Emmy Noether und ihre Bedeutung für die moderne Mathematik

Stefan Müller-Stach, Johannes Gutenberg Universität Mainz

Dieser Text ist die Ausarbeitung eines Grußwortes anlässlich einer Aufführung des Theaterstücks „Mathematische Spaziergänge mit Emmy Noether" an der Johannes Gutenberg Universität Mainz durch das Portraittheater Wien. Darin wurde die Wirkung von Emmy Noether und ihrer Schule insbesondere für die Bereiche Algebra, Topologie, Zahlentheorie und Algebraische Geometrie in der Mathematik herausgehoben. Es war spannend zu sehen, wie das Theaterstück die wesentlichen wissenschaftlichen Arbeiten von Emmy Noether aufgegriffen hat und dabei gleichzeitig tiefgründig und unterhaltsam geblieben ist.

Die Bedeutung von Emmy Noether als Mathematikerin wird eigentlich erst heute in angemessener Weise wahrgenommen, auch wenn es Menschen wie den Göttinger Mathematiker David Hilbert (1862-1943) gab, die das sofort gesehen haben. „Meine Herren, eine Universität ist doch keine Badeanstalt!" lautete sinngemäß der berühmte Ausspruch Hilberts im Jahre 1915 während einer Diskussion über das Habilitationsgesuch von Emmy Noether. Hilbert war auch der einzige unter den Kollegen in den Sitzungen für den das Gesuch kein Ausnahmetatbestand war und der sich in seinem Gutachten auf die Mathematik beschränkte. Noether ist als Mathematikerin wesentlich bedeutender als viele andere, die diesen Ausspruch von Hilbert hervorgerufen haben und sie zählt damit zur höchsten wissenschaftlichen Kategorie. Ihr Einfluss durch ihre Werke und ihre Schüler reicht bis in die heutige Zeit.

Bereits Emmy Noethers Vater Max Noether (1844-1921) war ein einflussreicher Mathematiker. Er war viele Jahre lang Mitherausgeber der Mathematischen Annalen, der damals bedeutendsten Zeitschrift des Faches, und im Jahre 1899 Präsident der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Auf ihn gehen einige bedeutende Theoreme, wie das AF+BG Theorem im Zusammenhang mit ebenen Kurven, zurück. In den Gebieten, die aus seiner Mathematik hervorgingen, insbesondere in der Komplexen Analysis und der Algebraischen Geometrie, hatte Max Noether einen nennenswerten Einfluss. So gibt es ein nach ihm benanntes „Max Noether Theorem" in der Hodgetheorie der einflußreichen amerikanischen Schule um Phillip Griffiths (geb. 1938) und das damit zusammenhängende Noether-Lefschetz

Theorem, die sich beide mit Kohomologieklassen von Divisoren auf Flächen und höherdimensionalen Varietäten beschäftigen. Außerdem ist sein Name mit der enorm einflussreichen Brill-Noether Theorie verbunden, die sich in ihrer klassischen Variante mit Divisoren und der Dimension ihrer Linearsysteme auf algebraischen Kurven beschäftigt. Obwohl diese Resultate wichtig für die Algebraische Geometrie waren, ist der Einfluss von Max Noether jedoch im Vergleich zu seiner Tochter aus heutiger Sicht zu vernachlässigen. Emmy Noethers Bruder Franz (1884-1941) war ebenfalls Mathematiker, der an der Entdeckung der Fredholmoperatoren, einem wichtigen Konzept der Funktionalanalysis, maßgeblich beteiligt war. Er starb 1941 in der Sowjetunion durch Erschießung wegen mutmaßlichen Landesverrats und wurde erst 1988 rehabilitiert.

Emmy Noether begann ihr Studium ab 1903 in Erlangen, was damals für Frauen gerade erst möglich geworden war. Die Promotion erlangte sie 1907 bei Paul Gordan (1837-1912), einem angesehenen Invariantentheoretiker. Emmy Noether war somit eine der ersten Frauen, die eine akademische Karriere in einer typischen – wenn auch begrenzten - Weise beginnen konnte. Obwohl sie 1919 schließlich habilitieren durfte, erhielt sie in Deutschland bis 1933 keine ordentliche Professur, was ihrer Bedeutung in keiner Weise gerecht wurde.

Ab 1915 ging Emmy Noether nach Göttingen, um u.a. bei Felix Klein (1849-1925) und David Hilbert zu arbeiten. Göttingen war zu dieser Zeit der Nabel der Welt in der Mathematik und Physik. Die Nationalsozialisten haben die akademische Exzellenz in Göttingen und in Deutschland nachhaltig als Ganzes zerstört, indem sie das gesamte jüdische Personal entweder vernichteten oder vorher schon zur Ausreise zwangen.[1]

In diesem Text geht es in erster Linie um die Denkweise von Emmy Noether und wie sich ihre Ideen in ihrem internationalen wissenschaftlichen Netzwerk fortgepflanzt haben. Was waren die Charakteristika ihres mathematischen Denkens? Noether hat im Gegensatz zu den meisten ihrer Zeitgenossen überwiegend in abstrakten mathematischen Begriffen und Strukturen gedacht und hat den Ausdruck „Begriff" in der Mathematik etabliert. Viele wichtige Sätze und Definitionen sind nach ihr benannt. Wir wollen einige ausgewählte Leistungen besprechen und ihren Zusammenhang mit heutiger mathematischer Forschung in der Algebra, der Topologie, sowie der Arithmetischen und Algebraischen Geometrie darlegen. Alle hier zitierten Publikationen von Emmy Noether sind in ihren gesammelten Werken [Noether1983] enthalten.

Da der folgende Text kein Fachartikel ist und daher nicht allzu sehr auf die historischen Details eingeht, verweisen wir zu diesen Aspekten auf die Literatur.[2] Andere Beiträge in diesem Band werden solche Aspekte wesentlich fachkundiger beleuchten. Die Intention hier ist die Betonung auf der

---

1 Zur Bedeutung von Göttingen als mathematisches Zentrum siehe [Rowe2018].
2 Vgl. [KoreuberTobies2002], [Koreuber2015], [Rowe2018] und andere.

Wirkung, die Emmy Noether durch ihre eigenen Arbeiten und ihre Schule erzielt hat. Auch in dieser Hinsicht erhebt dieser Text aus offensichtlichen Gründen keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit und basiert auf Ansichten des Autors.

Der Beginn der abstrakten Algebra

Emmy Noether hat in ihrer Doktorarbeit und auch noch zu Anfang ihrer Göttinger Zeit in der Invariantentheorie gearbeitet. Dieses Gebiet wurde vor 1900 in Deutschland in erster Linie durch Paul Gordan repräsentiert. David Hilbert konnte um 1890 die beispielorientierte Gordansche Invariantentheorie entscheidend weiterentwickeln. Er bewies einen fundamentalen Endlichkeitssatz, den sogenannten Hilbertschen Basissatz, und erledigte damit in gewisser Weise die wichtigsten offenen Probleme der Invariantentheorie auf einen Schlag. Hilberts Basissatz besagt in heutiger Formulierung, dass der Polynomring in endlich vielen Unbekannten über einem Körper (oder einem Noetherschen Ring) ein Noetherscher Ring ist. Dies bedeutet, dass jedes Ideal in einem solchen Polynomring endlich erzeugt ist.

Emmy Noether hat die klassische Invariantentheorie in Form der Theorie der Differenzialinvarianten nochmals erweitert, welche besonders interessant für die mathematische Physik sind. Der in diesem Zusammenhang bekannteste Satz von ihr, oft auch Noethers Theorem genannt, ist die Aussage, dass jedwede Symmetrie einer Liegruppe G in einem physikalischen Variationsproblem stets einer gewissen Erhaltungsgröße entspricht. Zum Beispiel ist die Energie eine Erhaltungsgröße der Zeitinvarianz, der Impuls eine Erhaltungsgröße der räumlichen Homogenität und der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße der Rotationsinvarianz.

Nach der (Differenzial-)Invariantentheorie hat Noether sich der Algebra und Idealtheorie zugewandt. In der Arbeit „Idealtheorie in Ringbereichen“ von 1921 hat sie die Grundlagen der Algebra in einem Sinne gelegt, wie wir die Algebra heute kennen. Der wichtige Begriff des Noetherschen Rings (bzw. eines Noetherschen Moduls) geht als Definition auf diese Arbeit zurück. Darin wird gezeigt, dass zwei Bedingungen an einen (Links-)Modul M über einem unitären Ring R äquivalent sind: (1) Jeder R-Untermodul von M ist endlich erzeugt und (2) alle aufsteigenden Ketten von Untermoduln in M werden nach endlich vielen Schritten stationär. Die resultierende Eigenschaft wird auch häufig Teilerkettensatz genannt. Ein Modul M wird Noethersch genannt, falls diese äquivalenten Eigenschaften erfüllt sind. Untermoduln eines Ringes sind genau die Ideale, deshalb ist ein Ring R Noethersch genau dann, wenn jedes Ideal I in R endlich erzeugt ist.

Eine von Noethers wichtigsten Leistungen war die Einsicht, dass die Noethersche Eigenschaft auch für andere Klassen von Ringen abseits der Polynomringe gilt, wie zum Beispiel für die sogenannten

Dedekindringe. Diese Ringe sind nach dem Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind (1831-1916) benannt, der – neben vielen anderen Leistungen - die algebraische Zahlentheorie begründete. Dedekindringe sind Noethersche, ganz-abgeschlossene Integritätsbereiche der Dimension eins, d.h. in denen alle Primideale ungleich dem Nullideal bereits maximal sind. Beispiele dafür sind die Ringe ganzer algebraischer Zahlen in einem Zahlkörper K. Die Theorie der Dedekindringe entwickelte Noether in der Arbeit „Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern“. Bemerkenswert ist dabei, dass auch der Funktionenkörperfall, d.h. der Fall von Funktionenkörpern von Varietäten über endlichen Körpern, auf uniforme Weise mitbehandelt wird. Die Verzweigungstheorie algebraischer Zahlkörper konnte Noether mit Hilfe der Diskriminanten(ideale) in der späteren Arbeit „Idealdifferentiation und Differente“ von 1950 weiterentwickeln. Diese Arbeiten sind so allgemein, dass sie sich leicht, in der Sprache der Garben[3], auf globale Objekte der Algebraischen Geometrie verallgemeinern lassen.

Die Noethersche Bedingung ist eine Endlichkeitsbedingung für Ringe, ähnlich wie der Begriff der Kompaktheit für topologische Räume. Diese Bedingung ist so essenziell, dass sie in den meisten Artikeln zur kommutativen Algebra und der Algebraischen Geometrie vorkommt und auch eine geometrische Variante besitzt, die besagt, dass absteigende Ketten von abgeschlossenen Teilmengen in der Zariskitopologie[4] nach endlich vielen Schritten stationär werden. Als Folge kann man beweisen, dass jede Zariski abgeschlossene Teilmenge endlich irreduzible Komponenten besitzt.

In der Algebraischen Geometrie ist ein affines Spektrum[5] Spec(R) genau dann ein Noetherscher Raum in der Zariskitopologie, wenn R ein Noetherscher Ring ist. In Spec(R) ist eine Teilmenge Zariski abgeschlossen, wenn sie aus den Primidealen besteht, die ein festes Ideal I enthalten.

Emanuel Lasker (1868-1941), der Mathematiker und Schachweltmeister, hat sich mit nicht notwendig reduzierten Polynomidealen beschäftigt und 1905 zuerst einen Satz bewiesen, der heute Satz von Lasker-Noether genannt wird. Dieser besagt, dass beliebige (echte) Ideale in einem Noetherschen Ring eine Primärzerlegung besitzen, d.h. jedes Ideal ist Durchschnitt von sogenannten Primäridealen, die Primideale verallgemeinern. Emmy Noether hat diesen Satz erneut und mit abstrakteren Methoden in der Arbeit „Idealtheorie in Ringbereichen“ von 1921 bewiesen. Es war die Einsicht von Emmy Noether, dass der Satz von Lasker-Noether eine Konsequenz aus dem Teilerkettensatz ist. Der

---

3 Garben ordnen jeder offenen Menge des Raums eine Menge (ggf. mit Zusatzstruktur) zu, so dass gewisse Axiome erfüllt sind. Insbesondere ist die Zuordnung eine Prägarbe, d.h. ein Funktor von der Kategorie der offenen Mengen des Raums in die Kategorie der Mengen (mit Zusatzstruktur). Die Strukturgarbe beinhaltet die Funktionen auf einem Raum und ist die grundlegenste, aber wichtigste Garbe auf dem Raum.

4 Oskar Zariski (1899-1986) war ein amerikanischer Mathematiker aus der italienischen Schule, auf den die Zariskitopologie zurückgeht.

5 Der Name Spektrum wurde von Alexander Grothendieck (1928-2014) geprägt, der zu Anfang seiner Karriere in der Funktionalanalysis arbeitete. Die Räume Spec(R) bestehen aus den Primidealen in R. Tatsächlich kann man die Punkte des affinen Spektrums, die aus den maximalen Primidealen bestehen, als die Nullstellen von genau den Funktionen in R auffassen, die in dem zugehörigen maximalen Ideal liegen. Damit ergibt sich eine Analogie zum Satz von Gelfand-Neumark in der Funktionalanalysis.

Originalbeweis von Lasker von 1905 erfolgte mit polynomialen Methoden der Eliminationstheorie.

Der Noethersche Normalisierungssatz (auch Normalisierungslemma genannt) stammt ebenfalls von Emmy Noether und ist ein nützliches beweistechnisches Hilfsmittel. Er besagt, dass eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper immer endlich als Modul[6] über einem Polynomring mit d Unbekannten ist für eine gewisse Zahl d. Dies bedeutet geometrisch, dass man jede affine Varietät X=Spec(A) im n-dimensionalen affinen Raum mit einer endlichen Projektionsabbildung (d.h. mit endlichen Fasern) auf den d-dimensionalen affinen Raum versehen kann.

Dieser Satz hat zahlreiche Anwendungen. Emmy Noether hat den Normalisierungssatz oft selbst in Beweisen verwendet. So folgt daraus eine Definition der Dimension von X durch die Zahl d und man kann die Dimensionstheorie (Krulldimension) algebraischer Varietäten entwickeln. Weiterhin kann man Hilberts Nullstellensatz damit recht schnell beweisen.

Topologie, Homologische Algebra und Bettizahlen

Jean Dieudonne (1906-1992), einer der wichtigsten Vertreter der französischen Bourbaki Gruppe[7], hat in einem Artikel den Einfluss von Emmy Noether auf die Topologie beschrieben [Dieudonne1984]. Noether selbst unterstrich stets die Wichtigkeit der Betrachtung der Homologiegruppen von Kettenkomplexen statt der alleinigen Berechnung von Bettizahlen, die nur den Rang der Homologiegruppen beschreiben. Die Homologiegruppen erfüllen funktorielle Eigenschaften bezüglich stetiger Abbildungen und tragen viel mehr Information als die Bettizahlen selbst, denn sie enthalten auch einen Torsionsanteil, der aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen rührt. Beim Beweis der Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel durch Heinz Hopf (1894-1971) im Jahr 1928 hat diese Denkweise, die auf Noether zurückgeht, entscheidende Vorteile bewirkt und Noether wird im Vorwort erwähnt [Hopf1928]. Auf Hopf und seine weitreichende Schule gehen viele weitere wichtige Resultate der Topologie zurück.

Noether war mit Pawel Alexandrow (1896-1982), einem bedeutenden sowjetischen Topologen, seit dessen Göttinger Studienzeit 1923/24 befreundet. Sie besuchte ihn 1928/29 in Moskau und hielt dort eine Vorlesung über Algebra. Alexandrow schrieb einen Nachruf, der in Noethers gesammelten Werken [Noether1983] abgedruckt ist. Er hat 1934 intensiv versucht, für Noether eine dauerhafte Professur in Moskau zu schaffen, was sie zugunsten der sichereren Option Bryn Mawr ablehnte.

Es gibt daneben diverse weitere Anekdoten über Emmy Noether, die beschreiben wie sie Kollegen in

6 Endliche Erzeugtheit als Modul ist eine viel stärkere Eigenschaft als endliche Erzeugtheit als Algebra.

7 Die Bourbaki Gruppe war ein 1934 gegründetes einflussreiches Autorenkollektiv, das eine Neubegründung der Mathematik durch seine Schriften erreichen wollte. Die Gründungsmitglieder waren Henri Cartan (1904-2008), Claude Chevalley (1909-1984), Jean Delsarte (1903-1968), René de Possel (1905-1974), Jean Dieudonné und Andre Weil (1906-1998). Weil und Chevalley haben übrigens in Göttingen u.a. bei Noether studiert.

der Topologie dazu bewegte, den begrifflichen algebraischen Standpunkt einzunehmen. Alexandrow und auch Hopf hatte sie jedenfalls erfolgreich davon überzeugt. Durch diese Sichtweise trug Noether entscheidend zur Algebraisierung der Topologie bei. Diese Entwicklung hat sich bis heute fortgesetzt, denn die moderne Algebraische Topologie und Homotopietheorie benutzt intensiv algebraische Methoden, insbesondere in Form von Homologischer Algebra und Kategorientheorie, wie wir bereits erwähnt haben. Mehr zu den Leistungen Noethers in der Topologie findet man in dem Aufsatz [Hirzebruch1999] des bedeutenden deutschen Mathematikers Friedrich Hirzebruch (1927-2012).

Galoistheorie und Zahlentheorie

Noether hat auch in anderen Bereichen der Algebra wie der Galoistheorie[8] und der Zahlentheorie Maßstäbe gesetzt. So trug sie 1918 in der Arbeit „Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe" zum sogenannten Umkehrproblem der Galoistheorie bei, indem sie eine mögliche Strategie für die Existenz von Galoiserweiterungen der rationalen Zahlen entwickelte, die eine beliebige vorgegebene Galoisgruppe G realisieren. Noethers Strategie hat sich als nicht durchführbar herausgestellt, denn Richard Swan (geb. 1933) hat viel später ein Gegenbeispiel konstruiert. Bis heute ist das Umkehrproblem der Galoistheorie über festen Grundkörpern in Charakteristik Null (zum Beispiel über den rationalen Zahlen) offen.

Emmy Noether hat auch wichtige Beiträge zur Klassenkörpertheorie in der Arbeit „Der Hauptgeschlechtsatz für relativ-galoische Zahlkörper" von 1943 geleistet, insbesondere im nichtabelschen Fall. In dieser Arbeit werden Methoden der nichtkommutativen Algebren auf Galoiserweiterungen angewandt. Besonders beeindruckend in dieser Arbeit ist die Formulierung und der Beweis des Satzes „Hilbert 90" für Ringe. Dieser Satz, der ursprünglich auf Eduard Kummer zurückgeht, ist benannt nach einem Satz mit der Nummer 90 aus Hilberts sogenanntem „Zahlbericht"[9] von 1897. Er besagt, dass die erste Galoiskohomologiegruppe mit Werten in der multiplikativen Gruppe einer Galoischen Körpererweiterung verschwindet. Noether beweist den Satz unter Verwendung ihrer eigenen Theorie der verschränkten Produkte und dem Satz von Noether-Skolem in einer elementaren Formulierung, da der Begriff Galoiskohomologie damals noch nicht verfügbar war.

Die Klassenkörpertheorie im abelschen Fall ist die Grundlage des noch offenen Langlandsprogramms, ein weitreichendes Arbeitsprogramm des kanadischen Mathematikers Robert Langlands (geb. 1936), auf das in heutiger Zeit viele wichtige Fragestellungen der Arithmetik ausgerichtet sind.

Emmy Noether war keine Zahlentheoretikerin im engeren Sinn. Sie hat sich jedoch in mehrfacher

---

8 Évariste Galois (1811-1832) war der Erfinder der Galoistheorie, der in ganz jungen Jahren in einem Duell starb.

9 Vgl. [Hilbert1897].

Weise mit der Zahlentheorie auseinandergesetzt. Durch ihre Untersuchungen der Dedekindringe, und etwas allgemeiner der Ordnungen in Ganzheitsringen algebraischer Zahlkörper, hat sie wesentliche Grundlagen der Algebraischen Zahlentheorie gelegt, wie wir sie heute kennen.

Darstellungstheorie und nichtkommutative Algebren

Noether hat in ihrer Arbeit „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie“ von 1929 die Anfänge der Darstellungstheorie von Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) weiterentwickelt und die Grundlagen für die Kategorie der G-Moduln für eine Gruppe G gelegt, die heute die Darstellungstheorie prägt. Hier spielen bereits Aspekte der Nichtkommutativität eine Rolle, da man sich nicht auf abelsche Gruppen beschränken muss. Natürliche Operationen auf Darstellungen und der Begriff der Zerlegung und der Irreduzibilität von Darstellungen wurden von ihr ausführlich studiert. Insbesondere bei endlichen und algebraischen Gruppen sowie in der Lietheorie wurde die Darstellungstheorie in der Folge enorm wichtig und hat in vielen anderen Gebieten Bedeutung erlangt. Die Allgemeinheit in der Noether arbeitete hat dazu geführt, dass die Darstellungstheorie und die Charaktertheorie in allgemeineren Situationen als in den Arbeiten von Frobenius möglich wurden. Darstellungskategorien und die damit verbundene (höhere) Kategorientheorie bilden die wichtigste Grundlage heutiger mathematischer Forschung in der Algebra.
Emmy Noether hat sich in einer Reihe von Arbeiten mit nichtkommutativen Algebren über Körpern befasst. Ihre wichtigste Arbeit dazu von 1933 trägt sogar den Titel „Nichtkommutative Algebren“. Darin betont sie zu Anfang, dass sie durch eine Verallgemeinerung der Galoistheorie zu diesem Thema kam. Allerdings geht die Arbeit weit über diese Analogie hinaus. Besonders bedeutend von heutigem Standpunkt ist die Behandlung der zentralen einfachen Algebren A über einem Körper F, die darin studiert werden. In der Regel, aber nicht immer, werden diese als endlich dimensional über F angenommen und werden in der etwas allgemeineren Situation über Ringen auch Azuyama-Algebren genannt. Diese Algebren bilden die Basis für die Definition der sogenannten Brauergruppe Br(F) und sind außerdem wichtig für viele moderne Gebiete der Mathematik, wie die motivische Homotopietheorie, die Theorie der Shimuravarietäten, das Langlandsprogramm, die Algebraische K-Theorie und viele weitere.
Eine zentrale einfache Algebra A über einem Körper F ist eine endlich dimensionale F-Algebra, deren Zentrum isomorph zu F ist und die keine nichttrivialen zweiseitigen Ideale besitzt. Solche Algebren sind nach einem Satz von Joseph Wedderburn (1882-1948) dadurch charakterisiert, dass sie über einer Körpererweiterung von F (dem sogenannten Zerfällungskörper) isomorph zu einer Matrixalgebra werden oder dadurch, dass sie isomorph zu einer Matrixalgebra über einer zentralen

Divisionsalgebra D sind. Divisionsalgebren – wie die Hamiltonschen Quaternionen - sind in der Regel nichtkommutative Verallgemeinerungen von Körpern, in denen alle von Null verschiedenen Elemente invertierbar sind. Thoralf Skolem (1887-1963) hat sich bereits 1927 mit solchen Strukturen beschäftigt und den sogenannten Satz von Skolem-Noether bewiesen, den Emmy Noether unabhängig davon wiederentdeckt hat. Dieser besagt, dass jeder Automorphismus einer zentralen einfachen Algebra A ein innerer Automorphismus ist, d.h. er ist gegeben durch Konjugation mit einem Element a der Algebra selbst.

Man kann für zentrale einfache Algebren ein sogenanntes Hasse-Prinzip beweisen, den Satz von Albert-Brauer-Hasse-Noether. Dieser besagt, dass eine zentrale einfache Algebra über einem Zahlkörper, die über jeder lokalen Komplettierung isomorph zu einer Matrixalgebra ist, selbst eine Matrixalgebra ist. Der Satz impliziert, dass jede zentrale einfache Algebra über einem Zahlkörper K zyklisch ist, d.h. durch eine explizite Konstruktion mittels einer zyklischen Erweiterung von K erhalten werden kann.

Hier einige Worte zur Erklärung dazu. In der Mathematik gibt es lokale und globale Körper. Zu den globalen Körpern gehören Zahlkörper und Funktionenkörper über endlichen Körpern. Zu den lokalen Körpern gehören die p-adischen Zahlkörper und die reellen und komplexen Zahlen. Bei der Komplettierung eines Zahlkörpers an den endlichen und unendlichen Stellen treten genau diese Arten lokaler Körper auf. Das sogenannte Hasse-Prinzip ist ein Lokal-Global-Prinzip, welches Aussagen für algebraische Objekte zwischen einem globalen Körper und seinen Komplettierungen vergleicht. Der Name geht auf Helmut Hasse (1898-1979) zurück, ein Zahlentheoretiker, der 1934 als Nachfolger von Herrmann Weyl nach Göttingen kam und mit Noether viele Briefe wechselte [LemmermeyerRoquette2006]. Das bekannteste Beispiel für das Hasse-Prinzip ist der Satz von Hasse-Minkowski. Dieser besagt, dass eine (homogene oder inhomogene) quadratische Form q mit ganzzahligen Koeffizienten genau dann eine nichttriviale Lösung über den rationalen Zahlen hat, wenn sie eine nichttriviale reelle Lösung besitzt und auch über jedem p-adischen Zahlkörper eine nichttriviale Lösung hat. Hermann Minkowski (1864-1909) war ein berühmter Göttinger Mathematiker, dessen Arbeiten einen großen Einfluss in der Zahlentheorie und in der Relativitätstheorie hatten.[10]

Der Satz von Albert-Brauer-Hasse-Noether wurde 1932 von Richard Brauer (1901-1977), Helmut Hasse, und Emmy Noether in der gemeinsamen Arbeit „Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren“ bewiesen und unabhängig davon von Abraham Adrian Albert (1905-1972). Die Publikationen von Peter Roquette (geb. 1927) und Mechthild Koreuber (geb. 1960) über die Geschichte dieses Satzes und die Beziehungen zwischen den beteiligten Personen sind äußerst

10 Minkowskis „Geometrie der Zahlen“ beinhaltet den wichtigen Gitterpunktsatz, der die Grundlage vieler Sätze über effektive Schranken der algebraischen Zahlentheorie ist. Sein Name ist auch mit der speziellen Relativitätstheorie verbunden.

lesenswert [Koreuber2015, Roquette2005].
Das Hasse-Prinzip ist ein zentraler Gegenstand heutiger Forschung in der Arithmetischen Geometrie. Im Teilgebiet der Diophantischen Geometrie werden ganzzahlige (und rationale) Lösungen polynomialer Gleichungen untersucht. Im Beispiel der quadratischen Gleichungen ist das Hasse-Prinzip durch den Satz von Hasse-Minkowski erfüllt. Welche Varietäten das Hasse-Prinzip erfüllen und welche nicht ist ein interessantes Problem und die Obstruktionen zum Hasse-Prinzip spielen eine bedeutende Rolle.

Emmy Noether und ihre Schülerinnen und Schüler

Emmy Noether hatte sehr viel Einfluss über ihre Schülerinnen und Schüler, die manchmal „Trabanten" oder „Noether-Knaben" genannt wurden, obwohl auch Frauen darunter waren.
Die erste Göttinger Doktorandin von Noether von 1925 war die als Persönlichkeit äußerst bemerkenswerte Grete Herrmann[11] (1901-1984), die über Ideale in Polynomringen und die damit zusammenhängende Komplexität von Algorithmen der Polynomalgebra promovierte. Ihr Hauptergebnis von 1925 impliziert, dass für ein Polynom f in einem Ideal I im Polynomring mit n Unbekannten die Koeffizienten einer algebraischen Linearkombination, die f mittels der endlich vielen Erzeuger von I ausdrückt, a priori einen Grad besitzen, der von doppelt exponentieller Größenordnung in den vorgegebenen Größen ist. Dieses Theorem besagt mit anderen Worten, dass die algorithmische Komplexität der Idealdarstellung durch Erzeuger in der Regel sehr hoch ist. Ernst Mayr und Albert Meyer haben 1982 konkrete Ideale gefunden, in denen diese hohe Schranke tatsächlich notwendig ist. Dies war ein bemerkenswertes und letztlich negatives Ergebnis, welches aber die Weitsichtigkeit von Noether und Herrmann eindrücklich beweist. Das Ergebnis von Herrmann und solche Beispiele haben jedoch nicht dazu geführt, dass die algorithmische Polynomalgebra nicht weiterverfolgt wurde, ganz im Gegenteil. Wolfgang Gröbner (1899-1980), ein Postdoktorand bei Emmy Noether in Göttingen und sein Schüler Bruno Buchberger (geb. 1942) entwickelten die Theorie der sogenannten Gröbnerbasen ab 1965 als weitreichende Verallgemeinerung des euklidischen Algorithmus. Die Theorie der Gröbnerbasen ist heute die wichtigste Grundlage vieler symbolischer Algorithmen in aktuellen Computeralgebrasystemen.
Bereits in Erlangen hatte Noether die Doktoranden Hans Falckenberg und Fritz Seidelmann mitbetreut. Der zweite eigene Doktorand war Heinrich Grell (mündliche Prüfung 1926). Danach folgten Werner Weber (1929), Jakob Levitzki (1929), Max Deuring (1930), Hans Fitting (1931), Ernst

11 Grete Herrmann hat sich insbesondere mit Quantenphysik, Philosophie und Pädagogik auseinandergesetzt und in diesen Gebieten einflussreich publiziert.

Witt (1933), dessen offizieller Betreuer Gustav Herglotz war, Chiungtze Tsen (1933), Otto Schilling (1934 in Marburg) und Ruth Stauffer (1935 in Bryn Mawr). In Bryn Mawr betreute Noether auch die Postdoktorandin Olga Taussky-Todd (1906-1995), die etwa zeitgleich mit ihr aus Göttingen in die USA ging und die später zusammen mit ihrem Mann, dem numerischen Mathematiker John Todd (1911-2007), an das Caltech in Pasadena wechselte und 1971 auch schließlich zur Professorin ernannt wurde.

Der bedeutendste Doktorand von Emmy Noether ist wohl Ernst Witt (1911-1991). Er war aber in gewisser Weise auch der seltsamste „Noether-Knabe", denn er lief zeitweise in SA-Uniform herum, als Emmy Noether schon nicht mehr Vorlesungen halten durfte. Seine Dissertation wurde von Gustav Herglotz (1881-1953) zu Ende betreut. Witt hat die Theorie der quadratischen Formen entscheidend geprägt. Zum Beispiel definierte er 1937 den Witt-Ring W(R) über einem Ring R als die Menge der stabilen Äquivalenzklassen von R-Moduln, die eine Struktur eines quadratischen Raums tragen, d.h. auf denen eine Bilinearform q gegeben ist. Witt hat auch den Ring der Wittvektoren $W_p(A)$ eines Rings A der Charakteristik p>0 konstruiert, der im Fall des endlichen Körpers mit p Elementen gerade mit den p-adischen ganzen Zahlen übereinstimmt. Auch der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt über universelle einhüllende Algebren von Liealgebren ist nach ihm mitbenannt. Die Wittschen Konstruktionen sind wichtig in der heutigen Algebraischen und Arithmetischen Geometrie und in der motivischen Homotopietheorie. Viele davon lassen sich als Garbenkonstruktionen verallgemeinern oder haben in der de Rham Kohomologie Einzug gehalten. Dadurch trugen sie zu einer fruchtbaren Forschung bei, die bis heute aktuell ist. In diesem Sinne war Witt sicherlich einer der einflussreichsten Noether-Knaben. Zu den einflussreicheren kann man auch Helmut Hasse, Wolfgang Krull (1899-1971) und den Niederländer Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996) zählen, die jedoch nicht Noethers Doktoranden waren. Über einige mathematische Beiträge des Zahlentheoretikers Helmut Hasse haben wir bereits gesprochen. Nach Krull sind die Krulldimension von Ringen, die Krulltopologie und der Krullsche Hauptidealsatz benannt.

Van der Waerden spielte im Leben von Noether eine besondere Rolle. Er entwickelte die Algebraische Geometrie weiter und ist der Autor des berühmten zweibändigen Buches „Moderne Algebra" von 1930, das viele Ideen von Emil Artin[12] (1898-1962) und Emmy Noether enthält. Nicht zuletzt über seinen Schüler Wei-Liang Chow (1911-1995) hat van der Waerden Einfluss in der amerikanischen Mathematik nach dem zweiten Weltkrieg gehabt.

Van der Waerden hat oft einen Ausspruch von Emmy Noether zitiert: „Es steht alles schon bei Dedekind". Natürlich stand nicht schon alles bei Dedekind, aber Richard Dedekind war in vielerlei Hinsicht ein großes Vorbild von Emmy Noether. Sie kannte seine Arbeiten gut und hatte mit Robert Fricke (1861-1930) und Øystein Ore (1899-1968) die gesammelten Werke von Richard Dedekind

12 Emil Artin ist ein sehr bedeutender österreichischer Algebraiker und Zahlentheoretiker. Er erhielt 1932 zusammen mit Emmy Noether den Ackermann-Teubner Gedächtnispreis für das Lebenswerk.

(Vieweg Verlag 1932) herausgegeben. In zahlreichen wertvollen Kommentaren zu den Dedekindschen Texten hat sie bei der Herausgabe der Werke eine große Leistung bewiesen. Besonders geliebt hatte sie das berühmte (zehnte) Supplement Dedekinds zur Vorlesung von Gustav Lejeune Dirchlet (1805-1859) über Zahlentheorie, das als Begründung der Algebraischen Zahlentheorie gilt. Es ist u.a. dieses Supplement, auf das Noether so oft rekurrierte, wenn sie davon sprach, dass alles bei Dedekind stünde. Dedekinds visionäre und für damalige Verhältnisse reichlich abstrakte Behandlung der Algebraischen Zahlentheorie war der Zeit weit voraus und wurde letztlich erst durch Hilbert, Noether und wenige andere erst vollständig verstanden. Auf diese Weise hat durch die Person Emmy Noethers als Vermittlerin die abstrakte, begriffliche, strukturelle Methode Einzug gehalten in die moderne Algebra, Zahlentheorie und Algebraische Geometrie. Damit nahm sie Alexander Grothendieck und andere im 20. Jahrhundert vorweg. Ich denke, dass diese Leistungen und der Einfluss von Emmy Noether heute noch viel besser als kurz nach ihrem Tod bewertet werden können, denn die Gebiete, auf die sie am meisten Einfluss hatte, haben sich enorm weiterentwickelt und enthalten bis heute an entscheidenden Stellen die Ideen von Noether.
Die Doktoranden Jakob Levitzki (1904-1956), Max Deuring (1907-1984), Hans Fitting (1906-1938) und Chiungtze Chiung Tsen (1898-1940), eigentlich korrekter geschrieben als Zeng Jiongzhi, haben ebenfalls bekannte Resultate erzielt. Levitzki bewies einige bedeutende Sätze wie den Satz von Hopkins-Levitzki und das Amitsur-Levitzki Theorem. Fitting war früh gestorben und wurde durch seine Arbeiten zu endlichen Gruppen und durch die Bezeichnungen Fitting-Ideal und Fitting-Untergruppe am meisten bekannt. Deuring hat in der Algebra, im Gebiet der Funktionenkörper und in der Zahlentheorie gewirkt und Resultate zur komplexen Multiplikation und zum Klassenzahlproblem beigetragen. Tsen ist durch das Tsen-Theorem aus der Algebraischen Geometrie bekannt, welches die Existenz von Schnitten in Regelflächen über algebraischen Kurven über algebraisch abgeschlossenen Körpern zeigt und eine Aussage über den Funktionenkörper von gewissen algebraischen Kurven ist, die viele Anwendungen besitzt. So hat der amerikanische Mathematiker Serge Lang (1927-2005) diesen Satz 1951 in seiner Dissertation wiederentdeckt, mit der Brauergruppe von Funktionenkörpern in Verbindung gebracht, und später zur Grundlage einer ganzen Theorie gemacht. Tsen hat an chinesischen Universitäten, an denen er bis 1940 leider nur kurze Zeit wirkte, das Buch „Moderne Algebra“ von van der Waerden für Vorlesungen benutzt und damit die Ideen von Emmy Noether nach China gebracht.

Noethers Spuren in der modernen Mathematik

Wir wollen einige Beispiele dafür geben, welche direkte oder indirekte Wirkung Emmy Noether auf die zeitgenössische Mathematik hatte, indem wir aufzeigen, welche Richtung die Mathematik in der Zeit nach Emmy Noether eingeschlagen hat.

Die Algebra beschäftigt sich mit algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringen, Körpern und Moduln und daraus abgeleiteten Strukturen. Emmy Noether hatte zu Anfang ihrer Karriere mit dem Begriff des Noetherschen Rings (oder Moduls) de facto einen Begriff geschaffen, der bisherige Begriffe generalisierte und nicht an die Polynomalgebra gebunden war. Dieser Schritt gilt als Anfang der abstrakten modernen Algebra, die algebraische Objekte aufgrund ihrer Struktur untersucht und unabhängig von ihren häufigsten Kontexten. Sie hat auch als erste die korrekten Definitionen für algebraische Strukturen wie Ringe, Tensorprodukte und Darstellungen in heutiger Weise zur Verfügung gehabt.

Die Algebra ist bis in die heutige Zeit ein zentrales Gebiet der Mathematik, weil sie so vielen anderen Strukturen und Anwendungen zugrunde liegt. Viele Grundbegriffe der Algebra und ihrer innermathematischen Anwendungen finden sich größtenteils in Form der Gruppentheorie, der Darstellungstheorie und der sogenannten Homologischen Algebra wieder. Die Gruppentheorie selbst wurde durch die Klassifikation der endlichen, einfachen Gruppen durch Daniel Gorenstein (1923-1992) und andere Kollegen zu einem gewissen Abschluss gebracht. Jedoch hat die Darstellungstheorie von Gruppen, die sich auch durch Arbeiten von Emmy Noether entfaltete, ein davon recht unabhängiges Eigenleben erhalten, das sie heute vielleicht zum wichtigsten Teil der Algebra macht.

Kategorielle Methoden spielen dabei eine wesentliche Rolle, wie auch in vielen anderen Gebieten der Algebra. Kategorien sind der Inbegriff des strukturellen Denkens in der Mathematik, weil ihre Objekte nur durch ihre Eigenschaften und ihre strukturerhaltenden Abbildungen leben. Kategorientheorie kann sogar, ähnlich wie die Typentheorie, als Grundlage der Mathematik ohne die Verwendung der Mengenlehre eingeführt werden.

Die wichtigste Kategorie in diesem Zusammenhang ist die Kategorie der Darstellungen einer Gruppe G in Automorphismen von Vektorräumen über einem Körper. Eine der wichtigsten Entwicklungen war dabei der Tannakaformalismus[13], der jeder Tensorkategorie mit Dualität eine Tannakagruppe G zuordnet, die diese Kategorie als Kategorie von G-Moduln für eine bestimmte (i.A. proalgebraische) Gruppe G darstellen. Der Tannakaformalismus ist ein Wiedererkennungsprinzip, denn für eine Darstellungskategorie einer algebraischen Gruppe G erhält man G selbst als Tannakagruppe. Es gibt diverse nützliche Verallgemeinerungen des Konzepts der Tannakakategorien. Zudem hat sich der Zusammenhang zwischen Darstellungstheorie und Garbentheorie als fruchtbar herausgestellt, zum Beispiel im Umkreis der Kaszdan-Lusztig-Vermutung.

Emmy Noether hat sich in der Topologie mit Homologiegruppen auseinandergesetzt, wie wir gesehen

13 Benannt nach Tadao Tannaka (1908-1986), der vorwiegend kompakte topologische Gruppen untersuchte und sie durch ihre Darstellungen rekonstruieren wollte. Wir haben diese Aussage hier im algebraischen Fall formuliert.

haben. Die von Noether betrachteten Homologiegruppen kann man als Funktoren von der Kategorie topologischer Räume in die Kategorie der (abelschen) Gruppen begreifen. Noch etwas allgemeiner kann man statt den Homologiegruppen die Kategorie der Kettenkomplexe betrachten, die die Homologie berechnen und erhält in heutiger Sprache einen Funktor von topologischen Räumen in die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen.

Auch in der Topologie sind Kategorien als Sprache heute ebenfalls nicht mehr wegzudenken. In der zeitgenössischen Topologie bilden neben Homologie- und Kohomologietheorien die Modellkategorien von Daniel Quillen (1940-2011) wichtige Hilfsmittel, um insbesondere den Homotopietyp von topologischen Räumen zu untersuchen. Dabei werden die Räume durch Kategorien von Objekten wie Kettenkomplexe, Spektra oder simpliziale Mengen und dgl. ersetzt, die man sich als verallgemeinerte Räume vorstellen kann. Die Methode der sogenannten höheren Kategorien verallgemeinert diese radikale Denkweise noch weiter hin zu Situationen, bei denen gewisse Abbildungen und Rechenregeln nur noch modulo Äquivalenzen definiert sind.

Viele kategorielle Konstruktionen gehen auf Alexander Grothendieck[14] zurück. Die eigentliche Einführung von Kategorien geschah jedoch schon etwas früher durch eine Arbeit von Saunders MacLane (1909-2005) und Samuel Eilenberg (1913-1998) von 1945, die Kategorien im Rahmen von topologischen Überlegungen benötigten.[15]

Warum betonen wir diesen kategoriellen Aspekt so? Das Gebiet der Kategorientheorie entstand zwar nach Emmy Noethers Zeit, aber auf die Einführung von Kategorien in mathematischen Theorien als Methode hatte Emmy Noether einen spürbaren Einfluss, weil sie erstens die abstrakten Begriffe in der Mathematik stets aus ihrem unmittelbaren Kontext hervorhob und zweitens Methoden zur Algebraisierung von Gebieten wie der Topologie benutzte, die in Form von Funktoren zwischen zwei Kategorien einen Übergang herstellen.

Die Geschichte der modernen Algebraischen und Arithmetischen Geometrie begann im 20. Jahrhundert mit den Arbeiten von André Weil[16] (1906-1998) und wurde nach kurzer Zeit durch den Einfluss der Theorie der Schemata von Alexander Grothendieck dominiert. Heute sind

---

14 In Berlin geborener und später mit seiner Mutter nach Frankreich geflohener einflussreicher und origineller Mathematiker. Er gewann die Fieldsmedaille 1966. Die von ihm initiierten Werkreihen über Algebraische Geometrie sind als EGA und SGA bekannt.

15 MacLane war von 1931-1934 Doktorand in Göttingen bei Hermann Weyl (1885-1955) und Paul Bernays (1888-1977) und damit Emmy Noether eine Zeitlang recht nahe. Samuel Eilenberg war ein einflussreicher polnischer Topologe, der in die USA emigrierte und zuletzt an der Columbia University wirkte. Die mathematischen Schüler (und Enkel) von MacLane und Eilenberg, insbesondere Steve Awodey (geb. 1959), Daniel Kan (1927-2013), Bill Lawvere (geb. 1937), Miles Tierney (1937-2017) und Peter Freyd (geb. 1936) haben neben Grothendieck und seiner Schule wesentliche Entdeckungen in der Kategorientheorie gemacht.

16 André Weil (1906-1998) war ein einflussreicher französischer Mathematiker, der in der Arithmetischen und Algebraischen Geometrie arbeitete. Er versuchte bereits vor Grothendieck, die moderne Algebraische Geometrie zu begründen. Auf ihn gehen die Weil Vermutungen zurück, die das Pendant der Riemannschen Vermutung für Varietäten über endlichen Körpern sind.

Verallgemeinerungen von Schemata sehr populär, wie die Theorie der Stacks oder kategorielle Entwicklungen, die den Begriff des Schemas im (höheren) Kategorienbegriff aufgehen lassen. Die Schemata haben die Spektra Spec(R) von Ringen, also die Mengen der Primideale in R mit der Zariskitopologie, als lokale Modelle. Daher ist die Sprache der kommutativen Ringe der lokale Fall der Algebraischen und Arithmetischen Geometrie. Für Emmy Noether wäre dies eine natürliche Entwicklung gewesen, hat sie doch besonders zu Anfang ihrer Karriere fast immer im Bereich der kommutativen Algebra gearbeitet und selbst nur wenig Furcht vor Abstraktion gekannt.

Berühmte Vermutungen in der Arithmetik wie die Mordellsche Vermutung (Satz von Faltings[17]) und die Fermatsche Vermutung[18] (Satz von Wiles[19]) wurden in den 1980er und 1990er Jahren mit Hilfe geometrischer Methoden gelöst. Diese Vermutungen waren zu Noethers Zeiten noch große Träume. Bis heute reichen mathematische Laien elementare Beweise solcher Vermutungen ein, die sich aber stets als lückenhaft herausstellen, weil erst die Methoden der Arithmetischen Geometrie zusammen mit anderen Hilfsmitteln stark genug sind. Eine der wichtigsten heute noch offenen Fragen ist – neben der Riemannschen Vermutung und der ABC-Vermutung – das bereits erwähnte Langlandsprogramm, das eine umfassende Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie darstellt und das bis heute nur in Teilen bewiesen wurde. Es stellt ein Leitmotiv innerhalb der Arithmetischen Geometrie dar, an dem sich die Weiterentwicklung in vielerlei Hinsicht orientiert.

In der Algebra sowie in der Algebraischen und Arithmetischen Geometrie wird gelegentlich bewusst auf die in der Regel so wichtige Noethersche Eigenschaft oder auf die Endlichdimensionalität verzichtet, um bestimmte Ziele zu verfolgen. Dies gilt bereits in der Algebraischen Zahlentheorie und insbesondere der Klassenkörpertheorie, wo man die absolute Galoisgruppe von Zahlkörpern betrachtet, die als geeigneter Limes von Galoisgruppen in unendlichen Körpertürmen von gewissen Erweiterungskörpern induziert wird. Um solche Situationen in den Griff zu bekommen, sind sogenannte profinite und proalgebraische Strukturen eingeführt worden, wie zum Beispiel die proalgebraischen Gruppen als Limiten von endlich dimensionalen algebraischen Gruppen.

Neuere und weitergehende Beispiele sind die Arbeiten der p-adischen Hodgetheorie von Gerd Faltings, Marc Fontaine (1944-2019), Peter Scholze (geb. 1987) und anderen. Dort werden neue Techniken benutzt, in denen bewusst ganz neue nicht endlich erzeugte Ringe und Moduln auftreten. Peter Scholze wurde 2018 mit einer Fieldsmedaille unter anderem auch für seine raffinierte Einführung solcher Methoden in seiner Theorie der sogenannten perfektoiden Räume ausgezeichnet [Scholze2019].

Der Noethersche Normalisierungssatz hat ebenfalls viele Anwendungen in der Algebraischen und

17 Gerd Faltings (geb. 1954) ist ein deutscher Mathematiker, der 1986 die Fieldsmedaille gewann. Er bewies 1983 die Mordellsche Vermutung über die Endlichkeit rationaler Punkte auf glatten algebraischen Kurven vom Geschlecht 2 und größer.

18 Nach Pierre de Fermat (1607-1665), ein vielseitiger Mathematiker des 17. Jahrhunderts.

19 Andrew Wiles (geb. 1953) ist ein englischer Mathematiker, der 1995 die Taniyama-Shimura-Vermutung bewies.

Arithmetischen Geometrie erlebt. Zum Beispiel hat Daniel Quillen[20] in den 1970er Jahren eine Variante davon benutzt, um in der Algebraischen K-Theorie die sogenannte Gerstenvermutung für die algebraische K-Theorie lokaler Integritätsbereiche zu zeigen [Quillen1973, §7]. Die Gerstenvermutung ist nach Stephen Gersten (geb. 1940) benannt und besagt, dass die algebraischen K-Gruppen eines lokalen Integritätsbereiches injektiv in die algebraischen K-Gruppen des Quotientenkörpers einbetten. Spencer Bloch (geb. 1944) und Arthur Ogus (geb. 1935) haben 1974 daraus die Grundlage für die sogenannten Bloch-Ogus Theorien geschaffen, die wichtig für die weitere Entwicklung von geeigneten Kohomologietheorien in der Arithmetischen und Algebraischen Geometrie waren.

In der heutigen Arithmetischen Geometrie (und auch in der Komplexen Analysis, in der Topologie und in der Algebraischen Geometrie) spielen Homologie- und Kohomologietheorien eine bedeutende Rolle, weil sie wichtige numerische Invarianten und Hilfsmittel für die Beschreibung von Räumen und Strukturen liefern. Emmy Noether hat in ihren Beiträgen zur Topologie die elementarste dieser Theorien behandelt, die singulären Homologie topologischer Räume. Es gibt unzählige Varianten solcher Theorien. Darunter sind die Kohomologie von Garben (definiert durch injektive Auflösungen), ihre Verallgemeinerung zu Grothendiecktopologien wie der étalen Kohomologie, und die algebraische de Rham Kohomologie besonders bedeutend. Der Erfindung der Theorie der sogenannten Motive durch Alexander Grothendieck und andere liegt die Beobachtung zugrunde, dass viele verschiedene Kohomologietheorien nur unterschiedliche Avatare einer zugrundeliegenden Struktur sind, die man Motiv nennt. Die Theorie der Motive ist - neben dem Langlandsprogramm - ein weiteres großes Leitmotiv der zeitgenössischen theoretischen Mathematik. Vladimir Voevodsky (1966-2017) und Madhav Nori (geb. 1949) haben dazu neben Grothendieck wesentlich beigetragen, vgl. [HuberMüller-Stach2017].

Die Kategorie der Motive über den rationalen Zahlen ist eine Tannakakategorie zu einer sehr großen proalgebraischen Gruppe – der motivischen Galoisgruppe - und damit ist die Theorie der Motive eine weitreichende Verallgemeinerung der Galoistheorie. Aus diesem Grunde tauchen auch viele Begriffe, die Emmy Noether untersuchte, auch in diesem Kontext wieder auf. Die Perioden von Motiven über den rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Algebra von höchst interessanten Zahlen, auf denen diese Gruppe operiert. Darunter sind alle algebraischen Zahlen, aber auch abzählbar viele spezielle transzendente Zahlen, so dass diese Untersuchungen auch Teile der Transzendenztheorie beeinflussen.

Alain Connes (geb. 1947) und andere haben eine Form der nichtkommutativen Geometrie entwickelt, die unter anderem in der mathematischen Physik eine bedeutende Rolle spielt, vgl. [Connes1994], und die man wenigstens zum Teil als Fortsetzung der algebraischen Untersuchungen von Emmy Noether über nichtkommutative Algebren sehen kann. Ein nichtkommutativer Raum besitzt keine Geometrie

20 Daniel Quillen hat die höhere Algebraische K-Theorie begründet, die die nullte algebraische K-Gruppe K_0 von Grothendieck verallgemeinert. Der Buchstabe K kommt von dem deutschen Wort Klasse.

im klassischen Sinn, also keine geometrischen Punkte, sondern der zugrundeliegende Ring der Funktionen bestimmt – wie in der Algebraischen Geometrie – die „geometrischen" Eigenschaften. Die Algebren, die zu nichtkommutativen Geometrien gehören sind die C*-Algebren, die eher dem Gebiet der Funktionalanalysis zuzuordnen sind. Mittlerweile hat die nichtkommutative Geometrie einen großen Einfluß in der mathematischen Physik und in der mathematischen Analysis gewonnen.

Fazit

Emmy Noethers Persönlichkeit wird in allen Nachrufen und Biographien als gesellig beschrieben. Sie pflegte Freundschaften und wissenschaftliche Kontakte. Es gibt diverse Photographien von ihr, jedoch leider kein Filmmaterial, in dem ihr Charisma vermutlich besser zu erkennen wäre als auf den Photographien. Trotz eines gelegentlich eigenwilligen Stils wird in den Nachrufen Emmy Noethers Wirkung auf ihre Zuhörer in Vorträgen, Vorlesungen und Seminaren als inspirierend beschrieben.

Wir haben gesehen, welch enormen Einfluss Noether auf viele Menschen gehabt hat. Die Größen der Göttinger Mathematik und ihre internationalen Gäste, die später in der ganzen Welt gewirkt haben, waren darunter. Die Göttinger Universität war damals ein schon sehr internationaler Ort an den man aus allen Ländern pilgerte, um Mathematik und Physik in ihrer Blüte zu erleben.

Auch auf andere Universitäten in Deutschland hat Emmy Noether Einfluss gehabt. Im Jahr 1974 hat möglicherweise die als Stiftungsuniversität gegründete Frankfurter Universität Emmy Noether für eine Habilitation in Frankfurt in Betracht gezogen. Daher wurde das preußische Ministerium gebeten, beim Habilitationsgesuch von Noether zu unterstützen, was 1919 schließlich als eine Art von Ausnahmefall gelang, bevor Frauen erst Jahre später offiziell zugelassen wurden. In Frankfurt wurde 1930 Emmy Klieneberger als erste Frau habilitiert. Viele Jahre später vertraten sich Emmy Noether und ihr Frankfurter Kollegen Carl Ludwig Siegel (1896-1981) ebenfalls im Jahr 1930 gegenseitig bei Vorlesungen am jeweils anderen Standort. Siegel, der später ebenfalls in die USA emigrierte, kam nach seiner Emigration 1951 nach Göttingen zurück und wirkte dort bis zu seiner Emeritierung. [21]

Die Wertschätzung für Noether im Ausland lässt sich daran erkennen, wie sie während ihrer Emigration neben anderen durch Oswald Veblen (1880-1960), Solomon Lefschetz (1884-1972), Anna Pell Wheeler (1883-1966) bezüglich der Arbeitsmöglichkeiten am College in Bryn Mawr in vielerlei Hinsicht unterstützt wurde. Weitere Beispiele von Namen in Noethers wissenschaftlichem Netzwerk kann man in der historischen Literatur finden.

Die mathematischen Arbeiten von Emmy Noether mit all ihren Ideen wurden von anderen in der

21 Siegel arbeitete in der analytischen Zahlentheorie, der Theorie der Abelschen Varietäten und der (Siegelschen) Modulformen. Er veröffentlichte die Riemann-Siegel Formel aus dem Nachlass von Bernhard Riemann (1826-1866). Die Formel zeigt, dass Riemann sehr viel mehr über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion wusste, als er publiziert hatte.

Folge bearbeitet und sie hat fast keine isolierten und „unwichtigen“ Arbeiten geschrieben. Es lohnt sich auch heute noch, ihre Arbeiten zu lesen, nicht nur für historisch Interessierte. Noethers Wirkung auf die Mathematik scheint mir insbesondere durch ihre begriffliche Denkweise in Strukturen, die sich in einem großen Netzwerk fortgepflanzt hat, enorm zu sein. Manche Einschätzungen ihrer Bedeutung in der Vergangenheit waren in dieser Hinsicht unvollständig und man muss sie in der Tat als Begründerin einer Schule, oder besser Denkschule, sehen, was auch inzwischen in der Literatur anerkannt ist, vgl. [KoreuberTobies2002] und [Koreuber2015].

Dank

Meine Bewunderung gilt Mechthild Koreuber, David Rowe, Sandra Schüddekopf (Regie) und Anita Zieher (als Emmy Noether) für ihre einzigartige künstlerisch-wissenschaftliche Erarbeitung des Theaterstücks. Mein Dank gilt Mechthild Koreuber und David Rowe für die Berücksichtigung im vorliegenden Band sowie einige wertvolle Hinweise.

Literatur

[Connes1994] Alain Connes: Noncommutative geometry, Academic Press (1994).

[Dieudonné1984] Jean Dieudonné: Emmy Noether and algebraic topology, Journal Pure and Applied Algebra, Vol. 31, 5-6 (1984).

[Hilbert1897] Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Heft 4, 177-546 (1897).

[Hirzebruch1999] Friedrich Hirzebruch: Emmy Noether and topology, Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. 12, 57-65 (1999).

[Hopf1928] Heinz Hopf: Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 127-136 (1928).

[HuberMüller-Stach2017] Annette Huber, Stefan Müller-Stach: Periods and Nori motives, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 65, Springer Verlag (2017).

[KoreuberTobies2002] Mechthild Koreuber, Renate Tobies: Emmy Noether als Begründerin einer mathematischen Schule, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Nr. 3, 24-37 (2002).

[Koreuber2015] Mechthild Koreuber: Emmy Noether, die Noether-Schule und die moderne Algebra, Mathematik im Kontext, Springer Spektrum (2015).

[LemmermeyerRoquette2006] Franz Lemmermeyer, Peter Roquette: Helmut Hasse und Emmy Noether: Die Korrespondenz, Göttinger Universitätsverlag (2006).

[Noether1983] Emmy Noether: Gesammelte Abhandlungen, Springer Verlag (1983).

[Quillen1973] Daniel Quillen: Higher Algebraic K-Theory I, Springer Lecture Notes in Mathematics 341 (1973).

[Roquette2005] Peter Roquette: The Brauer-Hasse-Noether theorem in historical perspective, Schriften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (2005).

[Rowe2018] David Rowe: A richer picture of mathematics: the Göttingen tradition and beyond, Springer Verlag (2018).

[Scholze2019] Peter Scholze: P-adic geometry, Proc. of the ICM 2018, Rio de Janeiro, World Scientific, 899-934 (2019).

[Waerden1930] Bartel Leendert van der Warden: Modern Algebra I und II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bände 33/34, Springer Verlag (1930).