Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 12 - Abgabe **(nur B.Sc.!)** : Freitag, den 10.07.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi, T. Davis und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Konservatives Kraftfeld? (*5 Punkte*)

Sei $\vec{F}(\vec{x}) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 1\right) \in \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^3$ von $\vec{F}$.

(b) Zeigen Sie: $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$.

(c) Sei K ein Kreis in der $x - y-$Ebene mit Radius $R \in \mathbb{R}^+$ und Mittelpunkt im Ursprung. Zeigen Sie, dass das Linienintegral $\oint_K \vec{F} \mathrm{d}\vec{s} = 2\pi$ fÃijr einen **einmaligen** Umlauf beträgt.

(d) Sei V ein Viertel eines Kreisringes (verbunden dann durch Strecken auf den Koordinatenachsen) im ersten Quadranten der $x - y-$Ebene mit $0 < r < R \in \mathbb{R}^+$ wobei r der kleine Radius des Innenkreises und R der Radius des Außenkreises ist. Zeigen Sie, das dass Linienintegral $\oint_V \vec{F} \mathrm{d}\vec{s}$ verschwindet bei einmaligen (dann mehrmaligen!) Umlauf.

(e) Besitzt $\vec{F}$ ein Potential Φ? (Begründung!)

Aufgabe 2: Oberflächenintegral (*9 Punkte*)

Betrachtet wird ein nach oben geöffneter Kegel und die z-Achse mit einem Winkel θ zwischen Kegelmantel und z-Achse und einer Höhe h. Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten

(a) die Oberfläche des Kegels durch Integration.

(b) den Fluss des Feldes $\vec{A}(\vec{r}) = ar^n(\cos(\phi), \sin(\phi), 0)$ durch die Kegeloberfläche.

Aufgabe 3: Satz von Gauß (*6 Punkte*)

Der Satz von Gauß, oder auch gaußsche Integralsatz, stellt die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ in Beziehung zu dem Fluss durch eine geschlossene Oberfläche S. In drei Dimensionen lautet er:

$$\int\limits_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Dabei steht V für das betrachtete Volumen, S für die geschlossene Oberfläche des Volumens und $\vec{n}$ für den nach außen gerichteten Normalenvektor der Oberfläche.

Im Folgenden soll dieser Satz an einem Beispiel gezeigt werden.

Dazu ist das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$ in der Einheitskugel $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die linke Seite des Satz von Gauß indem Sie zunÃd'chst die Divergenz von $\vec{F}$ berechnen, anschließend in Kugelkoordinaten transformieren und integrieren.

(b) Berechnen Sie die rechte Seite des Satz von Gauß indem Sie in Kugelkoordinaten über die beiden Winkel integrieren.
Hinweis: *Der Normalenvektor der Kugel entspricht gerade dem radialen Einheitsvektor, außerdem kann der Radius der Kugel eingesetzt werden.*

Aufgabe 4: Satz von Stokes (*6 BONUSpunkte*)

Ein Strom fließt in Richtung der $z-$Achse, die Stromdichte $\vec{j}$ hängt gemäß

$$j(\rho) = a \exp\left(-\lambda \rho^2\right)$$

von Abstand ρ von der $z-$Achse ab.

(a) Berechnen Sie den Strom, den ein Zylinder um die $z-$Achse mit Radius R führt, sowie den Gesamstrom $(R \to \infty)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Magnetfeld.