Übungsblatt 7

Abzugeben bis: Freitag 10.06.2016 - 16Uhr

Benötigte Zeit für die Bearbeitung dieses Blattes: ________

Aufgabe 7.1: Nullstellen komplexer Funktionen

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden komplexwertigen Funktionen:

i) $f(z) = (3 + 2i)z^* - 1 - 18i$ *(2 Punkte)*

ii) $f(z) = z^2 + (5i - 10)z - 50i = 0$

Tipp: Die Gleichung $(5 + \frac{5}{2}i)^2 = 18{,}75 + 25i$ *kann nützlich sein.* *(3 Punkte)*

Aufgabe 7.2: Holomorphe Funktionen (Cauchy-Riemann-DGLen)

i) Untersuchen Sie die Funktion $f(z) = \frac{z^*}{|z|^2}$ auf Holomorphie. *(2 Punkte)*

ii) Für welchen Wert des Parameters α ist die Funktion

$$u(x, y) = \sin x(e^{-\alpha y} + e^y)$$

holomorph? *(3 Punkte)*

iii) Untersuchen Sie ob die Funktion

$$u(x, y) = e^x \frac{x \cos y + y \sin y}{x^2 + y^2}$$

der Reelleteil einer holomorphen Funktion sein kann und bestimmen Sie gegebenfalls $f(z)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Trajektorien

Ein Teilchen bewege sich in der $x - y-$Ebene als Funktion der Zeit t derart, dass die Bewegung durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = e^{(2it)}$$

i) Zeichnen Sie die Traktorie in der Ebene. Welche Bewegung wird beschrieben? *(1 Punkt)*

ii) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sowie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit t. *(2 Punkte)*

Aufgabe 7.4: Graphen komplexer Funktionen

Wie lassen sich komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen veranschaulichen? Der Graph einer solchen Funktion ist eine Teilmenge des $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ und entzieht sich der Anschauung. Eine gute Möglichkeit der Darstellung von $f = g + ih$ ist die Zeichnung der Niveaulinien von g, h oder $|f|$, d.h. einiger Linien der Mengen $\{z : \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{const}\}$, $\{z : \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{const}\}$ oder $\{z : |f(z)| = \mathrm{const}\}$.
Betrachten wir uns nun die Funktion $f(z) = z^2$ mit $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen und zeichnen Sie die folgenden Niveaulinien:

i) $\mathrm{Re}(f(z)) = k$ mit $k \in \{-4; -1; 0; 1; 4\}$. *(1 Punkt)*

ii) $\mathrm{Im}(f(z)) = c$ mit $c \in \{-8; -2; 0; 2; 8\}$. *(1 Punkt)*

iii) $|f(z)| = n$ mit $n \in \{0; 1; 4; 9\}$. *(1 Punkt)*

BONUSAufgabe 7.5: Der Satz von Osgood

Sie lesen in einem Buch den Satz von Osgood "Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ eine injektive holomorphe Funktion. Dann ist $\Omega' := f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und die Umkehrabbildung $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ ist holomorph, also die Abbildung f biholomorph." und beschließen ihn in eine reelle Version zu übertragen. "Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine injektive differenzierbare Funktion. Dann ist $I' := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und die Umkehrabbildung $f^{-1} : I' \to I$ ist differenzierbar, also die Abbildung f bidifferenzierbar.".
Zeigen Sie am Beispiel $f(x) = (x-3)^3 + 5$ mit $I =]2; 4[$, dass dies nicht stimmen kann. *(4 Punkte)*

B.Ed.-Aufgabe 7.6: Grenzwerte

Bestimmen Sie von den folgenden komplexen Zahlen die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} z_k^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |z_k|^n$ für $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

i) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$

ii) $z_2 = 5 + 3i$

iii) $z_3 = \exp(2\pi i)$

iv) $z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

v) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = \lim\limits_{n\to\infty} |z|^n$? *(5 Punkte)*