Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 3 - Abgabe: Freitag, den 08.05.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Grenzewerte mit Satz von de l'Hopital (*2 Punkte*)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe des Satzes von de l'Hopital

i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}$$

ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x^2}}{x \sin(2x)}$$

iii)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$$

iv)
$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Aufgabe 2: Grenzwerte mit Taylor-Entwicklung (*2 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Taylor-Entwicklung:

i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\sin^2(x)}$$

ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - e^x + 1}{xe^x - \sin(x)}$$

iii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \arctan(x)}{1 - \cos(x)}$$

Aufgabe 3: Taylor-Reihen (*3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion e^x und näheren Sie $\sqrt{e}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-6}.

(b) Berechnen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen $f_i(x)$ um den angegebenen Punkt x_0 bis zur Ordunung n.

i) $f_1(x) = x - \sin(x), \quad x_0 = 0, \quad n = 5$
ii) $f_2(x) = e^{x-1} - \cos(2\pi x), \quad x_0 = 1, \quad n = 4$
iii) $f_3(x) = x \arctan(x), \quad x_0 = 0, \quad n = 2$
iv) $f_4(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3$
v) $f_5(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3$
vi) $f_6(x) = x^4 + x - 2, \quad x_0 = 1, \quad n = 4$

Aufgabe 4: Integration (*3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie zu folgenden Funktionen die Stammfunktionen:

i)	$(x+2)\sin(x^2+4x-6)$	ii)	$x^2\sin(x)$	iii)	$\ln(x)$
iv)	$\dfrac{1}{1+x^2}$	v)	$\sqrt{x-\frac{1}{a^2}}$	vi)	$x(3x^2-1)^6$
vii)	$\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x+12}$	viii)	$\dfrac{1}{\cos(x)}$		

Hinweis: *Benutzen Sie falls nötig die Partialbruchzerlegung.*

(b) Benutzen Sie

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{1}{x}dx \quad ,$$

um die Gültigkeit der Rechenregel

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

zu zeigen.
Hinweis: *Verwenden Sie die Substitution* $x = \frac{u}{a}$.

Aufgabe 5: Integrationsbeweise (*3 EXTRA Punkte*)

(a) Beweisen Sie, dass die folgende Funktion im Intervall [0; 2] integriebar ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x \in [0,1) \cup (1,2] \end{cases}$$

(b) Wiederholen Sie die Aufgabe (a) für:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$