Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 4 - Abgabe: Freitag, den 15.05.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Partielle Ableitung *(3 Punkte)*

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x,y,z) = 5xy + xz + 3y^2z + z^2$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

(b) Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j}$ für alle $i, j \in (x,y,z)$

(c) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f(x,y,z)$

Aufgabe 2: Uneingentliche Integrale *(4 + 2 Punkte)*

(a) Es sei $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$. Für r und R (je $\in \mathbb{R}$) derart, dass gilt $0 < r < R$ berechnen Sie

i)

$$\int_r^R f(x)\mathrm{d}x$$

Berechnen Sie das Integral

ii)

$$I = \lim_{r \to 0^+} \int_r^R f(x)\mathrm{d}x.$$

iii)

$$J = \lim_{R \to \infty} \int_r^R f(x)\mathrm{d}x.$$

iv) Für welche $\alpha > 0$ konvergieren je die Integrale I und J?

(b) Berechenen Sie:

i)

$$\int_1^\infty \frac{2x}{x^3 + x^2 + x + 1}\mathrm{d}x$$

ii)

$$\int_e^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3: Zweidimensionale Integrale (*5 Punkte*)

Integrieren Sie die Funktion $f(x,y)$ auf dem Gebiet G und skizzieren sie für a und b die jeweiligen Gebiete.

(a) $f(x,y) = xy$, $G = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\}$

(b) $f(x,y) = y\sqrt{1-x^2}$, $G = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$, $G =]-\infty, \infty[$

Tipp: *Sei* $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$*, berechnen Sie zunächst* $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ *mit Hilfe von Polarkoordinaten.*

Aufgabe 4: Dreifachintegrale (*3 + 2 Punkte*)

(a) V sei der von den Koordinatenebenen und der Ebene $E : x + y + z = 1$ begrenzte Körper.
i) Skizzieren Sie diesen Körper.
ii) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_V (2x + y + z) \mathrm{d}V.$$

(b) iii) Berechnen Sie den Schwerpunk $S = (S_1/S_2/S_3)$ der Halbkugel H vom Radius $0 < R \in \mathbb{R}$ bei konstanter Massendichte $\rho = 1$.

Aufgabe 5: Integrationsreihenfolge bei unstetigen Funktionen (*4 BONUSPunkte*)

Gegeben sei die im Bereich $B =]0,1]^2$ unstetige Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad .$$

Zeigen Sie, dass man in diesem Fall die Integrationsreihenfolge nicht vertauschen darf.