Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 7 - Abgabe: Freitag, den 05.06.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi, T. Davis und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Radioaktiver Zerfall (*5 Punkte*)

Zur Zeit $t = 0$ seien $N(0) = 80.000$ Atome eines radioaktiven Stoffes vorhanden. Nach 5 Stunden sind noch 20.000 Atome vorhanden.

i) Stellen Sie die Differentialgleichung für den radioaktiven Zerfall auf und lösen Sie sie.

ii) Bestimmen Sie die Zeit nach der die Hälfte der Atome zerfallen sind (Halbwertszeit $t_{1/2}$).

Aufgabe 2: Begrenztes Wachstum von Bakterienkulturen (*6 Punkte*)

In einer Petrischale befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ zehn Bakterien einer Sorte. Die Bakterien teilen sich in einer Nährlösung jede Stunde.

(a) Stellen Sie eine DGL auf die diesen Vermehrungsvorgang beschreibt und lösen Sie diese. (Nehmen Sie zunächst an, dass die Nährflüssigkeit ständig nachgeliefert wird und kein Bakterium unter Nahrungsmangel leidet.)

(b) Nun soll der Nahrungsmangel berücksichtigt werden. Erweitern Sie dazu ihre DGL um den Term $-\gamma \cdot f^2(t)$ mit $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$. Zeigen Sie zunächst: $\left(-\frac{1}{f(t)}\right)' = \frac{f'(t)}{f^2(t)}$ und lösen Sie anschließend die DGL.
Tipp: *Eine Substitution der Art* $g(t) = \frac{1}{f(t)} - \frac{\gamma}{\lambda}$ *ist hilfreich.*

(c) Zeichnen Sie beide Lösungen (gerne auch mit einem Computerprogramm).

Aufgabe 3: Variablenseparation (*6 Punkte*)

(a) Lösen Sie durch Separation der Variablen die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $\frac{y(x)}{x^2} \cdot y'(x) = 2x \qquad \text{mit} \quad y(0) = 3$

(ii) $\frac{1}{x^2} \cdot y'(x) = 4xy(x) \qquad \text{mit} \quad y(0) = 4$

(iii) $y'(x) = (1 + y^2) \ln(x) \qquad \text{mit} \quad y(1) = 0.$

Aufgabe 4: Integrierender Faktor (*6 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen mit Hilfe des integrierenden Faktors.

(a) $y'(x) + ay(x) = x \qquad \text{mit} \quad y\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

(b) $xy'(x) - y(x) = x^2 \qquad \text{mit} \quad y(2) = 6$ und $x > 0$

(c) $y'(x) - \frac{y(x)}{e^x + 1} = e^x \qquad \text{mit} \quad y(0) = -1$

Aufgabe 5: Theoretische Biologie (*5 BONUSpunkte*)

In Aufgabe 2 haben Sie bereits erfahren, wie sich Populationen einer Art bei un- und begrenzter Nahrung verhalten. In der Natur kommt es jedoch oft vor, dass sich eine Population von einer anderen ernährt. Dies bedeutet, dass die jeweilige Population von der anderen abhängig ist. Dieses einfache Beispiel soll Ihnen dieses gekoppelte Verhalten näher bringen.

In einem Wildrevier leben normalerweise 200 Füchse (Räuber) und 1.000 Hasen (Beute). Es soll untersucht werden, wie sich der Wildbesatnd ändert, wenn das Verhältnis zwischen Räuber und Beute „aus dem Gleichgewicht" gerät.

Es sei $r(t)$ die 200 übersteigende Zahl an Räubern zur Zeit t (in Monaten) und $b(t)$ entsprechend die 1.000 übersteigende Zahl an Beutetiere. Für die Wachstumsgeschwindigkeit der Räuber gelte $r'(t) = 0,02 \cdot b(t)$ und für die Beute $b'(t) = -0,5 \cdot r(t)$.

(a) Erstellen Sie aus den beiden Differentialgleichungen eine, die nur noch die Funktion b bzw. ihre Ableitung enthält. Geben Sie $b(t)$ an.

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ leben im Revier 180 Füchse und 1.050 Hasen. Bestimmen Sie die weiteren Schwankungen im Bestand.

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Schwankungen im Bestand (gerne auch mit einem Computerprogramm).

Tipps:
i) Eine DGL der Form $f''(t) = -k^2 \cdot f(t)$ mit $k > 0$ besitzt als Lösung $f(t) = A \cdot \sin(kt + c)$ mit $A, c \in \mathbb{R}$.
ii) Runden Sie in Ihren Berechnungen c auf zwei Nachkommastellen und geben Sie A ganzzahlig an.