

Dynamiksimulation starrer Körper für VR-Anwendungen

Dynamiksimulation starrer Körper für Virtual Reality Anwendungen

J. Sauer und E. Schömer *

sauer@dbag.ulm.daimlerbenz.com und schoemer@cs.uni-sb.de

Daimler-Benz Forschung, Virtual Reality Competence Center (FT3/EV),

Wilhelm-Runge-Straße 11, 89081 Ulm

und

Universität des Saarlandes, Fachbereich Informatik, Lehrstuhl Prof. Hotz,

Im Stadtwald, 66123 Saarbrücken

Zusammenfassung

Wir präsentieren überblicksartig Konzeption, theoretischen Hintergrund und Stand der Realisierung des hybriden VR-Simulationssystems GALILEO. Das Ziel des Systems ist die Simulation der Dynamik unilateraler Kontaktkonfigurationen zwischen starren dreidimensionalen Körpern unter Berücksichtigung skalierbarer Reibungs- beziehungsweise Kollisionsmodelle. Dabei stehen die konkurrierenden Anforderungen Echtzeit (15 - 25 Bilder pro Sekunde) und physikalische Güte der Simulation im Vordergrund des Interesses. Als erste Testanwendung des Systems untersuchen wir ein bekanntes Beispiel aus der klassischen Mechanik, den Stehaufkreisel (Bild 1).

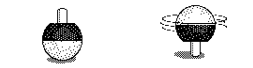


Bild 1: Stehaufkreisel

1 Einleitung



Bild 2: Visualisierung

Im Virtual Reality Competence Center (VRCC) der Daimler-Benz Forschung wird die „Leading-Edge Technology“ Virtual Reality zur Lösung vielfältiger Aufgaben aus verschiedensten Unternehmensbereichen genutzt. Unabhängig davon, ob es sich um Stereo-Hochqualitätsvisualisierungen (siehe Reflection-Mapping im Bild 2), Trainingssimulationen, Ergonomieuntersuchungen oder um stark interaktive Aufgaben wie die Simulation von Ein- und Ausbavorgängen im Motorraum oder im Fahrzeuginneren (siehe Radioeinbau im Bild 3) handelt; letztendlich ist immer eine Reduzierung der Produktentwicklungszeiten und -kosten oder eine besonders beeindruckende Produktpräsentation das Ziel der Anstrengungen. Virtual Reality als Technologie zeichnet sich dabei im Vergleich zur „klassischen Computergraphik“ insbesondere durch „echte“ 3D-Visualisierung (Stereo-Sicht), durch die Möglichkeit der Interaktion in und mit der dreidimensionalen Szene und durch den Effekt der Immersion aus. Als Immersion bezeichnet man gemeinhin die psychophysische Eingebundenheit des Akteurs in die virtuelle Welt. Der Immersions-

*Wir danken Prof. Dr. Günther Hotz, Leiter des Instituts für Praktische Mathematik und Informatik an der Universität des Saarlandes, für seine hilfreichen Anregungen.

grad einer VR-Anwendung kann folglich als eine Art Qualitätsmaßstab für jedes VR-System angesehen werden. Deshalb ist die Erhöhung des Immersions- und damit Realitätsgrades von virtuellen Welten durch die physikalische Modellierung von Objekten ein Forschungsthema, das immer mehr Beachtung findet. Man interessiert sich aber nicht nur für die effekthafte Modellierung physikalischer Phänomene wie Schwerkraft und Trägheit, sondern ebenso für aussagekräftige Simulationen von Problemen aus dem Bereich der Mehrkörperdynamik. Wir betrachten dabei immer starre Objekte, da sie das einfachste Körpermodell darstellen, dessen Dynamik in Echtzeit zu berechnen ist.

Im Robotik- und im „CAx“-Bereich konzentriert sich das Simulationsinteresse eher auf gelenkig verbundene Mechanismen (bilaterale Kontakte, kinematische Ketten). In unseren VR-Applikationen sind unilaterale Beschränkungen von größerer Bedeutung. In heutigen sowohl universitären als auch kommerziellen VR-Systemen ist die Modellierung physikalischen Verhaltens zumeist sehr rudimentär, falls überhaupt vorhanden, realisiert. Soll beispielsweise ein Schwerkrafteffekt simuliert werden, so wird zumeist die Rotationsbewegung beim freien Fall der Objekte vollkommen vernachlässigt. Weiterhin werden in Computergraphik-Animationen in der Regel Feder-Dämpfer-Verbindungen zur Simulation des physikalischen Verhaltens beim Kontakt von starren Körpern herangezogen. Diese Vorgehensweisen sind im wesentlichen aufgrund der Einfachheit der Verfahren und folglich der Implementierung beliebt. Ein Laufzeitargument gilt an dieser Stelle nicht wirklich, denn der „Flaschenhals“ aller stark interaktiven Simulationen ist und bleibt die Kollisionserkennung. Unsere Ergebnisse zeigen aber, daß die Simulation des „korrekten“ dynamischen Verhaltens in Echtzeit unter Verwendung einer effizienten Kollisionserkennung durchaus möglich ist. Im folgenden beschreiben wir ein Simulationssystem, dessen Teilkomponenten den Stand der Forschung in diesem Gebiet widerspiegeln.



Bild 3: Ein-/Ausbau

2 Konzeption des Systems

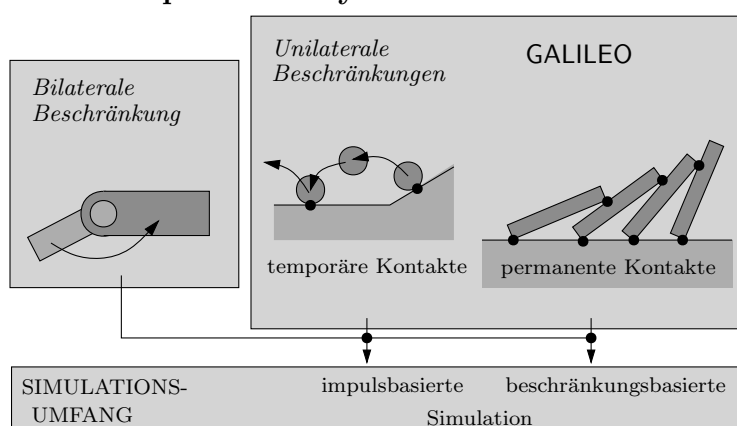


Bild 4: Kontaktsituationen

Unser Entwurf wurde von zwei Zielen getragen: Echtzeit und physikalische Wirklichkeitstreue. Um beiden gerecht zu werden, benötigt man skalierbare Verfahren, die bei einem Mehr an Simulationszeit in ihrer physikalischen Güte zunehmen. Die physikalische Aussagekraft der Simulationen ist insbesondere abhängig von 1. der Art der Realisierung der Reibung und 2. der physikalischen Modellie-

rung auftretender Kollisionen. Als grundlegendes Prinzip der Dynamik eignet sich das des Newton'schen Kräftegleichgewichts. Die unilateralen Kontakte teilen wir in zwei Kategorien ein (Bild 4). Zum einen gibt es die zumeist temporär auftretenden Einpunktkontakte zwischen zwei Objekten (z.B. bei Kollisionen zwischen sich ballistisch bewegenden Objekten) und zum anderen die Kontaktsituationen zwischen mehreren Objekten an mehreren Kontaktpunkten (z.B. beim Liegen, Gleiten und Rollen von Objekten). Natürlich finden auch Übergänge zwischen den beiden Konfigurationstypen statt. Für jede Kontaktart sollte der am besten geeignete Ansatz gewählt werden. Das ist die prinzipielle und einfache Idee des hybriden Simulationssystems. Mirtich hat die Entwicklung eines solchen Systems als eines der entscheidenden Forschungsthemen der Zukunft im Bereich der Mechaniksimulation bezeichnet [8].

Wir nutzen zur Simulation entweder einen impulsbasierten oder einen beschränkungsbasierten Ansatz. Dabei trägt diese Namensgebung der grundlegenden Charakteristik der jeweiligen Vorgehensweise Rechnung. Die impulsbasierte Methode beruht im wesentlichen auf einem Differentialgleichungsschema, welches mit einem adaptiven Runge-Kutta-Verfahren numerisch gelöst wird. Eine Skalierungsmöglichkeit ist hinsichtlich der Kollisionsbehandlung gegeben. Der beschränkungsbasierten Methode liegt ein nichtlineares Komplementaritätsproblem zugrunde, das linearisiert und mittels des kombinatorischen Lemke-Algorithmus behandelt wird. Dabei ist die Genauigkeit der Reibungssimulation skalierbar. In beiden Ansätzen wird isotrope Haft- und Gleitreibung entsprechend dem Coulomb'schen Gesetz berücksichtigt. Im Falle dynamischer Reibung ist die relative Kontaktgeschwindigkeit in Tangentialrichtung der Kontaktebene ungleich Null, $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$. Dann ergibt sich die Reibungskraft aus der Normalkraft mit dem Reibungskoeffizienten μ zu $\mathbf{F}_t = -\mu|\mathbf{F}_n|\frac{\mathbf{u}_t}{|\mathbf{u}_t|}$. Im Falle der statischen Reibung ist $\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$ und die Reibungskraft wird durch den Reibungskegel $|\mathbf{F}_t| \leq \mu|\mathbf{F}_n|$ beschränkt. Auch eine Approximation der Rollreibung ist in manchen Simulationen von Nöten. Bemerkenswert ist weiterhin, daß beide Simulationsansätze Kontaktimpulse liefern und damit im Gegensatz zu dem lange als gültig angesehenen „Principle of Constraints“ stehen. Dieses Prinzip forderte, geometrische Beschränkungen durch Kontaktkräfte zu realisieren. Da Impulse mathematisch gesehen Diskontinuitäten im Geschwindigkeitsverlauf hervorrufen, wurde das Prinzip auch als gerechtfertigt angesehen, bis seine Unzulänglichkeit von Baraff im Zusammenhang mit den Paradoxa von Painlevé aufgedeckt wurde [1]. Beide grundsätzlich unterschiedlichen Verfahren stellen den Stand der Technik im Bereich der Simulation starrer Objekte dar.

Die Klassifikation der Kontaktsituationen entsprechend der Ab-

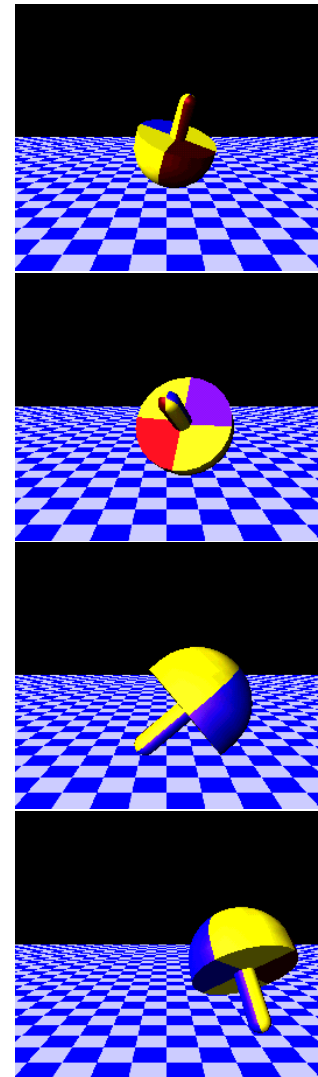


Bild 5: Beschränkungs-basierte Simulation des Stehaufkreisels

bildung 4 läßt sich aber nicht nur aus den auftretenden Fällen in der realen Anwendung ableiten, sondern erfreulicherweise auch durch physikalische Gütebetrachtungen begründen. Mit diesen gehen auch die algorithmisch unterschiedlichen Vorgehensweisen einher. Vereinfacht gesprochen ist es so, daß Einpunktkontakte (siehe Beispiel des springenden Balls) zwischen genau zwei Objekten sehr viel besser verstanden werden und deshalb auch simuliert werden können als Mehrkörperprobleme (siehe Dominobeispiel). Wenn man bereit ist, Effizienzeinbußen in Kauf zu nehmen, dann lassen sich Mehrkörperprobleme natürlich auch als eine zeitliche Folge von Problemen mit einem Kontaktpunkt auffassen. Die Bedeutung der Reibungs- und Kollisionsmodellierung wird insbesondere anhand der Betrachtung klassischer Probleme offensichtlich. So kann es z.B. bei Verwendung der Poisson'schen oder der Newton'schen Hypothese zur Bestimmung der bei einer Kollision an einem Kontaktpunkt ausgetauschten Kräfte zu Energiegewinnen kommen. Ebenso bekannt sind auch die bereits erwähnten Paradoxa von Painlevé; bereits für triviale Simulationsbeispiele mit einem Kontaktpunkt und nur dynamischer Reibung lassen sich unilaterale Kontaktsituationen mit anziehenden oder unbestimmten Kontaktkräften nachweisen. Ein weiteres Problem ist die Bestimmung der initialen Gleitrichtung eines Objektes nach einer Phase der Haftreibung. Geht man zu Mehrpunktkontakten über, so finden sich dort ähnliche Schwierigkeiten, wie z.B. das Problem der statischen Unbestimmtheit.

3 Das hybride Simulationssystem GALILEO

Im folgenden stellen wir kurz die entscheidenden Teilkomponenten des Systems dar. Für genauere Beschreibungen verweisen wir auf [12, 14]. Die prototypische Implementierung ist in die eigenentwickelte VR-Plattform DBView des VRCC eingebunden.

3.1 Die impulsbasierte Simulation

Die impulsbasierte Methode beruht auf den Arbeiten von Hahn [5], Keller [6], Stronge [11] und Mirtich und Canny [8]. Sie bestimmt in einer lokalen Betrachtungsweise das Verhalten zweier kollidierender Objekte an einem einzigen Kontaktpunkt. Zur Berechnung des Impulses am Kontaktpunkt müssen, je nach Art der wirkenden Reibung und abhängig vom aktuellen Zeitpunkt während der Kollision, Varianten einer bestimmten Differentialgleichung gelöst werden. Mittels dieser wird die relative Kontaktgeschwindigkeit während des Kollisionszeitraumes integriert. Während der Integration der Differentialgleichung spielt eine Matrix, die Masse und Trägheit der Objekte sowie die Kontaktgeometrie berücksichtigt, eine entscheidende Rolle zur Bestimmung der ausgetauschten Impulse. Mit diesen und den ebenfalls bestimmbareren Drehimpulsen kann für jedes der beiden Objekte eine Schwerpunkts- und eine Winkelgeschwindigkeit berechnet werden und somit die neue Position und Orientierung. Der Kollisionsprozeß selbst wird durch eine Kompressionsphase und eine darauf folgende Rückstellungsphase entsprechend der energetischen internen Dissipationshypothese von Stronge [11] modelliert. Der durch diese Hypothese definierte Rückstellungskoeffizient spiegelt dabei eine einfache mathematische Modellierung der Objektelastizität wider, die virtuellen Objekte selbst sind allerdings starr. Zudem hat die Kollision nur infinitesimale zeitliche Ausdehnung. Objekte ohne Kollision bewegen sich immer ballistisch. Das Verfahren verfolgt, wie beschrieben, die variable re-

lative Kontaktgeschwindigkeit während der Kompressions- und der Rückstellungsphase. Dies ermöglicht die Vermeidung negativer Energiedissipation, welche auf anderen Kollisionshypothesen beruhende Verfahren oft zeigen. Zudem wird die korrekte Gleitrichtung beim Übergang von Haft- zu Gleitreibung nach [8] bestimmt. Die grundlegende Differentialgleichung vereinfacht sich in bestimmten Fällen zu analytischen Ausdrücken zur Berechnung der Kontaktgeschwindigkeit am Ende der Kollision. Eine Beschleunigung der impulsbasierten Methode ist möglich, indem man anstelle der Differentialgleichung von vornherein algebraische Gleichungen zur Berechnung des Impulses nutzt. Damit einher geht natürlich ein Verlust an physikalischer Güte, allerdings zeigt Chatterjee [3] mit den von ihr aufgestellten linearen Kollisionsgesetzen, daß etwa das Problem von Energiegewinnen vermieden werden kann. Wir haben das Verfahren bezüglich des Zusammenspiels mit der ebenfalls im VRCC entwickelten dynamischen Kollisionserkennung erweitert. Sie bestimmt, basierend auf den Informationen der integrierten Bewegungsgleichungen, den wahren Kollisionszeitpunkt mit der entsprechenden Kollisionskonfiguration zwischen zwei statischen Testzeitpunkten (einer kollisionsfrei, der andere nicht). Zur Simulation von Mehrkörperproblemen gibt es allerdings effizientere Verfahren, als über eine Folge von Einpunktkontakten vorzugehen. Im folgenden stellen wir eines vor.

3.2 Die beschränkungsbasierte Simulation

Wir haben den Ansatz von Stewart und Trinkle [15], der seinerseits auf [9] und [10] beruht, erweitert und verbessert [12]. Ziel der beschränkungsbasierten Simulation ist die Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines Systems starrer Körper mit $K \in \mathbb{N}$ unilateralen Kontakten unter Berücksichtigung von Reibung. Dabei können starre polyedrische Objekte oder Objekte mit gekrümmter Oberfläche betrachtet werden. Zur Durchführung eines Zeitschrittes während der Integration der Bewegungsgleichungen berechnen wir die Kontaktimpulse mittels eines nichtlinearen Komplementaritätsproblems (NCP). Dabei ersetzen wir den Coulomb'schen Reibungskegel durch eine facettierte Reibungspyramide mit $\eta \in \mathbb{N}$ Facetten und linearisieren zudem die Distanzfunktion für jeden Kontaktpunkt. So transformieren wir das ursprüngliche NCP in ein lineares Komplementaritätsproblem (LCP), wie in [15] angedacht. Unter Verwendung einer Fixpunktiteration konvergieren die aus dem LCP resultierenden Kontaktimpulse schnell gegen die erwünschte Lösung für das NCP. Zur Lösung des LCP wird der klassische Lemke-Algorithmus verwendet. Das lineare Komplementaritätsproblem hat die Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})^T \mathbf{x} \geq 0 \quad (1)$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(\eta+2)K \times (\eta+2)K}$. \mathbf{A} ist copositiv ($\forall \mathbf{z} \geq \mathbf{0} : \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} \geq 0, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(\eta+2)K}$) und aus diesem Grunde entfallen zur Lösung des LCP fast alle bekannten, zum Großteil numerischen Verfahren, da diese in der Regel positiv definite Matrizen \mathbf{A} erwarten. Die Dimension der Matrix \mathbf{A} wird bestimmt durch die Approximationsgüte der Reibung und die Anzahl der Kontaktpunkte. Die gefundene zulässige Lösung des LCP gibt für jeden Kontaktpunkt die Kontaktkraft und das Kontaktdrehmoment an. Erwähnenswert ist, daß diese LCP-Vorgehensweise nicht die Standard-LCP-Formulierung (z.B. [2]) mit ihren Nachteilen ist, die auf einem Komplementaritätsverhältnis zwischen den Beschleunigungen der

Kontaktpunkte in Normalenrichtung und den resultierenden Kontaktkräften beruht. Wir haben hier ein komplizierteres Komplementaritätsverhältnis zwischen den zwei ursprünglich nichtlinearen Beschränkungen der Coulomb'schen Reibung und der geometrischen Kontaktbedingung vorliegen. Diese Komplementarität muß an jedem Kontaktpunkt erfüllt sein. Die geometrische Kontaktbedingung beschreibt für jedes Objekt die frei einnehmbaren Positionen und Orientierungen in der virtuellen Szene bezüglich des aktuellen Kontaktobjektes.

Als eines der Ergebnisse der durchgeführten Evaluationsbeispiele ergab sich die Notwendigkeit einer einfachen Approximation von Rollreibung.

4 Ein Evaluierungsbeispiel aus der klassischen Mechanik

„HOHER SINN LIEGT OFT IM KIND'SCHEN SPIEL.“
Schiller, „Thekla“



Bild 6: Bohr und Pauli

Bereits die Simulation der Mechanik einfacher Objekte kann insbesondere im Hinblick auf physikalische Güte eine schwierige Aufgabe darstellen. Ein sehr berühmtes Beispiel dafür ist der Stehaufkreisel. Bei langsamer Drehung scheint er stabil zu sein, gibt man ihm aber einen höheren Spin, so richtet er sich auf und dreht sich auf seinem Stil. Grob gesprochen ist die Reibung an dem jeweiligen Kontaktpunkt von Kreisel und Auflageebene der Grund für dieses kuriose Verhalten, das bereits N. Bohr und W. Pauli in seinen Bann gezogen hat (Bild 6). Zum Zeitpunkt ihres Staunes wurde das Verhalten des Kreisels allerdings noch nicht verstanden und die Ursache für sein überraschendes Verhalten war strittig.

Cohen [4] beschreibt die Faszination dieses Spielzeugs sehr treffend mit den Worten: „Der Stehaufkreisel stellt die Art von in der Physik reichlich vorhandenen Problemen dar, für die eine einfache physikalische Analyse die grundlegenden Prinzipien offenlegt. Für die aber eine detaillierte und strenge Lösung (die die Verwendung von Rechenmaschinen erfordern kann) notwendig ist, um die Analyse zu bestätigen.“. In den fünfziger Jahren gab es erste ernstzunehmende Versuche in dieser

Richtung. Die beste bisherige Arbeit stammt von Kane und Levinson [7]. Sie haben aber, wie alle anderen Autoren vor ihnen, nur das Verhalten einer Kugel mit exzentrischem Massezentrum betrachtet und zudem die auf die spezielle Geometrie abgestimmten Bewegungsgleichungen integriert. Eine allgemeine Starrkörpersimulation in unserem Sinne

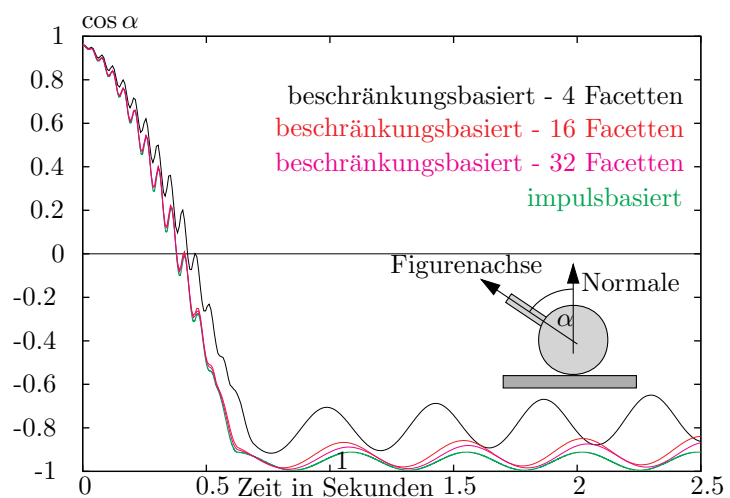


Bild 7: Figurenachsenbewegung

wurde noch nicht durchgeführt. Auch waren bisherige Simulationsergebnisse aufgrund falscher Reibungsmodellierung teilweise nicht korrekt. Mit den beiden oben skizzierten Techniken konnten wir den Umdreheffekt simulieren und erhielten bezüglich der protokollierten physikalischen und geometrischen Werte der Bewegung nur unwesentlich differierende Kurven. Dabei hat sich die Linearisierung des Reibungskegels im Falle der beschränkungsbasierten Simulation mit nur wenigen Facetten bereits als ausreichend gezeigt. Die Reibungspyramide benötigt mindestens vier Facetten, hat sie acht Facetten, so ändern sich bei Erhöhung der Facettenanzahl die Meßkurven nur noch in unbedeutender Weise. In Bild 7 ist der Kosinus des Winkels α zwischen der Figurenachse des Kreisels und der Normale der Auflageebene aufgetragen. Bild 8 zeigt die auftretenden Kontaktimpulse (in Normalen- und Tangentialrichtung der Auflageebene) während der Simulation. Zum Zeitpunkt $t = 0.6$ ungefähr findet der Wechsel von Kontaktpunkt 1 zu Kontaktpunkt 2 statt und der Kreisel steht auf. In der zweidimensionalen Schemazeichnung des Kreisels sind die zwei Kontaktpunkte, die nur kurzzeitig beide bestehen, und die entsprechenden Kontaktimpulse angedeutet. Beide Simulationen haben die Echtzeitanforderungen voll erfüllt. Wir haben weitere Simulationen aus dem Bereich der klassischen Mechanik durchgeführt und anhand ihrer unsere Ansätze verbessert und erweitert [13]. Dabei wurde unter anderem auch das Verhalten des Keltischen Wackelsteins simuliert.

5 Zukünftige Arbeit: Verknüpfung der beiden Ansätze

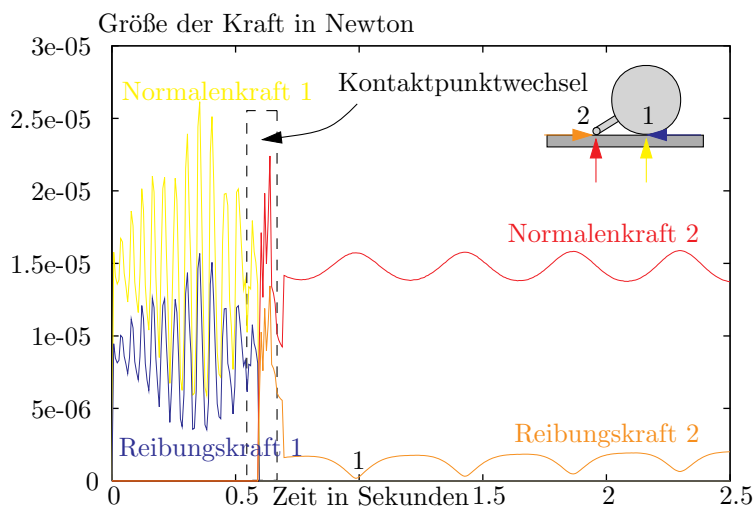


Bild 8: Kontaktimpulse

basierten Simulation (und umgekehrt) zu realisieren. Der Übergang von impuls- zu beschränkungsbasierter Simulation wird durch die Größe der Impulse und den zeitlichen Abstand zwischen zwei Kollisionen gesteuert, der umgekehrte Übergang durch eine abrupte Änderung der Kontaktkraft in Normalenrichtung der Auflagefläche. Hier spielt allerdings auch das Zusammenspiel mit der Echtzeit-Kollisionserkennung eine entscheidende Rolle beim Feststellen von Beschränkungswechseln.

Bisher wurden für beide Ansätze prototypische Implementierungen vorgenommen. Anhand dieser konnten die Verfahren unter anderem an obigen Beispielen aus der klassischen Mechanik evaluiert werden. Dabei gewonnene Erkenntnisse haben zur Verbesserung und zur Verallgemeinerung der Ansätze geführt. Die verbleibende Aufgabe ist nun, die Prototypen zu verallgemeinern und dann den Übergang von der impulsbasierten Simulation zur beschränkungsbasierten Simulation zu realisieren.

Literatur

- [1] D. Baraff, Coping with friction for non-penetrating rigid body simulation, *ACM Conference on Computer Graphics*, 1991
- [2] D. Baraff, Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies, *ACM Conference on Computer Graphics*, 1994
- [3] A. Chatterjee, Rigid body collisions: some general considerations, new collision laws, and some experimental data, *Ph.D.-thesis*, Cornell, 1997
- [4] R. J. Cohen, The tippe top revisited, *American Journal of Physics*, 1977
- [5] J. K. Hahn, Realistic animation of rigid bodies, *ACM Conference on Computer Graphics*, 1988
- [6] J. B. Keller, Impact with friction, *Journal of Applied Mechanics*, 1986
- [7] T. R. Kane, D. A. Levinson, A realistic solution of the symmetric top problem, *Journal of Applied Mechanics*, 1978
- [8] B. Mirtich, Impulse-based rigid body simulation, *Ph.D.-thesis*, Berkeley, 1996
- [9] J. J. Moreau, Frottement, adhésion, lubrification, *Comptes Rendus, Serie II*, 1986
- [10] M. D. P. Monteiro-Marques, Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: shocks and dry friction, *Vol. 9 of Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Application*, Birkhäuser-Verlag, 1993
- [11] W. J. Stronge, Rigid body collisions with friction, *Proceedings of the Royal Society in London*, 1990
- [12] J. Sauer, E. Schömer, A constraint-based approach to rigid body dynamics for virtual reality applications, *erscheint in Proceedings von ACM Conference on Virtual Reality Software and Technology (VRST'98)*, 1998
- [13] J. Sauer, E. Schömer, C. Lennerz, Real-time rigid body simulations of some 'classical mechanics toys', *eingereicht bei SCS European Simulation Symposium (ESS'98)*, 1998
- [14] J. Sauer, E. Schömer, A hybrid rigid body simulation system for virtual reality applications, *Technischer Bericht in Vorbereitung, Fachbereich Informatik, Universität des Saarlandes*, 1998
- [15] D. E. Stewart, J. C. Trinkle, An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1995