Übungsblatt 11

Abzugeben bis: Freitag 08.07.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

NUR B.Sc.!

Aufgabe 11.1: Differentiation von Vektorfunktionen: Bahnkurve

Ein Massenpunkt bewege sich gemäß:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}.$$

i) Skizzieren Sie die Bahnkurve für $t \in [0;1]$. *(1 Punkt)*

ii) Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$? *(1 Punkt)*

iii) Zu welchem Zeitpunkt $t_{\min}$ ist die Geschwindigkeit minimal? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt der Betrag der Geschwindigkeit? *(2 Punkte)*

Aufgabe 11.2: Kurvenintegral

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -yz \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yzx \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}$. Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $I = \int\limits_C \vec{F} d\vec{r}$ über die folgenden Wege von $P_A = (0/0/0)$ nach $P_E = (1/1/1)$:

i) C_1: gerade Linie *(1 Punkt)*

ii) C_2: $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2, \frac{1}{2}t)$ *(2 Punkte)*

iii) C_3: gerade Line von P_A zu $P_1 = (4/0/0)$, gerade Line von P_1 zu $P_2 = (2/2/0)$, gerade Line von P_2 zu P_E. *(3 Punkte)*

iv) Sind die Integrale wegabhängig ? *(2 Punkt)*

v) Überprüfen Sie, ob $\vec{A}d\vec{r}$ bzw. $\vec{B}d\vec{r}$ das totale Differential ist und berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 11.3: Konservatives Kraftfeld

Sei $\vec{F}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein radial gerichtetes Vektorfeld in der $x-y-$Ebene mit einer überall definierten Funktion f.

i) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ nur dann ein Potential Φ besitzt wenn f die (partielle) DGL

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

erfüllt. *(2 Punkte)*

ii) Zeigen Sie, dass jedes radialsymmertische f, welches $f(x, y) = \Psi(u) = \Psi(x^2 + y^2)$ mit einer beliebigen Funktion Ψ einer Variable ist, erfüllt diese DGL. *(1 Punkt)*

iii) Zeigen Sie, dass $\Phi(r^2) = \Phi(x^2 + y^2)$ mit $\Phi(u) = -\frac{1}{2}\int \Psi(u)\mathrm{d}u$ ein gültiges Potential für $\vec{F}$ darstellt. *(1 Punkt)*

BONUSAufgabe 11.4: Gravitationsfeld

Gegeben sei die Gravitationskraft $\vec{G}(\vec{r}) = -\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ mit den Massen m und M, der Gravitationskonstanten γ, dem Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ und seinem Betrag $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

i) Zeigen Sie, dass $\vec{G}(\vec{r})$ wirbelfrei ist. Die Rotation muss hierfür also verschwinden, d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{0}$. *(2 Punkte)*

ii) Zeigen Sie, dass $U(r) = -\gamma\frac{mM}{r}$ ein Potential von $\vec{G}(\vec{r})$ ist und plotten Sie U mit einem Programm ihrer Wahl in einem 3D Plot $(x/y/U)$ für feste Werte von z (z.B. $z = -1; 0; 1$) und interpretieren Sie Ihre Lösung. Setzen Sie für die Plots die Konstante C gleich 0. *(2 Punkte)*