Jun.-Prof. M. Sulpizi
T. Davis

Übungsblatt 5

Abzugeben bis: Freitag 27.05.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 5.1: Dreifachintegrale

V sei der von den Koordinatenebenen im ersten Oktanten und der Ebene $E : x+y+z = 1$ begrenzte Körper (Tetraeder).

i) Skizzieren Sie diesen Körper. *(1 Punkt)*

ii) Berechnen Sie das Volumen des Körpers V mittels der klassischen Formel des Volumens einer Pyramide. *(2 Punkte)*

iii) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_V 1 \mathrm{d}V$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus (ii). *(3 Punkte)*

iv) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_V (2x + y + z) \mathrm{d}V$$

und begründen Sie, wieso nun das Ergebnis abweicht. *(4 Punkte)*

Aufgabe 5.2: Zweidimensionale Integrale

Integrieren Sie die Funktion $f(x, y)$ auf dem Gebiet G und skizzieren sie für (i) und (ii) die jeweiligen Gebiete.

i) $f(x, y) = xy$, $G = \left\{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\right\}$ *(3 Punkte)*

ii) $f(x, y) = y\sqrt{1 - x^2}$,$G = \left\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\right\}$ *(3 Punkte)*

iii) $f(x) = e^{-x^2}$, $G =]-\infty, \infty[$ Tipp: *Sei* $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$, *berechnen Sie zunächst* $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *mit Hilfe von Polarkoordinaten.* *(4 Punkte)*

BONUSAufgabe 5.3: Integrationsreihenfolge bei unstetigen Funktionen

Gegeben sei die im Bereich $B =]0,1]^2$ unstetige Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad .$$

Zeigen Sie, dass man in diesem Fall die Integrationsreihenfolge nicht vertauschen darf. *(4 Punkte)*

B.Ed.-Aufgabe 5.4: Uneingentliche Integrale

Es sei $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$. Für r und R (je $\in \mathbb{R}$) derart, dass gilt $0 < r < R$. Berechnen Sie

i)

$$\int_r^R f(x)\mathrm{d}x.$$

(2 Punkte)

ii)

$$I = \lim_{r \downarrow 0} \int_r^R f(x)\mathrm{d}x.$$

(1 Punkt)

iii)

$$J = \lim_{R \to \infty} \int_r^R (x)\mathrm{d}x.$$

(1 Punkt)

iv) Für welche $\alpha > 0$ konvergieren je die Integrale I und J? *(1 Punkt)*