Übungsblatt 4

Abzugeben bis: Freitag 20.05.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 4.1: Stammfunktionen

Finden Sie zu folgenden Funktionen Stammfunktionen:

i) $f(x) = (x+2)\sin(x^2+4x-6)$

ii) $f(x) = x^2 \sin(x)$

iii) $f(x) = \ln(x)$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

v) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{a^2}}$

vi) $f(x) = x(3x^2-1)^6$

vii) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}$ *Tipp: Partialbruchzerlegung!*

viii) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ *(je 2 Punkte)*

Aufgabe 4.2: Der ln und das Integral

Benutzen Sie

$$\ln(y) = \int_1^y \frac{1}{x} \mathrm{d}x \quad ,$$

um die Gültigkeit der Rechenregel

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

zu zeigen.

Hinweis: *Verwenden Sie die Substitution $x = \frac{u}{a}$.* *(4 Punkte)*

BONUSAufgabe 4.3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

Man **kann** zeigen, dass

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u + 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{1}{2}\arccos u}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u.$$

Benutzen Sie die Substitution $u = \sin(\varphi)$ bzw. $u = \cos(\varphi)$ um das Integral in

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\varphi}{\cos(\varphi)} \cos(\varphi) \mathrm{d}\varphi + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varphi}{\sin(\varphi)} \sin(\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

zu überführen. Lösen Sie nun das Integral um den Wert der Reihe zu erhalten. *(4 Punkte)*

B.Ed.-Aufgabe 4.4: Abschätzung von π

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$. Ferner ist bekannt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(4-4x^2+5x^4-4x^5+x^6)-4$ ist.

2. Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$$
ist und folgern Sie, dass $\pi < \frac{22}{7}$.

3. Es gilt, dass
$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^4(1-x)^4\mathrm{d}x$$
ist. Folgern Sie nun, dass
$$\frac{1979}{630} \leq \pi \leq \frac{3959}{1260}$$
gilt. *(5 Punkte)*