

Aufgaben zum "Mathematischer Brückenkurs"

Blatt 1 zum 27.3.2023

Erläuterungen

- Die Aufgabenblätter stellen ein Angebot für das Tutorium dar. Sie enthalten in der Regel mehr Aufgaben, als innerhalb eines Nachmittags realistischere gerechnet werden können.
- Aufgaben, die mit hoher Priorität gerechnet werden sollten, sind mit einem P gekennzeichnet.
- Besonders schwierige Aufgaben werden mit einem \star gekennzeichnet. Die Ambitionierteren unter Ihnen haben vielleicht Spass daran. Sie werden im Tutorium aber mit niedriger Priorität besprochen.
- Bei den anderen Aufgaben entscheidet Ihr Tutor/ Ihre Tutorin, welche Aufgaben vorrangig besprochen werden.

Literatur zu diesem Blatt:

- "K. Hefft, Mathematischer Vorkurs", Kapitel 1, 2.
bzw. online www.thphys.uni-heidelberg.de/hefft/vk1/
- "E. Cramer, J. Neslehova, Vorkurs Mathematik", Kapitel 1, 2, 4.

Aufgabe 1) Einheiten I

Rechnen Sie die folgenden Größen wie angegeben in andere Einheiten um.

- P(a) Wie viel sind 1000 mexikanische Pesos in EUR bei einem Kurs von $1 \text{ EUR} = 20.12 \text{ Pesos}$
- P(b) In Ortschaften ist die Geschwindigkeitsgrenze manchmal 30 km/h . Wieviel ist das in m/s ?
- P(c) Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in km/s .
Bemerkung: Dies beantwortet folgende Frage: Angenommen, ein Blitz schlägt in 1 km Entfernung ein: Wie lange dauert es, bis Sie den Donner hören?
Den Wert der Schallgeschwindigkeit in m/s oder km/h finden Sie z.B. auf Wikipedia.
- P(d) Haare wachsen mit einer Geschwindigkeit von 1.5 cm pro Monat. Rechnen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit in km/h um.
- P(e) Glukose hat eine Molmasse von 180 g/mol . Wieviel kg wiegt ein Glukosemolekül?
- P(f) Glukose hat in Wasser eine Diffusionskonstante von $6.78 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$. Geben Sie die Diffusionskonstante in nm^2/ns an (Nanometer zum Quadrat pro Nanosekunde).
- (g) Der Druck in der Erde ist 35 Millionen bar. Rechnen Sie den Druck in die SI-Einheit Pascal um.

- (h) In der Physik wird die Energieeinheit Elektronenvolt (eV) gerne verwendet. Hier ist $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{As}$ die sogenannte "Elementarladung", die Ladung eines Protons. In der Thermodynamik spielt die Energie $k_B T$ eine wichtige Rolle, wobei T die aktuelle Temperatur ist und $k_B = 1.38064852 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2/\text{K s}^2$ die sogenannte Boltzmannkonstante. Berechnen Sie $k_B T$ bei Raumtemperatur (20 Grad Celsius) in Einheiten von Elektronenvolt.
- (i) Wie viel ist ein PSI (pounds per square inch) in SI-Einheiten?

Aufgabe 2) Einheiten II

- P(a) Welcher Länge entspricht 1 rad auf der Erdoberfläche?
(Der Umfang der Erde ist 40.000 km.)
- (b) Welchen Längen entsprechen 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde, auf der Erdoberfläche?
- P(c) Welcher Fläche entspricht 1 Steradian auf der Erde?
- (d) Welchen Flächen entspricht auf der Erde 1 Quadratgrad, 1 Quadratminute, 1 Quadratsekunde?
- P(d) Wie viel Liter Wasser hält ein Kanister mit Länge 80 cm, Breite 40 cm, Höhe 60 cm?
- (e) Wie viele Stunden und Minuten sind 18600 Sekunden?
- (f) Wie viele Platten der Größe 10 cm \times 20 cm braucht man, um eine Fläche von 50 m² zu pflastern?
- P(g) Wie lange ist ein Mikrojahrhundert?

Aufgabe 3) Notation und Sonstiges

Berechnen Sie

- P(a) $\sum_{k=1}^4 (-1)^k$, $\prod_{k=1}^4 (-1)^k$, $\binom{6}{3}$
- P(b) $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n}$
- P(c) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- (d) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
(Trick: Benutzen Sie den Binomischen Lehrsatz.)
- * (e) Zeigen Sie $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$
- * (f) Zeigen Sie die Gaußsche Summenformel $\sum_{k=0}^n k = n(n+1)/2$
- * (g) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
(Trick: $\sum_{k=0}^n (k+1)^3$ ausmultiplizieren und (f) benutzen!)

Aufgabe 4) Zwei seltsame Beweise

Mit den folgenden "Beweisen" stimmt etwas nicht. Finden Sie heraus, wo der Wurm steckt.

a) Beweis, dass $4=5$ ist:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad & 16 - 36 = 25 - 45 \\ \Rightarrow & 16 - 36 + 81/4 = 25 - 45 + 81/4 \\ \Rightarrow & 42 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow & \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow & 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \\ \Rightarrow & 4 = 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Beweis, dass $1=0$ ist: Setze $x = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & x^2 = x \\ \Rightarrow & x^2 - x = x - 1 \\ \Rightarrow & (x - 1)(x + 1) = x - 1 \\ \Rightarrow & x + 1 = 1 \\ \Rightarrow & x = 0 \end{aligned}$$

Also ist sowohl $x = 1$ und $x = 0$ und damit $1 = 0$ \checkmark