Mathematische Rechenmethoden 1

Blatt 9 - Abgabe: Freitag, den 19.06.15, 12 Uhr

Staudinger Weg 7, EG, rote Kästen

M. Sulpizi, T. Davis und Assistenten SoSe 2015

Aufgabe 1: Angetriebener Oszillator (Kinderschaukel) (*5 Punkte*)

Betrachtet wird ein gedämpfter Oszillator mit periodischer Antriebskraft:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a_0\omega_0^2 e^{i\tilde{\omega}t}$$

Dabei ist a_0 die Amplitude und $\tilde{\omega}$ die Frequenz der angeregten Schwingung.

(a) Geben Sie die homogene Lösung dieser Differentialgleichung für den Fall mit schwacher Dämpfung γ an (ohne Rechnung).

(b) Verwenden Sie die Methode der unbestimmten Parametern aus der Vorlesung und finden Sie damit eine spezielle Lösung. Geben Sie anschließend die allgemeine Lösung an.
Hinweis: *Bedenken Sie, dass die Konstante in Ihrem Ansatz komplex ist und in Polarkoordinaten geschrieben werden kann.*

Allgemeine Lösung zur Kontrolle:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) + a_0 \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (2\gamma\tilde{\omega})^2}} e^{i(\tilde{\omega}t + \varphi)}$$

$$\text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2}\right) - \pi \quad \text{für} \quad \tilde{\omega} < \omega_0$$

Aufgabe 2: Vektoren, Skalarprodukte, Kreuzprodukte (*8 Punkte*)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Welche der Vektoren sind linear abhängig?

Berechnen Sie die geforderten Größen paarweise für alle möglichen Kombinationen:

(b) Berechnen Sie das Skalarprodukt, den eingeschlossenen Winkel sowie den Betrag.

(c) Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{b}$ und $\vec{c} \times \vec{a}$.

Aufgabe 3: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Tensor **(*7 Punkte*)**

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen der Reihe nach. Sie dürfen die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben verwenden.

(a) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

(b) $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$

(c) $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

(d) Die Graßmann Identität: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ auch bekannt als „bac-cab“-Regel.

(e) Die Jacobi Identität: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$

Aufgabe 4: Kleine Beweise mit Vektoren **(*4 BONUSpunkte*)**

(a) Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ schließen mit den Achsen des Koordinatensystems und somit mit den Vektoren $\widehat{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\widehat{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\widehat{e}_3 = (0, 0, 1)$, der sogenannten Standartbasis des $\mathbb{R}^3$, die Winkel α_1 , α_2 und α_3 ein. Zeigen Sie, dass $\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1$ gilt.

(b) Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ mit $n > 1$. Zeigen Sie: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Welche bekannte geometrische Aussage verbirgt sich dahinter?