Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 10 - Abgabe (**nur B.Sc.!**): Freitag, den 26.06.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi, T. Davis und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Spatprodukt (*3 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie explizit:

(a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

(b) $\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

Zeigen Sie, dass die folgende Behauptung für das Spatprodukt allgemein stimmt:

(c) $\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) \cdot \vec{i} = 0$

Aufgabe 2: Differentiation von Vektorfunktionen (*5 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen von $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

(a) $\dfrac{d}{dt} |\,\vec{r}\,|$

(b) $\dfrac{d}{dt} (\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\,)$

(c) $\dfrac{d}{dt} \left[\,\vec{r} \cdot (\,\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\,)\,\right]$

Aufgabe 3: Differentiation von Vektorfunktionen: Bahnkurve (*3 Punkte*)

Ein Massenpunkt bewege sich gemäß:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $t \in [0; 1]$.

(b) Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$?

(c) Zu welchem Zeitpunkt t_{min} ist die Geschwindigkeit minimal? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt der Betrag der Geschwindigkeit?

Aufgabe 4: Gradient, Divergenz und Rotation *(12 Punkte)*

Gegeben sind die Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -yz \\ x^2 z \\ xy^2 \end{pmatrix}$, $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yzx \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$ und $\vec{C}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$.
Daraus ergeben sich die folgenden skalaren Felder:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \\ g(\vec{r}) &= \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{C}(\vec{r}) \\ h(\vec{r}) &= \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{C}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten von $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ und $h(\vec{r})$.

(b) die Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$.

(c) die Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$.

Aufgabe 5: Der Satz von de Gua *(5 BONUSpunkte)*

Wenn ein Tetraeder eine rechtwinklige Ecke (wie eine Würfelecke) besitzt, dann ist die Summe der quadrierten Flächeninhalte der an der rechtwinkligen Ecke anliegenden Flächen gleich dem quadrierten Flächeninhalt der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Fläche.

Dies gilt nun mittels Vektorrechnung zu beweisen. Nutzen Sie hierzu die Ebene

$$E : bcx + acx + abx = abc$$

mit $a, b, c > 0$.

(a) Skizzieren Sie die Ebene im ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$.

(b) Drücken Sie die einzelnen Tetraederseiten mittels Flächennormalenvektoren aus und zeigen Sie dann die Gültigkeit des Satzes.