Übungsblatt 3

Abzugeben bis: Freitag 13.05.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 3.1: Grenzwerte mit Taylor-Entwicklung

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Taylor-Entwicklung:

i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(2x)}{\sin^2(x)}$$

(3 Punkte)

ii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - e^x + 1}{xe^x - \sin(x)}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2: Partielle Ableitungen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = 5xy + xz + 3y^2z + z^2$$

.

i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. *(3 Punkte)*

ii) Bestimmen Sie die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j}$ für alle $i, j \in (x, y, z)$. *(4 Punkte)*

iii) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f(x,y,z)$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 3.3: Partielle Ableitungen 2

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = \sin^2(xy) + \cos(yz)$$

.

i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. *(3 Punkte)*

ii) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f(x,y,z)$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 3.4: Satz von Schwarz

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$.

Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$. Wieso versagt der Satz von Schwarz? *(2 Punkte)*

BONUSAufgabe 3.5: Taylorpolynome sind nicht immer schön

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ für $x \neq -1$.

Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad n an einer Stelle $x_0 \neq -1$. *(4 Punkte)*

Tipp: Geben Sie das Taylorpolynom in der Form $T^n_{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x_0}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x-x_0)^k$ *an.*

B.Ed.-Aufgabe 3.6: Die Gasgleichung

Die ideale Gasgleichung $pV = RT$ beschreibt, wie in idealen Gasen die Größen Druck (p), Temperatur (T) und Volumen (V) miteinander verknüpft sind. R ist die Gaskonstante. Mit Hilfe der idealen Gasgleichung kann jede Variable V; p; T als Funktion der beiden anderen dargestellt werden, z.B. $V(p,T) = \frac{RT}{p}$.

Zeigen Sie: $\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1$. *(5 Punkte)*