Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 8 - Abgabe: Freitag, den 12.06.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi, T. Davis und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Variation der Konstanten *(6 Punkte)*

Betrachtet wird eine Differentialgleichung der Form:

$$\dot{y}(t) + h(t)y(t) = g(t) \tag{0.1}$$

Diese ist mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Methode des integrierbaren Faktors lösbar. Alternativ kann eine solche DGL durch „Variation der Konstanten“ gelöst werden. Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) ist somit durch

$$y(t) = A\exp\left(-\int h(t)dt\right) + \exp\left(-\int h(t)dt\right) \cdot \int g(t)\exp\left(-\int h(t)dt\right) dt$$

gegeben. Im Folgenden soll diese Methode nachvollzogen werden.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$y(t) = y_h(t) + y_{ih}(t) \tag{0.2}$$

eine Lösung der obigen Gleichung ist, wobei $y_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\dot{y}(t) + h(t)y(t) = 0 \tag{0.3}$$

ist und $y_{ih}(t)$ <u>eine</u> spezielle Lösung der vollständigen (inhomogenen) DGL.

(b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben ist durch

$$y_h(t) = A\exp\left(-\int h(t)dt\right) \quad . \tag{0.4}$$

(c) Machen Sie nun für die spezielle Lösung $y_{ih}(t)$ der inhomogenen Gleichung einen Ansatz der Form:

$$y_{ih}(t) = A(t)\exp\left(-\int h(t)dt\right) \quad . \tag{0.5}$$

Leiten Sie damit eine Differentialgleichung für $A(t)$ her und geben Sie deren Lösung an.

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{t}y(t) = e^{-at} \tag{0.6}$$

mit Hilfe der eben beschriebenen Methode.

Aufgabe 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator (*8 Punkte*)

Für den gedämpften harmonischen Oszillator gilt:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad \text{mit:} \quad \gamma > 0, \quad \omega > 0$$

(a) Benutzen Sie einen Exponentialansatz. Wie lautet das charakteristische Polynom ?
Berechnen Sie die reellen Lösungen der Differentialgleichung, unterscheiden Sie dabei die drei Bereiche:

(i) $\gamma > \omega$ (ii) $\gamma = \omega$
(iii) $\gamma < \omega$

(b) Lösen Sie für $\omega = 4$ und die Dämpfungen

(i) $\gamma = 5$ (ii) $\gamma = 4$
(iii) $\gamma = 2\sqrt{3}$

das Anfangswertproblem $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$.
Skizzieren Sie die Lösungen (mit Hilfe eines Computerprogramms) in einem $x - t-$Diagramm.

(c) Welche allgemeine und spezielle Lösung (mit den Anfangsbedingungen aus (b)) würde sich beim ungedämpften harmonischen Oszillator ergeben ?

Aufgabe 3: Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung (*6 Punkte*)

Gegeben ist die DGL

$$\ddot{x}(t) - 10\dot{x}(t) + 9x(t) = 9t$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.
Hinweis: *Verwenden Sie einen Exponentialansatz.*

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

(c) Geben Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

(d) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) und (b) für die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \alpha t^2$$

Bemerkung: *Die homogene DGL entspricht dem harmonischen Oszillator.*

Aufgabe 4: Graphen der Lösungen einer DGL (*5 BONUSpunkte*)

Gegeben sei die DGL $y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$. Berechnen Sie die Lösung der DGL und geben Sie die Lösungen folgender AWP an und zeichnen Sie diese in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(a) $y(0) = 1$

(b) $y(0) = 0$

(c) $y(0) = -1$

(d) $y(0) = -1,5$