Institut für Physik SS 2023

Friederike Schmid

Aufgaben zum "Mathematischer Brückenkurs"

Blatt 4 zum 30.3.2023

Erläuterungen der P- und *-Aufgaben: Siehe Blatt 1

Literatur zu diesem Blatt:
"M. Klinger, Vorkurs Mathematik", Kapitel 2.4
"K. Hefft, Mathematischer Vorkurs", Kapitel 9.1-9.7

Aufgabe 1) Vektor

Gegeben seien folgende Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

P(a) Betrachten Sie alle möglichen Paare von Vektoren (also z.B. $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{b}, \vec{c})$ etc.). Welche davon sind linear unabhängig, welche linear abhängig?

P(b) Sind die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linear unabhängig? Wie ist es mit den Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$? Versuchen Sie, ohne lange Rechnung auf die Antwort zu kommen. (Begründen müssen Sie sie allerdings schon!)

P(c) Normieren Sie $\vec{a}$ und $\vec{e}$ auf die Länge 1.

P(d) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$

P(e) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})$

(f) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

(g) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{d}$ aufgespannt wird.

(h) Berechnen Sie das Volumen eines Parallelopipeds mit den Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$.

Aufgabe 2) Abstände zwischen Punkten und Drehungen

(a) Gegeben zwei Punkte mit den Ortskoordinaten $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1\text{ cm} \\ 4\text{ cm} \\ -8\text{ cm} \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -3\text{ cm} \\ -4\text{ cm} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Abstand der Punkte voneinander und ihre Abstände zum Nullpunkt.

(b) Wie ändern sich die Koordinaten der Punkte, wenn wir das Koordinatensystem im Uhrzeigersinn um den Winkel π (in radian) um die z-Achse (die Achse 3) drehen?

*(c) Wie ändern sich die Koordinaten der Punkte, wenn wir das Koordinatensystem im Uhrzeigersinn um den Winkel $\pi/2$ (in radian) um die z-Achse (die Achse 3) drehen?

(d) Wie ändern sich die Abstände zwischen den Punkten nach der Drehung des Koordinatensystems?

Aufgabe 3) Vektorsummen

(a) Betrachten Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der gleichen Länge (d.h. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$). Zeigen Sie, dass $(\vec{a}+\vec{b})$ und $(\vec{a}-\vec{b})$ senkrecht aufeinander stehen. Kann man das auch anschaulich verstehen?

*(b) Berechnen Sie in der (x, y)-Ebene die Summe von sieben Vektoren $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_7$ der Länge a, wobei $\vec{a}_1$ in x-Richtung zeigt und $\vec{a}_j$ mit $\vec{a}_{j-1}$ die Winkeldifferenz $\pi/6$ hat.

Hinweis: Diese Aufgabe kann man ganz ohne Rechnung lösen!

Aufgabe 4) Reziproke Vektoren

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kann man sogenannte reziproke Vektoren definieren:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \qquad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V},$$

mit $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Reziproke Vektoren spielen in der Kristallographie eine wichtige Rolle.

ab) Berechnen Sie die reziproken Vektoren für

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \begin{cases} 1 & : \text{für } i = j \\ 0 & : \text{für } i \neq j \end{cases}$

Was bedeutet das anschaulich?

*(c) Begründen Sie, idealerweise ohne Rechnung: Die drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ sind auch linear unabhängig.