Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 2 - Abgabe: Freitag, den 01.05.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Reellwertige Funktionen I (*2 Punkte*)

Welche der folgenden Funktionen sind differenziebar bei $x = 0$?

i) $f(x) = |x| \sin(x)$

ii) $g(x) = |x|(x^2 + 1)$

iii) $h(x) = x \sin(|x|)$

iv) $i(x) = \sqrt{x} \sin(x)$

v) $j(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

Aufgabe 2: Reellwertige Funktionen II (*2 Punkte*)

Es sei $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ sowie

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i) Für welche α ist f differenziebar bei $x = 0$?
ii) Für welche α ist $f'(x)$ stetig?

Aufgabe 3: Reellwertige Funktionen III (*2 Punkte*)

Es sei $f(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$ in $\mathbb{R}$.

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ stetig?

ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ differenziebar?

iii) Berechen Sie die Tangenten im Punkt $(1, f(1))$ und im Punkt $(-2, f(-2))$.

iv) Berechen Sie allgemein die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Für welche x_0 ist die Tangente parallel zur ersten und zur zweiten Winkelhalbierenden? ($y = x$ bzw. $y = -x$)?

Aufgabe 4: Reellwertige Funktionen IV (*2 Punkte*)

Zeigen Sie dass die folgenden Funktionen streng monoton steigend sind.

i) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$

ii) $g(x) = \frac{1}{42}x^7 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Aufgabe 5: Reellwertige Funktionen V (*2 Punkte*)

Beweisen Sie dass:

i) $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + x \leq e^x$

ii) $\forall x > -1 : \ln(1 + x) \leq x$

Aufgabe 6: Reellwertige Funktionen VI (*2 EXTRA Punkte*)

Finden Sie das Maximum der folgenden Funktionen:

i) $f(x) = \frac{x-x^2}{2+x^2}$ $\qquad x \in [0; 1]$

ii) $g(x) = (1 - x^2)e^x$ $\qquad x \in [-1; 1]$

iii) $h(x) = \frac{x}{(x+a)(x+b)}$ $\qquad x \in [0; +\infty[\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$