Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 5 - Abgabe: Freitag, den 22.05.15, 12 Uhr

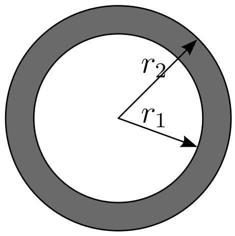
Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Mehrdimensionale Integrale (*4 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten.

(b) Berechnen Sie durch Integration das Volumen des Metalls eines ein Meter langen Rohres mit einem Innenradius $r_1 = 3$ cm und einem Außenradius $r_2 = 4$ cm.



Aufgabe 2: Gewicht der Atmosphäre (*6 Punkte*)

Berechnen Sie das Gewicht der Atmosphäre.

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$\int e^{-\alpha r} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha}\left(r^2 + \frac{2}{\alpha}r + \frac{2}{\alpha^2}\right) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation von kartesischen auf Kugelkoordinaten.

(c) Um das Gewicht der Atmosphäre zu berechnen müssen Sie die barometrische Höhenformel über ihr Volumen integrieren. Sie lautet:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{h_s}}$$

Dabei ist $h_s = \frac{RT}{Mg} \approx 8{,}4$ km, $R = 6.378$ km und $\rho_0 = 1{,}2041 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.
Hinweis: *Benutzen Sie Kugelkoordinaten.*

(d) Die Erde habe eine mittlere Dichte von $\rho = 5{,}515 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, berechnen Sie den Anteil der Atmosphäre zur Gesamtmasse der Erde.

Aufgabe 3: Trägheitsmoment (*4 Punkte*)

Das sogenannte Trägheitsmoment eines Körpers der Dichte ρ um die z-Achse ist gegeben durch die Gleichung

$$\theta = \rho \iint \mathrm{d}V(x^2 + y^2);$$

wobei natürlich nur über das Volumen des Körpers integriert wird.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders der Länge L und des Radius R, der in z-Richtung orientiert ist.

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel des Radius R.

Aufgabe 4: Rechnen mit komplexen Zahlen (*6 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt dargestellt werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

und

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

(b) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

(c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}i$ die reellen Zahlen a und φ so, dass $z = a \exp(i\varphi)$.

(d) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -1$.

(e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

und

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

und

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(f) Leiten Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

für Sinus und Cosinus her. *Tipp: Fangen Sie auf der rechten Seite an.*

Aufgabe 5: Einheitswurzeln (*4 BONUSpunkte*)

(a) Berechnen Sie analog zu Aufgabe 4 (d) alle Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeichnen Sie die Lösungen als Pfeil in die komplexe Ebene ein. Verbinden Sie die Spitzen der Pfeile und geben Sie an welches geometrische Objekt hierbei entstand.

(c) Welches geometrische Objekt würden Sie als Lösung der Gleichung $z^{2015} = 1$ erwarten?

(d) Verwenden Sie die Eulergleichung um zu zeigen, dass alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf dem (komplexen) Einheitskreis liegen.