Übungsblatt 2

Abzugeben bis: Freitag 06.05.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 2.1: Die Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Funktionen

Es sei $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ sowie

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i) Für welche α ist f differenzierbar in $x = 0$? *(2 Punkte)*

ii) Für welche α ist $f'(x)$ stetig? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.2: Funktionen und Tangenten

Es sei $f(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$ in $\mathbb{R}$ gegeben.

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ stetig? *(2 Punkte)*

ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ differenziebar? *(2 Punkte)*

iii) Berechen Sie die Tangenten im Punkt $(1, f(1))$ und im Punkt $(-2, f(-2))$. *(2 Punkte)*

iv) Berechen Sie allgemein die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Für welche x_0 ist die Tangente parallel zur ersten und zur zweiten Winkelhalbierenden? ($y = x$ bzw. $y = -x$)? *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.3: Die Regel von de l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital

i)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}$$

(2 Punkte)

ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{2x^2}}{x \sin(2x)}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2.4: Taylorpolynome

Berechnen Sie die Taylorpolynome der folgenden Funktionen $f_i(x)$ um den angegebenen Punkt x_0 bis zur Ordunung n.

i) $f_1(x) = x - \sin(x), \quad x_0 = 0, \quad n = 5$ *(2 Punkte)*

ii) $f_2(x) = x^4 + x - 2, \quad x_0 = 1, \quad n = 4$ *(2 Punkte)*

BONUSAufgabe 2.5: Eigenschaften von Funktionen und Ungleichungen

i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ streng monoton steigend ist. *(1 Punkt)*

ii) Zeigen Sie, dass $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + x \leq e^x$ gilt. *(1 Punkt)*

iii) Finden Sie das Maximum von $h(x) = \frac{x}{(x+a)(x+b)}$ $\quad x \in [0; +\infty[\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$

(2 Punkte)

B.Ed.-Aufgabe 2.6: Die Ableitung der Potenzfunktion

Gegeben sei die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

i) Berechnen Sie $(x + h)^2$, $(x + h)^3$ und $(x + h)^4$. *(2 Punkte)*

ii) Begründen Sie mit (i), dass $(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2)$ gilt. *(1 Punkt)*

iii) Zeigen Sie nun mit (ii), dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

existiert und $f'(x) = nx^{n-1}$ gilt. *(2 Punkte)*