Übungsblatt 10

Abzugeben bis: Freitag 01.07.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

NUR B.Sc.!

Aufgabe 10.1: Der Satz von de Gua

Wenn ein Tetraeder eine rechtwinklige Ecke (wie eine Würfelecke) besitzt, dann ist die Summe der quadrierten Flächeninhalte der an der rechtwinkligen Ecke anliegenden Flächen gleich dem quadrierten Flächeninhalt der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Fläche.

Dies gilt nun mittels Vektorrechnung zu beweisen. Nutzen Sie hierzu die Ebene

$$E : bcx + acx + abx = abc$$

mit $a, b, c > 0$.

i) Skizzieren Sie die Ebene im ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$. *(1 Punkt)*

ii) Drücken Sie die einzelnen Tetraederseiten mittels Flčhennormalenvektoren aus und zeigen Sie dann die Gültigkeit des Satzes. *(3 Punkte)*

Aufgabe 10.2: Differentiation von Vektorfunktionen

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen von $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

i) $\frac{d}{dt}|\ \vec{r}\ |$ *(2 Punkte)*

ii) $\frac{d}{dt}(\ \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\ )$ *(2 Punkte)*

Aufgabe 10.3: Gradient, Divergenz und Rotation

Gegeben sind die Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -yz \\ x^2 z \\ xy^2 \end{pmatrix}$, $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yzx \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$ und $\vec{C}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = (x, y, z)$.

Berechnen Sie

i) die skalaren Felder

$f(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})$

$g(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{C}(\vec{r})$

$h(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{C}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

ii) den Gradienten von $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ und $h(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

iii) die Divergenz von $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

iv) die Rotation von $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$. *(3 Punkte)*

BONUSAufgabe 10.4: Kronecker-Delta und Levi-Civita-Tensor

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen der Reihe nach.

Sie dürfen die Ergebnisse der vorherigen Teilaufgaben verwenden.

i) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ *(2 Punkte)*

ii) $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$ *(1 Punkt)*

iii) $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$ *(1 Punkt)*