

Aufgaben zum "Mathematischer Brückenkurs"

Blatt 2 zum 28.3.2023

Erläuterungen der P- und *-Aufgaben: Siehe Blatt 1

Literatur zu diesem Blatt:

"E. Cramer, J. Neslehova, Vorkurs Mathematik", Kapitel 3,6

Aufgabe 1) Bruchrechnung und Potenzen

P(a) Wie lautet die Primfaktorzerlegung von 27, 180, 53?

P(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 123456789
(Tipp: Nicht verzagen, Google fragen)

P(c) Vereinfachen Sie die folgenden Brüche:
 $64/24$, $11409/123456789$, $\frac{1}{27}/\frac{3}{2}$, $1/\frac{1}{x}$, $\frac{25x-5y}{15xy}$

(d) Vereinfachen Sie den Bruch $\frac{\frac{ab}{2a+4} + \frac{b}{a+2}}{\frac{a}{b+3} - \frac{ab}{3b-9}}$

P(e) Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{3}{8} + \frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8}$

P(f) Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}$, $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1}$

(g) Berechnen Sie $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

(h) Berechnen Sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$
(Tipp: Verwenden Sie das Ergebnis von (g)).

*(i) Partialbruchzerlegung:

Bestimmen Sie Zahlen A, B so, dass $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x^2-1}$

Aufgabe 2) Potenzrechnung

P(a) Vereinfachen Sie $(-a^2) \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^3$ und $\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{-a}\right) \cdot \frac{1}{-a}$

P(b) Vereinfachen Sie $\sqrt{ab} \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{a^2b^2}$

P(c) Vereinfachen Sie $\frac{(x-y)^{-1}}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^{-2}}{(x-y)^3}$

(d) Vereinfachen Sie $\sqrt[4]{(x+1)^8} \cdot (x+1)^{-1}$

(e) Vereinfachen Sie $w\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ und $12\sqrt{x} - \sqrt{4x} - \sqrt{x}$

(f) Formen Sie folgende Brüche so um, dass der Nenner keine Wurzel mehr enthält:
 $2/\sqrt{2}$, $28/(4 + \sqrt{2})$, $(\sqrt{5} - \sqrt{3})/(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

Tipp: Manchmal hilft eine binomische Formel weiter.

(g) Berechnen Sie $\log_2(4)$ und $\log_4(2)$.

*(h) Zinsrechnung: Sie haben 100 EUR auf dem Konto und erhalten jedes Jahr 5 % Zinsen. Wie ist der Kontostand nach 100 Jahren? Wie lange dauert es, bis sich Ihr Gutachten verdoppelt hat?

*(i) Beweisen Sie die Gleichung $\log_c(b) = \log_a(b)/\log_a(c)$ für, $a, c \neq 1$

Aufgabe 3) Gleichungen und Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen \mathbb{L} der folgenden Gleichungen. Vergessen Sie nicht, jeweils durch Einsetzen abzuchecken, welche Ihrer errechneten Lösungen erlaubt sind.

P(a) Die linearen Gleichungen (i) $3(x + 5) - 5(1 + 3x) = 2$ und (ii) $x(3 + 4) + 14 = 7(x + 2)$

P(b) Die quadratischen Gleichungen (i) $(x + 3)(x + 4) = 0$, (ii) $x^2 + 4x + 3 = 0$, (iii) $x(x + 1) = 1$.

(c) Die Bruchgleichungen (i) $\frac{x-2}{5x+3} + \frac{3}{x+1} = 1$ und (ii) $\frac{x-6}{1-x} + \frac{5}{(1-x)(x-6)} = \frac{x-7}{x-6}$

P(d) Die Wurzelgleichungen (i) $\sqrt{15x - 40} + 3x = 8$ und (ii) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$

P(e) Die Logarithmus-Gleichung $\log_3(x - 1) = 2$

*(f) Die Logarithmus-Gleichung $\log_2(x) = \log_3(x)$

(g) Die Ungleichungen (i) $x - 2 > 2x - 1$, (ii) $\frac{x-1}{2} \geq \frac{1-x}{3}$ und (iii) $4x^2 - 8x + 3 > 0$

*(h) Die Ungleichung $\frac{2x-4}{2-x} \geq 0$

Aufgabe 4) Gleichungen mit Einheiten

Testen Sie anhand eines Einheitenchecks, ob die folgenden Gleichungen stimmen können.

Hier ist:

P(a) $F = m g$

- F eine Kraft mit der Einheit N (Newton)

- m eine Masse mit der Einheit kg

P(b) $E = m c^3$

- g eine Beschleunigung mit der Einheit m/s²

- E eine Energie mit der Einheit J (Joule)

P(c) $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

- c eine Geschwindigkeit mit der Einheit m/s

P(d) $U = R I^2$

- p in (c) ein Impuls mit der Einheit N s

- U eine Spannung mit der Einheit Volt

P(e) $P = U I$

- R ein Widerstand mit der Einheit Ohm

- I eine Stromstärke mit der Einheit A (Ampère)

P(f) $p V = n R T$

- P eine Leistung mit der Einheit Watt

(g) Zeit = Geld

- p in (f) ein Druck mit der Einheit N/m².

- T eine Temperatur mit der Einheit K

- $R = 8.31447$ J/mol K die universelle Gaskonstante

Falls die Gleichungen nicht stimmen: Wie könnte man sie modifizieren, damit zumindest die Einheiten konsistent sind?

Aufgabe 5) Noch zwei seltsame Beweise

Mit den folgenden "Beweisen" stimmt etwas nicht. Finden Sie heraus, wo der Wurm steckt.

(a) Beweis, dass $2 > 3$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad & 1/4 > 1/8 \\ \Rightarrow & (1/2)^2 > (1/2)^3 \\ \Rightarrow & \log_{10}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) > \log_{10}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{3} \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow & 2 > 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(b) Beweis, dass Wasserstoff = Chlor:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad & \text{H}_2 + \text{Cl}_2 = 2\text{H Cl} \\ \Rightarrow & \text{H H} + \text{Cl Cl} - 2\text{H Cl} = 0 \\ \Rightarrow & (\text{H} - \text{Cl})^2 = 0 \\ \Rightarrow & \text{H} - \text{Cl} = 0 \\ \Rightarrow & \text{H} = \text{Cl} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 6) Lineare Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungen $\{(x_1, x_2)\}$ der Gleichungssysteme

(a) $x_1 - 3x_2 = -1$ und $-4x_1 + 5x_2 = -3$

(b) $4x_1 - 3x_2 = 3$ und $-8x_1 + 6x_2 = -6$