Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 6 - Abgabe: Freitag, den 29.05.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen *(5 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

(i) $(2i)^{16}$ (ii) $\left(3+\sqrt{2}i\right)^2$

(b) Berechnen Sie den Hauptwert von:

(i) $\sqrt{-9}$ (ii) $\ln(i)$ (iii) $\ln(-1+\sqrt{3}i)$

(iv) $\sqrt[3]{i}$ (v) $(-2i-2\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ (vi) $(1+i)^i$

Aufgabe 2: Holomorphe Funktione (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen) *(5 Punkte)*

(a) Untersuchen Sie die Funktion $f(z) = \frac{z^*}{|z|^2}$ auf Holomorphie.

(b) Für welchen Wert des Parameters α ist die Funktion

$$u(x,y) = \sin x(e^{-\alpha y} + e^y)$$

holomorph?

(c) Sagen Sie ob die Funktion

$$u(x,y) = e^x \frac{x\cos y + y\sin y}{x^2+y^2}$$

der Reelleteil einer holomorphen Funktion sein kann und bestimmen Sie gegebenfalls $f(z)$.

Aufgabe 3: Trajektorien *(5 Punkte)*

Ein Teilchen bewege sich in der $x-y-$Ebene als Funktion der Zeit t derart, dass die Bewegung durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = e^{(2it)}$$

(a) Zeichnen Sie die Traktorie in der Ebene. Welche Bewegung wird beschrieben?

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sowie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit t.

Aufgabe 4: Impedanz und Scheinwiderstand (*5 Punkte*)

In der Wechselstromtechnik geht man üblicherweise von sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen aus. Daher ist es möglich, Stom und Spannung als komplexe Zeiger in der Gaußschen Ebene zu betrachten. Dies führt mit der Ihnen vielleicht als $U = R \cdot I$ bekannten Formel zu komplexen Widerständen (Impedanz $\underline{Z}$). Der ohmische Widerstand bleibt dabei reell, es gilt $\underline{Z}_R = R$. Für eine Kapazität C gilt $\underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$, dabei ist ω die Kreisfrequenz. Für eine Induktivität L gilt $\underline{Z}_L = i\omega L$. Die gesamt Impedanz ergibt sich dann als $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L$. Physikalisch relevant ist der Betrag der Impedanz $Z = |\underline{Z}|$ (Scheinwiderstand).

(a) Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm eines Schlatkreises der Reihenfolge $R-L-C$. Tragen Sie dazu die Größen $\underline{Z}_R, \underline{Z}_C, \underline{Z}_L, \underline{Z}$ auf. Nehmen Sie an, dass R, C, L, ω physikalisch sinnvolle Werten haben (größer als Null sind).

(b) Berechnen Sie die Impedanz und den Scheinwiderstand mit $R = 100\ \Omega$, C = $32\ \mu F$, L = $40\ mH$ und $\omega = 300\ Hz$

Aufgabe 5: Graphen komplexer Funktionen (*3 BONUSpunkte*)

Wie lassen sich komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen veranschaulichen? Der Graph einer solchen Funktion ist eine Teilmenge des $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ und entzieht sich der Anschauung. Eine gute Möglichkeit der Darstellung von $f = g + ih$ ist die Zeichnung der Niveaulinien von g, h oder $|f|$, d.h. einiger Linien der Mengen $\{z : \mathrm{Re}(f(z)) = \text{const}\}$, $\{z : \mathrm{Im}(f(z)) = \text{const}\}$ oder $\{z : |f(z)| = \text{const}\}$. Betrachten wir uns nun die Funktion $f(z) = z^2$ mit $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen und zeichnen Sie die folgenden Niveaulinien:

(a) $\mathrm{Re}(f(z)) = k$ mit $k \in \{-4; -1; 0; 1; 4\}$.

(b) $\mathrm{Im}(f(z)) = c$ mit $c \in \{-8; -2; 0; 2; 8\}$.

(c) $|f(z)| = n$ mit $n \in \{0; 1; 4; 9\}$.