]$$

mit den **Residuen** $\text{Res}[f(z); z_j] := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} d\zeta f(\zeta)$, wobei die Kurve Γ_j ein Kreis mit Radius $\epsilon \rightarrow 0^+$ um $z = z_j$ ist. Alle Kurvenintegrale werden gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Berechnung des Residuums oft ganz einfach:

Wenn z_j eine n -fache Polstelle von $f(z)$ ist, dann ist

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z); z_j] = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) (z - z_j)^n] \Big|_{z=z_j}}$$

(Rechnung: $f(z)$ hat n -fachen Pol bei $z_j \Leftrightarrow g(z) = f(z) (z - z_j)^n$ ist regulär bei z_j)

Parametrisiere Γ_j mit $\phi \in [0 : 2\pi] : z(\phi) = z_j + \epsilon e^{i\phi}$.

(ϵ muss klein genug sein, dass Γ_j nur einen Pol umschließt.)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} dz f(z) &= \oint_{\Gamma_j} dz \frac{g(z)}{(z - z_j)^n} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} g(z_j + \epsilon e^{i\phi}) \epsilon^{-n} e^{-in\phi} \\ \left| \frac{dz}{d\phi} = i\epsilon e^{i\phi}, \quad \text{Taylorentwicklung von } g(z_j + \epsilon e^{i\phi}) \text{ um } z_j \right. \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k g(z)}{dz^k} \Big|_{z=z_j} \epsilon^{j-n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(j+n-1)\phi}}_{2\pi \delta_{j,n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z) \Big|_{z=z_j} \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel: Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2}$

Funktion $f(z) = 1/(1+z^2)$ hat einfache Pole bei $z = \pm i$.

Zugehörige Residuen: $\operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{1}{2i}$, $\operatorname{Res}[f(z), -i] = -\frac{1}{2i}$.

Wähle als Integrationspfad Kurve, die gewünschtes Integral enthält und obere Halbebene umschließt:

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \oint dz f(z) = \int_{-R}^R dx f(x) + \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} d(Re^{i\phi}) f(Re^{i\phi})$$

Beitrag von $\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} d(Re^{i\phi}) f(Re^{i\phi}) \sim \frac{1}{R}$ verschwindet mit $R \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), i] = \pi.$$

A.4 Taylor-Reihe und Laurent-Reihe

Theorem: (ohne Beweisskizze): Eine Funktion $f(z)$, die in einem Gebiet analytisch ist (also *mindestens einmal* differenzierbar), ist damit automatisch *unendlich oft* differenzierbar und kann in jedem Punkt a des Gebietes in eine Taylorreihe entwickelt werden. Der *Konvergenzradius* der resultierenden Potenzreihe ist durch den Abstand zum nächsten singulären Punkt in der komplexen Ebene gegeben.

(Beispiel: $f(z) = \ln(1+z)$ hat Singularität bei $z = -1$. Deshalb hat die MacLaurin-Reihe von $f(z)$ den Konvergenzradius $R = 1$.)

Analytische Fortsetzung - Innerhalb eines zusammenhängenden Gebiets kann der Konvergenzbereich bzw. u.U. auch der Definitionsbereich einer Funktion $f(z)$ erweitert werden, wenn man die Taylorreihe um $z = a$ dazu nutzt, eine neue Taylorreihe um einen geeigneten Punkt b zu konstruieren.

Beispiel: Logarithmus $f(z) = \ln(1+z)$

Taylor-Reihe von $f(z)$ um $z = 0$ hat den Konvergenzradius 1 (s.o.)

Man kann diese Taylor-Reihe dazu nutzen, eine Taylorreihe um $z = 0.9$ zu konstruieren. Die neue Potenzreihe hat den Konvergenzradius $R = 1.9$ und konvergiert daher in einem größeren Bereich als die ursprüngliche Reihe.

Durch sukzessive analytische Fortsetzungen über die komplexe Ebene kann man den Definitionsbereich von $f(z)$ auch so erweitern, dass die Funktion für reelle $z < -1$ definiert ist. Ergebnis ist allerdings nicht eindeutig und hängt davon ab, ob über die obere oder untere Halbebene von $\mathbb{C}$ analytisch fortgesetzt wurde.

Laurent-Reihe: Verallgemeinerung der Taylor-Reihe

Taylor-Reihe: Entwicklung von $f(z)$ nach Potenzen $(z - z_0)^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
Konvergenzgebiet kreisförmig (schließt z_0 ein).

Laurent-Reihe: Entwicklung von $f(z)$ nach $(z - z_0)^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Konvergenzgebiet kreisringförmig (schließt z_0 nicht notwendig ein).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n / (z - z_0)^n.$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) (z - z_0)^{n-1},$$

wobei C eine beliebige geschlossene Kurve im Konvergenzgebiet (Kreisring) ist, die z_0 umschließt.

(Herleitung der Formeln für a_n und b_n :

Zeige zunächst, dass $\oint dz (z - z_0)^k = \delta_{k,-1} 2\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$:

$k = -1$: Cauchysche Integralgleichung.

$k \geq 0$: Cauchyscher Integralsatz ($(f(z) = (z - z_0)^k$ ist analytisch).

$k < -1$: Ziehe Integrationskurve auf Kreis mit Radius ϵ um z_0 zusammen.

Parametrisiere $z(\phi) = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$.

Berechne $\oint dz (z - z_0)^k = i\epsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(k+1)\phi} = 0$ für $k \neq -1$.

Setze dann Laurentreihe für $f(z)$ in Gleichungen für a_n und b_n ein und überprüfe deren Richtigkeit.)