Übungsblatt 6

Abzugeben bis: Freitag 03.06.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 6.1: Mehrdimensionale Integrale

i) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten. *(1 Punkte)*

ii) Berechnen Sie durch Integration das Volumen des Metalls eines ein Meter langen Rohres mit einem Innenradius $r_1 = 3$ cm und einem Auenradius $r_2 = 4$ cm. *(2 Punkte)*

Aufgabe 6.2: Komplexe Zahlen

i) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt dargestellt werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$$

und

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

(2 Punkte)

ii) Berechnen Sie $z_1 = (2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $z_2 = \frac{(2+3i)^2}{4-4i}$. *(2 Punkte)*

iii) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3}i$ die reellen Zahlen r und φ so, dass $z = r \exp{(i\varphi)}$. *(2 Punkte)*

iv) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -1$. *(2 Punkte)*

v) Zeigen Sie mittels der Taylorreihendarstellung, dass $z = |r| (\cos{(\varphi)} + i \sin{(\varphi)}) = r \exp{(i\varphi)}$ ist. *Hinweis: Eine Entwicklung ist nicht vonnöten. Betrachten Sie die Darstellungen bis $\mathcal{O}(x^5)$.* *(2 Punkte)*

Aufgabe 6.3: Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

i) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

a) $(2i)^{16}$

b) $\left(3 + \sqrt{2}i\right)^2$ *(2 Punkte)*

ii) Berechnen Sie den Hauptwert von:

a) $\sqrt{-9}$

b) $\ln(i)$

c) $\ln(-1 + \sqrt{3}i)$

d) $(-2i - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$

e) $(1 + i)^i$ *(5 Punkte)*

BONUSAufgabe 6.4: Die Quaternionen

Quaternionen sind Zahlen der Form $q = a + bi + cj + dk$ für die gilt $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sowie $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ und $ki = -ik = j$. Ihr Symbol ist $\mathbb{H}$.

i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. *(1 Punkt)*

ii) $q^* = a - bi - cj - dk$ heißt das konjugierte Quaternion zu q. Zeigen Sie, dass $(q \cdot q^*) \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

iii) Wie lautet demnach das Inverse q^{-1} zu einem $q \neq 0$? *Tipp: Gehen Sie von analogen Beschaffenheiten wie in $\mathbb{C}$ aus.* *(1 Punkte)*

B.Ed.-Aufgabe 6.5: Die Eulerformel

Leiten Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

für Sinus und Cosinus her. *Tipp: Fangen Sie auf der rechten Seite an.* *(5 Punkte)*